学术论文

区域水环境质量的区间可拓评价方法及应用

胡宝清
（武汉大学数学统计学院，武汉　430072）

［摘要］　在区间与区间之距——IR距概念的基础上给出了相应的可拓评价方法——区间可拓评价方法，并在区域水环境质量评价中给出实例。解决待评事物由实测数据的种种不确定性产生的区间数的评价问题。

［关键词］　区间距；区间关联函数；区间可拓评价

1　前言

在水环境质量评价中，文献［1］首次采用了可拓评价方法。在该方法中，待评物元的量值为点，水质标准的量值为区间，评价方法建立在点与区间的距离——距的概念基础上。该方法也同时应用于围岩稳定性分类[2]。但在实际应用中，由于测量、计算所带来的数据误差、信息不完全带来的数据不完全、人为主观因素带来的数据不准确等原因，待评物元的量值可能为一区间，这时要考虑区间与区间的距离，并在区间与区间之距——IR距概念[3]的基础上，给出相应的可拓评价方法。

2　区间距

在实域上起作用是点和区间，而点x与点y的距离在经典数学中已有定义，即

$$\rho(x,y)=|x-y|。$$

为了建立关联函数，还要定义点与区间距离——距的概念[4~7]。

经典数学中的有限开区间(a,b)、闭区间$[a,b]$、半开半闭区间$(a,b]$和$[a,b)$统称为区间，用符号$\langle a,b\rangle$表示，也就是说，区间$\langle a,b\rangle$可以包含a（或b），也可以不包含a（或b）。设x为实域$(-\infty,+\infty)$上的任一点，$\langle a,b\rangle$为实域上任一有限区间，则称

$$\rho(x,\langle a,b\rangle)=\left|x-\frac{a+b}{2}\right|-\frac{1}{2}(b-a)$$

为点x与区间$\langle a,b\rangle$之距。

此处距的概念与经典数学中距离稍有不同。当$\langle a,b\rangle$中不含x时，$\rho(x,\langle a,b\rangle)$与经典数学中点与区间距离$d$概念相同，即：$\rho(x,\langle a,b\rangle)=d$，$d$是离$x$最近区间端点与$x$的距离。当$x$点在$\langle a,b\rangle$之内时，经典数学中认为点与区间距离$d=0$；而这里的距为负值，负值的不同表示$x$在区间$\langle a,b\rangle$内位置不同。例如，设给定区间$\langle 3,5\rangle$，则$\rho(4,\langle 3,5\rangle)=|4-4|-1=-1$。

为了建立区间上的关联函数，文献［3］引入了区间与区间之距——IR距和区间关于区间的位值——IR位值的概念：

设$\langle x,y\rangle$与$\langle a,b\rangle$为实数域上的任意有限区间，则称

$$\rho_{\mathrm{I}}(\langle x,y\rangle,\langle a,b\rangle)=\frac{1}{2}(\rho(x,\langle a,b\rangle)+\rho(y,\langle a,b\rangle))$$

为区间$\langle x,y\rangle$与区间$\langle a,b\rangle$的区间距，简称IR距。当$\langle x,y\rangle$为一单点集时，IR距就是点与区间之距。为了区别，点x与区间$\langle a,b\rangle$之距用$\rho(x,\langle a,b\rangle)$表示，区间$\langle x,y\rangle$与区间$\langle a,b\rangle$的区间距用$\rho_{\mathrm{I}}(\langle x,y\rangle,\langle a,b\rangle)$表示。

设$X_1=\langle a,b\rangle$，$X_2=\langle c,d\rangle$且$X_1\subset X_2$，则

［收稿日期］　2000-10-03；修回日期　2001-02-08
［基金项目］　高等学校骨干教师资助计划资助项目
［作者简介］　胡宝清（1962-），男，湖北仙桃市人，武汉大学教授

$$D_{\mathrm{I}}(\langle x,y\rangle,X_1,X_2)=$$
$$\begin{cases}-1, & [x,y]\subset[a,b]\\ \rho_{\mathrm{I}}(\langle x,y\rangle,X_2)-\rho_{\mathrm{I}}(\langle x,y\rangle,X_1), & \text{其它}\end{cases}$$

称为区间 $\langle x,\ y\rangle$ 关于区间 X_1，X_2 的区间位值，简称 IR 位值。当 $\langle x,\ y\rangle$ 为一单点集时，IR 位值就是点关于区间的位值。为了区别，点关于区间 X_1，X_2 的位值用 $D(x,\ X_1,\ X_2)$ 表示，区间 $\langle x,\ y\rangle$ 关于区间 X_1，X_2 的位区间位值用 $D_{\mathrm{I}}(\langle x,\ y\rangle,\ X_1,\ X_2)$ 表示。

关于区间论域上的可拓集理论以及建立在 IR 距上的关联函数理论参见文献 [3]。

3 区间可拓评价方法

IR 可拓评价方法的具体步骤如下：

步 1 确定经典域与节域 设：

$$R_1=(N_1,C,V_1)=\begin{bmatrix}N_1 & C_1 & \langle a_{11},b_{11}\rangle\\ & C_2 & \langle a_{21},b_{21}\rangle\\ & \vdots & \vdots\\ & C_n & \langle a_{n1},b_{n1}\rangle\end{bmatrix},$$

$$R_2=(N_2,C,V_2)=\begin{bmatrix}N_2 & C_1 & \langle a_{12},b_{12}\rangle\\ & C_2 & \langle a_{22},b_{22}\rangle\\ & \vdots & \vdots\\ & C_n & \langle a_{n2},b_{n2}\rangle\end{bmatrix},$$

……

$$R_m=(N_m,C,V_m)=\begin{bmatrix}N_m & C_1 & \langle a_{1m},b_{1m}\rangle\\ & C_2 & \langle a_{2m},b_{2m}\rangle\\ & \vdots & \vdots\\ & C_n & \langle a_{nm},b_{nm}\rangle\end{bmatrix}$$

为 m 个同征（C_1，C_2，…，C_n）物元[6,7]，则称

$$R_0=\begin{bmatrix}N & N_1 & N_2 & \cdots & N_m\\ C & V_1 & V_2 & \cdots & V_m\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}N & N_1 & N_2 & \cdots & N\\ C_1 & \langle a_{11},b_{11}\rangle & \langle a_{12},b_{12}\rangle & \cdots & \langle a_{1m},b_{1m}\rangle\\ C_2 & \langle a_{21},b_{21}\rangle & \langle a_{22},b_{22}\rangle & \cdots & \langle a_{2m},b_{2m}\rangle\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ C_n & \langle a_{n1},b_{n1}\rangle & \langle a_{n2},b_{n2}\rangle & \cdots & \langle a_{mm},b_{nm}\rangle\end{bmatrix}$$

是同征物元 R_1，R_2，…，R_m 的同征物元体，其中 N_j 表示所划分的第 j 个评价类别，C_i 表示第 i 个评价指标，$V_{ij}=\langle a_{ij},\ b_{ij}\rangle$ 分别为 N_j 关于指标 C_i 所规定的量值范围，即各类别关于对应的评价指标所取的数据范围经典域。令

$$R_{\mathrm{P}}=(P,C,V_{\mathrm{P}})=$$

$$\begin{bmatrix}P, & C_1, & V_{1\mathrm{P}}\\ & C_2, & V_{2\mathrm{P}}\\ & \vdots & \vdots\\ & C_n, & V_{n\mathrm{P}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}P, & C_1, & \langle a_{1\mathrm{P}},b_{1\mathrm{P}}\rangle\\ & C_2, & \langle a_{2\mathrm{P}},b_{2\mathrm{P}}\rangle\\ & \vdots & \vdots\\ & C_n, & \langle a_{n\mathrm{P}},b_{n\mathrm{P}}\rangle\end{bmatrix},$$

其中，P 表示类别的全体，$V_{i\mathrm{P}}=\langle a_{i\mathrm{P}},\ b_{i\mathrm{P}}\rangle$ 为 P 关于 C_i 所取的量值的范围，即 P 的节域，且 $V_{ij}\subset V_{iP}(i=1,2,\cdots,n,\quad j=1,2,\cdots,m)$。

步 2 确定待评物元 对待评的事物 q，把所检测得到的数据或分析结果用物元

$$R_{\mathrm{q}}=(q,C,V_{\mathrm{q}})=$$

$$\begin{bmatrix}q, & C_1, & V_{1\mathrm{q}}\\ & C_2, & V_{2\mathrm{q}}\\ & \vdots & \vdots\\ & C_n, & V_{n\mathrm{q}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}q, & C_1, & \langle c_{1\mathrm{q}},d_{1\mathrm{q}}\rangle\\ & C_2, & \langle c_{2\mathrm{q}},d_{2\mathrm{q}}\rangle\\ & \vdots & \vdots\\ & C_n, & \langle c_{n\mathrm{q}},d_{n\mathrm{q}}\rangle\end{bmatrix}$$

表示，称为事物 q 的待评物元，式中 q 表示某事物，$\langle c_{i\mathrm{q}},\ d_{i\mathrm{q}}\rangle$ 为 q 关于 C_i 的量值，即待评事物检测所得的具体数据。

步 3 确定权系数 确定指标 C_i 的权系数为 α_i，且

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1。$$

步 4 确定待评事物关于各类别等级的关联度

$$K_j(V_{i\mathrm{q}})=\frac{\rho_{\mathrm{I}}(\langle c_{i\mathrm{q}},d_{i\mathrm{q}}\rangle,\langle a_{ij},b_{ij}\rangle)}{D_{\mathrm{I}}(\langle c_{i\mathrm{q}},d_{i\mathrm{q}}\rangle,\langle a_{ij},b_{ij}\rangle,\langle a_{i\mathrm{P}},b_{i\mathrm{P}}\rangle)}$$

其中 $K_j(V_{i\mathrm{q}})$ 为待评事物 q 对于评价指标 C_i 的量值 $\langle c_{i\mathrm{q}},\ d_{i\mathrm{q}}\rangle$ 关于等级 j 的关联度。

步 5 计算待评事物 q 关于等级 j 的关联度

$$K_j(q)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_iK_j(V_{i\mathrm{q}})。$$

步 6 等级评定 若 $k_{j_0}(q)=\max\limits_{j‰\in\{1,2,\cdots,m\}}K_j(q)$，则评定 q 属于等级 j_0。令

$$\overline{K}_j(q)=\frac{K_j(q)-\min\limits_{j}K_j(q)}{\max\limits_{j}K_j(q)-\min\limits_{j}K_j(q)},$$

$$j^*=\sum_{j=1}^{m}j\overline{K}_j(q)\Big/\sum_{j=1}^{m}\overline{K}_j(q),$$

则称 j^* 为 q 的级别变量特征值。

4 确定权重的可拓方法

下面用简单关联函数来确定指标权重。

设 $V_{i\mathrm{q}}=\langle c_{i\mathrm{q}},d_{i\mathrm{q}}\rangle,V_{ij}=\langle a_{ij},b_{ij}\rangle$，

$$r_{ij}(V_{i\mathrm{q}},V_{ij})=\frac{1}{2}(r_{ij}(c_{i\mathrm{q}},V_{ij})+r_{ij}(d_{i\mathrm{q}},V_{ij})),$$

其中
$$r_{ij}(x,V_{ij})=\begin{cases}\dfrac{2(x-a_{ij})}{b_{ij}-a_{ij}}, & x\leqslant\dfrac{a_{ij}+b_{ij}}{2}\\[2ex] \dfrac{2(b_{ij}-x)}{b_{ij}-a_{ij}}, & x\geqslant\dfrac{a_{ij}+b_{ij}}{2}\end{cases}$$

$$i=1,2,\cdots,n,\quad j=1,2,\cdots,m,\tag{1}$$

则
$$r_{ij_{\max}}(V_{iq},V_{ij_{\max}})=\max_{j}\{r_{ij}(V_{iq},V_{ij})\}。\tag{2}$$

如果指标 i 的数据落入的类别越大,该指标应赋以越大的权重,则取

$$r_i=\begin{cases}j_{\max}\times(1+r_{ij_{\max}}(V_{iq},V_{ij_{\max}})),\\ \qquad 当\ r_{ij_{\max}}(V_{iq},V_{ij_{\max}})\geqslant-0.5\ 时;\\ j_{\max}\times 0.5,\\ \qquad 当\ r_{ij_{\max}}(V_{iq},V_{ij_{\max}})<-0.5\ 时。\end{cases}\tag{3}$$

如果指标 i 的数据落入的类别越大,该指标应赋以越小的权重,则取

$$r_i=\begin{cases}(m-j_{\max}+1)\times(1+r_{ij_{\max}}(V_{iq},V_{ij_{\max}})),\\ \qquad 当\ r_{ij_{\max}}(V_{iq},V_{ij_{\max}})\geqslant-0.5\ 时;\\ (m-j_{\max}+1)\times 0.5,\\ \qquad 当\ r_{ij_{\max}}(V_{iq},V_{ij_{\max}})<-0.5\ 时。\end{cases}\tag{4}$$

指标的权重为

$$\alpha_i=r_i\Big/\sum_{i=1}^{n}r_i。\tag{5}$$

5　实例计算

为了便于比较，本文仍引用文献 [1, 8] 中的同一实例，即汾河上游、中游、下游 3 个断面的水质评价。文献 [8] 用的是灰关联评价方法。文献 [1] 用的是可拓评价方法。

文献 [8] 将水质标准取为一个定值，带有一定的局限性，也不符合标准实际。文献 [1] 弥补了这一缺陷，将水质标准取为一个区间。汾河上游的兰村、中游的石滩和下游的河津 3 个断面设立了水质监测站，1981—1984 年每年分别在丰水期、平水期、枯水期取样监测。文献 [1, 8] 中，待评物元的量值取为各断面实测元素浓度的平均值，该平均值只能反映监测数据的一个数字特征，就像水质标准取为一个定值一样，不能很好地反映其实际问题。本文将待评物元的量值取为各断面实测元素浓度的区间值。

待评同征物元体为：

$$R=\begin{bmatrix} q & 兰村 & 石滩 & 河津\\ \mathrm{DO} & \langle 9.1,\ 9.5\rangle & \langle 8.2,\ 8.8\rangle & \langle 6.4,\ 6.7\rangle\\ \mathrm{BOD} & \langle 1,\ 1.5\rangle & \langle 3.9,\ 4.45\rangle & \langle 7,\ 7.5\rangle\\ 酚 & \langle 0.000\,8,\ 0.003\rangle & \langle 0.006,\ 0.008\rangle & \langle 0.01,\ 0.02\rangle\\ \mathrm{CN^-} & \langle 0.000\,9,\ 0.001\,5\rangle & \langle 0.002,\ 0.004\rangle & \langle 0.008,\ 0.009\rangle\\ \mathrm{Hg} & \langle 0.000\,7,\ 0.000\,89\rangle & \langle 0.000\,5,\ 0.000\,7\rangle & \langle 0.000\,45,\ 0.000\,55\rangle\\ \mathrm{As} & \langle 0.002,\ 0.004\rangle & \langle 0.068,\ 0.076\rangle & \langle 0.038,\ 0.045\rangle\\ \mathrm{Cr^{+6}} & \langle 0.005\,5,\ 0.006\,8\rangle & \langle 0.01,\ 0.02\rangle & \langle 0.000\,65,\ 0.000\,78\rangle \end{bmatrix}$$

水质标准取为五级，其同证物元体为：

$$R_0=\begin{bmatrix} N & 1\,级 & 2\,级 & 3\,级 & 4\,级 & 5\,级\\ \mathrm{DO} & \langle 9,\ 10\rangle & \langle 6,\ 9\rangle & \langle 5,\ 6\rangle & \langle 3,\ 5\rangle & \langle 2,\ 3\rangle\\ \mathrm{BOD} & \langle 1,\ 3\rangle & \langle 3,\ 4\rangle & \langle 4,\ 5\rangle & \langle 5,\ 6\rangle & \langle 6,\ 10\rangle\\ 酚 & \langle 0,\ 0.001\rangle & \langle 0.001,\ 0.002\rangle & \langle 0.002,\ 0.005\rangle & \langle 0.005,\ 0.01\rangle & \langle 0.01,\ 0.1\rangle\\ \mathrm{CN^-} & \langle 0,\ 0.005\rangle & \langle 0.005,\ 0.05\rangle & \langle 0.05,\ 0.2\rangle & \langle 0.05,\ 0.2\rangle & \langle 0.05,\ 0.2\rangle\\ \mathrm{Hg} & \langle 0,\ 0.000\,05\rangle & \langle 0,\ 0.000\,05\rangle & \langle 0.000\,05,\ 0.000\,1\rangle & \langle 0.000\,1,\ 0.001\rangle & \langle 0.001,\ 0.001\rangle\\ \mathrm{As} & \langle 0,\ 0.05\rangle & \langle 0,\ 0.05\rangle & \langle 0,\ 0.05\rangle & \langle 0.05,\ 0.1\rangle & \langle 0.05,\ 0.1\rangle\\ \mathrm{Cr^{+6}} & \langle 0,\ 0.01\rangle & \langle 0.01,\ 0.05\rangle & \langle 0.01,\ 0.05\rangle,\langle 0.01,\cdots 0.05\rangle & \langle 0.05,\ 0.1\rangle & \end{bmatrix}$$

全体水质等级的变化域物元为：

$$R_{\mathrm{P}}=(P,\ C,\ V_{\mathrm{P}})=\begin{bmatrix} P & \mathrm{DO} & \langle 1,\ 10\rangle\\ & \mathrm{BOD} & \langle 0,\ 10\rangle\\ & 酚 & \langle 0,\ 0.1\rangle\\ & \mathrm{CN^-} & \langle 0,\ 0.2\rangle\\ & \mathrm{Hg} & \langle 0,\ 0.001\rangle\\ & \mathrm{As} & \langle 0,\ 0.1\rangle\\ & \mathrm{Cr^{+6}} & \langle 0,\ 0.1\rangle \end{bmatrix}。$$

按式 (1), (2), (4), (5) 计算其权重为：

$$W_{7\times 3}=\begin{bmatrix} 0.20 & 0.20 & 0.19\\ 0.16 & 0.15 & 0.06\\ 0.07 & 0.12 & 0.04\\ 0.22 & 0.31 & 0.26\\ 0.04 & 0.07 & 0.07\\ 0.09 & 0.07 & 0.14\\ 0.23 & 0.09 & 0.25 \end{bmatrix}。$$

按评价方法步3、步4、步5中的计算公式计算，其评价结果见表1。

表1 区域水环境质量的区间可拓评价结果

Table 1 The interval extension assessment result of water environmental quality

$K_j(q)$	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	max	j_0	j^*
兰村	0.050	-0.452	-0.608	-0.718	-0.858	0.050	1	1.78
石滩	-0.228	-0.147	-0.498	-0.499	-0.588	-0.147	2	2.01
河津	-0.239	-0.133	-0.472	-0.485	-0.496	-0.133	2	1.68

表1中：N_1数据分别表示汾河上游、中游、下游3个断面水质属于1级的关联度；同理，N_2，N_3，N_4，N_5下面的数据分别表示3个断面水质属于对应2级、3级、4级与5级的关联度；j_0数据分别表示3个断面水质最大关联度所对应的级别；j^*数据分别表示3个断面水质的级别变量特征值。从表1可以看出，兰村水质属1级（$j_0=1$）偏2级（$j^*=1.78$），石滩水质属2级（$j_0=2$，$j^*=2.01$），河津水质属2级（$j_0=2$，$j^*=1.68$）。

文献[1]采用可拓评价方法，评价结果为：兰村水质属1级（$j_0=1$）偏2级（$j^*=1.76$），石滩水质属2级（$j_0=2$，$j^*=2.01$），河津水质属2级（$j_0=2$，$j^*=1.84$）。

文献[8]采用灰关联评价方法，评价结果为：兰村水质属1级（关联度为0.862），石滩水质属2级（关联度为0.538），河津水质属2级（关联度为0.627）。

从以上可以看出，本文区间可拓评价方法与文献[1，8]评价的结果是一致的。

6 结语

解决了水质等级标度为区间同时实测水质也为区间时进行水质评价的问题。所提供的方法简单、易行、合理，具有一定的实际意义，并对待评物元的量值为区间的问题都适用，具有普适性。

所给的权重公式是用简单关联函数构造的。该公式计算简单，易于应用。不过，从r_{ij}计算出r_i时要根据实际情况选择合理公式。

参考文献

[1] 胡宝清，王孝礼，夏 军. 区域水环境质量可拓评价方法的研究[A]. 水资源可持续管理问题研究与实践[M]. 武汉：武汉测绘科技大学出版社，1999. 152～156

[2] 胡宝清. 可拓评价方法在围岩稳定性分类中的应用[J]. 水利学报，2000，(2)：66～70

[3] 胡宝清，王孝礼，何娟娟. 区间上的可拓集及其关联函数[J]. 广东工业大学学报，2000，(2)：101～104

[4] 蔡 文. 可拓集合和不相容问题[J]. 科学探索学报，1983，(1)：83～97

[5] 蔡 文. 从物元分析到可拓学[M]. 北京：科学技术文献出版社，1995

[6] 蔡 文. 物元模型及其应用[M]. 北京：科学技术文献出版社，1994

[7] 蔡 文，杨春燕，林伟初. 可拓工程方法[M]. 北京：科学出版社，1997

[8] 夏 军. 区域水环境质量灰关联度评价方法的研究[J]，水文，1995，(2)：4～18

The Interval Extension Assessment Method of Water Environmental Quality and Its Application

Hu Baoqing

(*Wuhan University*, *Wuhan* 430072, *China*)

[**Abstract**] On the basis of IR distance this paper gives out IR extension assessment method and its application to water environmental quality assessment. This method solves assessment problems while quantity of assessed matter-element is an interval number produced by a variety of uncertainty.

[**Key words**] IR distance; IR correlative function; IR extension assessment