

灰色模型 GM (1, 1) 优化

罗 党, 刘思峰, 党耀国

(南京航空航天大学经济与管理学院, 南京 210016)

[摘要] 分析了 GM (1, 1) 模型产生模拟误差的原因, 经大量的数据模拟和 GM (1, 1) 模型比较, 发现背景值的优化使 GM (1, 1) 模型在短期、中期及长期预测中扩大了适用范围, 并且模拟及预测精度显著提高。

[关键词] GM (1, 1) 模型; 白化方程; 背景值

[中图分类号] O159 **[文献标识码]** A **[文章编号]** 1009-1742 (2003) 08-0050-04

1 引言

作为灰色系统理论重要内容之一的 GM (1, 1) 模型^[1,2], 其应用价值在越来越多的领域中得到体现^[3,4]。GM (1, 1) 模型的突出特点是: 建模过程简单, 模型表达式简洁, 便于求解, 应用广泛。在发展系数 a 的绝对值较小时 (当时间间隔很小、序列数据变化平缓时, 如 $0 < -a \leq 0.3$), 模拟值精度较高。但当发展系数 a 的绝对值较大 (如 $-a > 0.5$) 时, 模型偏差较大, 无法用于中长期预测, 甚至不宜作短期预测。一些学者对此进行了改进, 得到了比原 GM (1, 1) 模型模拟精度高和适应性更强的新模型^[5~8]。笔者经过分析 GM (1, 1) 模型产生模拟误差的原因, 从构造背景值公式入手, 优化 GM (1, 1) 模型, 既保持了原 GM (1, 1) 模型的优点, 又使优化 GM (1, 1) 模型适用于各种发展系数的情形, 尤其是当发展系数绝对值较大时也可用于中长期预测, 并且精度较高。

2 GM (1, 1) 模型背景值的优化

设原始序列为 $X^{(0)} = \{x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n)\}$, 则 $X^{(0)}$ 的 1-AGO 序列为 $X^{(1)} =$

$\{x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \dots, x^{(1)}(n)\}$ 其中 $x^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^k x^{(0)}(i), k=1, 2, \dots, n$ 。

$X^{(1)}$ 的紧邻均值生成序列 $Z^{(1)} = \{z^{(1)}(1), z^{(1)}(2), \dots, z^{(1)}(n)\}$, 其中

$$z^{(1)}(k) = [x^{(1)}(k) + x^{(1)}(k-1)]/2, \quad k=2, 3, \dots, n.$$

称一阶线性微分方程

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)} = b \quad (1)$$

为灰色微分方程 (即灰色 GM (1, 1) 模型)

$$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = b \quad (2)$$

的白化方程。

用式 (1) 的解

$$\hat{x}^{(1)}(t) = \left(x^{(0)}(1) - \frac{b}{a}\right)e^{-a(t-1)} + \frac{b}{a}$$

在 $t = k (k = 1, 2, \dots, n)$ 处的值来逼近或描述 $x^{(1)}(k)$ 。

式(1)中的系数 a 与常数项 b 是由式(2)用下述方法确定:

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (B^T B)^{-1} B^T Y, \quad (3)$$

其中

[收稿日期] 2002-11-18; 修回日期 2002-12-26

[基金项目] 教育部博士学科点科研基金资助项目 (20020287001)

[作者简介] 罗 党 (1959-), 男, 河南汝南县人, 华北水利水电学院副教授, 南京航空航天大学博士研究生

$$Y = \begin{pmatrix} x^{(0)}(2) \\ x^{(0)}(3) \\ \vdots \\ x^{(0)}(n) \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -z^{(1)}(2) & 1 \\ -z^{(1)}(3) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -z^{(1)}(n) & 1 \end{pmatrix}.$$

由此可知 GM(1,1)模型的模拟与预测精度取决于常数 a 和 b , 而 a 和 b 的值依赖于原始序列和背景值的构造形式。即背景值 $z^{(1)}(k)$ 的构造公式是导致模拟误差 $\hat{\varepsilon}^{(0)}(k) = \hat{x}^{(1)}(k) - x^{(1)}(k)$ 及 GM(1,1)模型的适应性的关键因素之一。

在 $[k-1, k]$ 上 (参见图 1) 对式 (1) 两边求积分得

$$\int_{k-1}^k \frac{dx^{(1)}}{dt} dt + a \int_{k-1}^k x^{(1)} dt = b,$$

即

$$x^{(1)}(k) - x^{(1)}(k-1) + a \int_{k-1}^k x^{(1)} dt = b,$$

亦即

$$x^{(0)}(k) + a \int_{k-1}^k x^{(1)} dt = b. \quad (4)$$

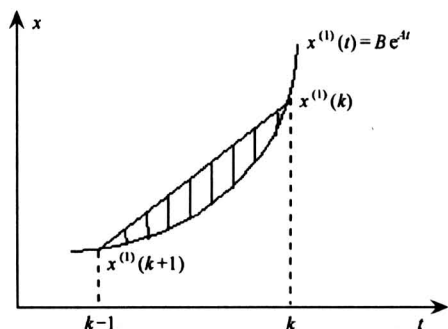


图 1 原 GM (1, 1) 模型误差来源示意图

Fig.1 A schematic diagram on reasons of error which from original model GM (1, 1)

将式(4)和式(2)比较可知,用一阶线性微分式(1)解来逼近 $x^{(1)}(k)$, ($k=1,2,\dots,n$),其误差来源于,用

$$z^{(1)}(k) = [x^{(1)}(k) + x^{(1)}(k-1)]/2$$

代替 $\int_{k-1}^k x^{(1)}(t)dt$, ($k=2,3,\dots,n$)

所致。为消除由此产生的误差,不妨记

$$z^{(1)}(k) = \int_{k-1}^k x^{(1)}(t)dt. \quad (5)$$

设 $x^{(1)}(t) = Be^{At}$, 其中 A, B 为待定常数,且满足

$$x^{(1)}(k) = Be^{Ak}, (k=1,2,\dots,n).$$

将 $x^{(1)}(t) = Be^{At}$ 代入式 (5) 得

$$z^{(1)}(k) = \int_{k-1}^k Be^{At} dt = \frac{1}{A} [Be^{Ak} - Be^{A(k-1)}] = \frac{1}{A} [x^{(1)}(k) - x^{(1)}(k-1)]. \quad (6)$$

又由 $\frac{x^{(1)}(k)}{x^{(1)}(k-1)} = \frac{Be^{Ak}}{Be^{A(k-1)}} = e^A$ 得

$$A = \ln x^{(1)}(k) - \ln x^{(1)}(k-1). \quad (7)$$

将式 (7) 代入式 (6) 得

$$z^{(1)}(k) = \frac{x^{(1)}(k) - x^{(1)}(k-1)}{\ln x^{(1)}(k) - \ln x^{(1)}(k-1)}, \quad k=2,3,\dots,n. \quad (8)$$

由此得到优化 GM (1, 1) 模型如下:

定理 设 $X^{(0)}$ 为非负准光滑序列, $X^{(0)} = \{x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n)\}$, $X^{(1)} = \{x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \dots, x^{(1)}(n)\}$ 为 $X^{(0)}$ 的 1-AGO 序列, 若 $\hat{a} = (a, b)^T$ 为参数

$$z^{(1)}(k) = \frac{x^{(1)}(k) - x^{(1)}(k-1)}{\ln x^{(1)}(k) - \ln x^{(1)}(k-1)}, \quad k=2,3,\dots,n,$$

其中当 $x^{(1)}(k) = x^{(1)}(k-1)$ 时, $z^{(1)}(k) = x^{(1)}(k-1)$,

$$Y = \begin{pmatrix} x^{(0)}(2) \\ x^{(0)}(3) \\ \vdots \\ x^{(0)}(n) \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -z^{(1)}(2) & 1 \\ -z^{(1)}(3) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -z^{(1)}(n) & 1 \end{pmatrix},$$

则:

1) 灰色微分方程 $x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = b$ 的最小二乘估计参数满足

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (B^T B)^{-1} B^T Y;$$

2) 灰色微分方程 $x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = b$ 的白化方程 $\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)} = b$ 的时间响应式为

$$\hat{x}(t) = \left(x^{(0)}(1) - \frac{b}{a}\right) e^{-a(t-1)} + \frac{b}{a};$$

3) 灰色微分方程 $x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = b$ 时间响应式为

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = \left(x^{(0)}(1) - \frac{b}{a}\right) e^{-ak} + \frac{b}{a}, \quad k=1,2,\dots,n;$$

4) 还原值为

$$\hat{x}^{(0)}(k+1) = \hat{x}^{(1)}(k+1) - \hat{x}^{(1)}(k), \quad k=1,2,\dots,n.$$

如果在区间 $[k-1, k]$ 上, $x^{(1)}(k) = x^{(1)}(k-1)$ 则

式(8)可以理解为 $z^{(1)}(k) = x^{(1)}(k-1)$ 。事实上,

$$z^{(1)}(k) = \lim_{x^{(1)}(k) \rightarrow x^{(1)}(k-1)} [(x^{(1)}(k) - x^{(1)}(k-1)) / (\ln x^{(1)}(k) - \ln x^{(1)}(k-1))] = \lim_{x^{(1)}(k) \rightarrow x^{(1)}(k-1)} (x^{(1)}(k) = x^{(1)}(k-1))。$$

此时,式(2)中的背景值 $z^{(1)}(k) = [x^{(1)}(k) + x^{(1)}(k-1)]/2 = x^{(1)}(k-1)$ 。该事实从几何图形上也是显然的,这也正是原创GM(1,1)模型对发展系数 a 的绝对值很小(如 $0 < -a \leq 0.3$),即原始序列 $x^{(0)}(k), (k=1, 2, \dots, n)$ 变化平缓时,模拟及预测精度较高的原因。

3 数据模拟精度的比较

文献[1]中对GM(1,1)模型的适用范围进行了讨论,一般地,当发展系数 a 的绝对值小于2时,GM(1,1)模型有意义,并对发展系数 $0 < -a < 2$ 的情形分别取 $-a = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.8, 1.0, 1.5, 1.8$ 进行模拟分析。为叙述方便起见,记文献[1]中的GM(1,1)模型为原GM(1,1)模型。笔者的优化GM(1,1)模型为新GM(1,1)模型。

以下分别就 $-a$ 取上述若干值的情形用2种GM(1,1)模型进行数据模拟,并对模拟及预测精度进行比较。

1) 原始序列

取 $k=0, 1, 2, 3, 4, 5$, 由 $x_i^{(0)}(k+1) = e^{-ak}$ 可得 $X_i^{(0)} = \{x_i^{(0)}(1), x_i^{(0)}(2), x_i^{(0)}(3), x_i^{(0)}(4), x_i^{(0)}(5), x_i^{(0)}(6)\}$ 的原始序列值,见表1。

2) 以上述原始序列分别建立原GM(1,1)模型及新GM(1,1)模型,并求出相应的时间响应式。

原GM(1.1)模型时间响应式:

$$\begin{aligned} \hat{x}_1^{(1)}(k+1) &= 10.509647e^{0.09907k} - 9.509647, \\ \hat{x}_2^{(1)}(k+1) &= 5.516431e^{0.1993401k} - 4.516431, \\ \hat{x}_3^{(1)}(k+1) &= 3.85832e^{0.297769k} - 2.858321, \\ \hat{x}_4^{(1)}(k+1) &= 3.033199e^{0.394752k} - 2.033199, \\ \hat{x}_5^{(1)}(k+1) &= 2.541474e^{0.4898382k} - 1.541474, \\ \hat{x}_6^{(1)}(k+1) &= 2.216359e^{0.582626k} - 1.216359, \\ \hat{x}_7^{(1)}(k+1) &= 1.8159718e^{0.7598991k} - 0.8159718, \\ \hat{x}_8^{(1)}(k+1) &= 1.581973e^{0.9242348k} - 0.5819733, \\ \hat{x}_9^{(1)}(k+1) &= 1.287182e^{1.270296k} - 0.2871283, \\ \hat{x}_{10}^{(1)}(k+1) &= 1.198197e^{1.432596k} - 0.1981966。 \end{aligned}$$

表1 原始序列值

Table 1 The original datum

$-a$	i	$x_i^{(0)}(1)$	$x_i^{(0)}(2)$	$x_i^{(0)}(3)$	$x_i^{(0)}(4)$	$x_i^{(0)}(5)$	$x_i^{(0)}(6)$
0.1	1	1.0	1.105 2	1.221 4	1.349 9	1.491 8	1.648 7
0.2	2	1.0	1.221 4	1.491 8	1.822 1	2.225 5	2.718 3
0.3	3	1.0	1.349 9	1.822 1	2.459 6	3.320 1	4.481 7
0.4	4	1.0	1.491 8	2.225 5	3.320 1	4.953 0	7.389 0
0.5	5	1.0	1.648 7	2.718 3	4.481 7	7.389 0	12.182 5
0.6	6	1.0	1.822 1	3.320 1	6.049 6	11.023 2	20.085 5
0.8	7	1.0	2.225 5	4.953 0	11.023 2	24.532 5	54.598 2
1.0	8	1.0	2.718 3	7.389 0	20.085 5	54.598 2	148.413 2
1.5	9	1.0	4.481 7	20.085 5	90.017 1	403.428 8	1 808.042 4
1.8	10	1.0	6.049 6	36.598 2	221.406 4	1 339.430 8	8 103.083 9

新GM(1,1)模型时间响应式:

$$\begin{aligned} \hat{x}_1^{(1)}(k+1) &= 10.634472e^{0.099318k} - 9.634472, \\ \hat{x}_2^{(1)}(k+1) &= 5.594064e^{0.199117k} - 4.594064, \\ \hat{x}_3^{(1)}(k+1) &= 3.922068e^{0.299149k} - 2.922068, \\ \hat{x}_4^{(1)}(k+1) &= 3.091401e^{0.399299k} - 2.091401, \\ \hat{x}_5^{(1)}(k+1) &= 2.59745e^{0.49947k} - 1.59745, \\ \hat{x}_6^{(1)}(k+1) &= 2.271684e^{0.599626k} - 1.271684, \\ \hat{x}_7^{(1)}(k+1) &= 1.872098e^{0.799838k} - 0.872098, \\ \hat{x}_8^{(1)}(k+1) &= 1.639822e^{0.999937k} - 0.639822, \\ \hat{x}_9^{(1)}(k+1) &= 1.348329e^{1.499996k} - 0.348329, \\ \hat{x}_{10}^{(1)}(k+1) &= 1.25953e^{1.799999k} - 0.25953。 \end{aligned}$$

3) 两类GM(1,1)模型的模拟精度(平均相对误差)和预测精度(误差)比较见表2和表3。

4 结论

1) 应用实际曲线在区间上的面积作为背景值,重构了背景值的计算公式,并保持了原GM(1,1)模型建模简单、计算简便及易于应用的优点。

2) 经大量数据模拟可知,优化GM(1,1)模型既适用于低增长指数(即发展系数的绝对值较小)序列建模,也适用于高增长指数(即发展系数的绝对值较大)序列建模,尤其是对高增长指数序列优化GM(1,1)模型,可用于做中长期预测且精度较高,具有重要的理论意义和较高的应用价值。

表 2 两类 GM (1, 1) 模型的模拟精度 (平均相对误差) 比较

Table 2 Contrast of the optimum one to the GM (1, 1) about the simulation

$-a$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0	1.5	1.8
原 GM 误差	0.105 963 2	0.499 163	1.300 909	2.613 955	4.520 585 9	7.074 289 9	14.156 851	23.544 004	51.032 934	65.453 743
新 GM 误差	0.337 920 5	0.731 469	1.147 005	1.558 524	1.955 963 5	2.334 233 3	3.027 305 4	3.633 131 2	4.733 841 3	5.132 772 9

表 3 两类 GM (1, 1) 模型的预测精度 (误差) 比较

Table 3 contrast of the optimum one to the GM (1, 1) about the prediction

$-a$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0	1.5	1.8
原 GM1 步误差	0.128 9	0.696 0	1.960 4	4.137 8	7.397 0	11.820 2	24.009 3	39.436 9	76.667 0	89.937 2
新 GM1 步误差	0.133 320 1	0.464 9	0.889 0	1.345 1	1.794 0	2.219 464 4	2.977 2	3.613 5	4.721 3	5.132 5
原 GM2 步误差	0.136 7	0.761 5	2.179 1	4.639 6	8.333 2	13.339 0	26.996 3	43.855 9	81.455 6	93.031 2
新 GM2 步误差	0.065 052 5	0.376 2	0.803 2	1.274 1	1.740 0	2.181 241 5	2.960 6	3.607 0	4.717 1	5.132 4
原 GM5 步误差	0.160 1	0.957 8	2.832 2	6.129 2	11.085 5	17.740 2	35.271 1	55.270 8	90.690 3	97.685 4
新 GM5 步误差	0.139 471 3	0.110 7	0.546 2	1.061 3	1.578 4	2.066 658 4	2.910 5	3.587 4	4.704 5	5.13 20
原 GM10 步误差	0.199 1	1.284 1	3.911 0	8.560 3	15.490 3	24.584 4	47.031 2	69.375 5	97.047 8	99.631 3
新 GM10 步误差	0.280 8	0.330 3	0.119 3	0.707 7	1.309 6	1.875 972 1	2.827 2	3.554 8	4.683 6	5.131 5

参考文献

- [1] 邓聚龙. 灰色系统理论教程 [M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1990
- [2] 刘思峰, 郭天榜, 党耀国, 等. 灰色系统理论及其应用 [M]. 北京: 科学出版社, 1999
- [3] 刘思峰, 邓聚龙. GM (1, 1) 模型的适用范围 [J]. 系统工程理论与实践, 2000, (5): 121~124
- [4] 刘思峰, 孙书安. 应用数学 [M]. 郑州: 河南科技出版社, 1993
- [5] 王义闹, 刘光珍, 刘开第. GM(1, 1) 的一种逐步优化直接建模法 [J]. 系统工程理论与实践, 2000, (9): 99~104
- [6] 吕林正, 吴文江. 灰色模型 GM (1, 1) 优化探讨 [J]. 系统工程理论与实践, 2001, (8): 92~96
- [7] 吉培荣, 黄巍松, 胡翔勇. 灰色预测模型特性的研究 [J]. 系统工程理论与实践, 2001, (9): 105~108
- [8] 谭冠军. GM (1.1) 模型的背景值构造方法和应用 (I)[J]. 系统工程理论与实践, 2000, (4): 98~103

The Optimization of Grey Model GM (1, 1)

Luo Dang, Liu Sifeng, Dang Yaoguo

(College of Economics and Management, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

[Abstract] This paper analyzes the reason that grey model GM (1,1) often makes errors in simulated data. By contrasting the optimum one to the GM (1,1) about the simulation, it can be concluded that the structure method of background value in grey model GM (1,1) has an important influence on the prediction and adaptability of the model. The optimum background value makes grey model GM (1,1) have better fitting and forecasting precision.

[Key words] grey model GM (1,1); winterization equation; background value