

# 不完全概率信息的车辆常用弹簧的 可靠性灵敏度设计

张义民<sup>1</sup>, 刘巧伶<sup>1</sup>, 闻邦椿<sup>2</sup>

(1. 吉林大学机械科学与工程学院, 长春 130025; 2. 东北大学机械工程与  
自动化学院, 沈阳 110004)

**[摘要]** 将可靠性设计理论与灵敏度分析方法相结合, 讨论了车辆常用弹簧的可靠性灵敏度设计问题, 提出了可靠性灵敏度设计的计算方法, 给出了可靠性灵敏度的变化规律, 研究了设计参数的改变对车辆常用弹簧可靠性的影响, 为车辆常用弹簧的可靠性设计提供了理论依据。

**[关键词]** 车辆常用弹簧; 可靠性设计; 灵敏度; 任意分布参数

**[中图分类号]** TH122; U463; TH135 **[文献标识码]** A **[文章编号]** 1009-1742(2004)01-0074-07

## 1 引言

可靠性是车辆产品使用过程中质量指标的重要反映, 是与产品的设计、制造和使用的各个阶段密切相关的, 所以每个阶段都应该为创造最经济的、具有可靠性水平的产品而努力<sup>[1-7]</sup>。车辆构件可靠性灵敏度设计, 就是在可靠性基础上进行车辆构件的灵敏度设计。事实上, 若某因素对车辆构件失效有较大的影响, 则在设计制造过程中就要严格加以控制, 使其变化较小, 以保证车辆构件具有足够的安全可靠性; 反之, 如果某因素的变异性对车辆构件可靠性的影响不显著, 则在进行可靠性设计时, 就可以把它当作确定量值处理, 以减少随机变量数。目前, 结构可靠性灵敏度计算方法已有了较大的发展<sup>[8-13]</sup>, 这些方法提供了有效的可靠性灵敏度的计算方法。笔者采用摄动方法、可靠性设计方法和灵敏度分析方法来讨论车辆常用弹簧的可靠性灵敏度设计问题。在基本随机变量的概率特性已知的前提下, 可以迅速准确地得到车辆常用弹簧的可靠性灵敏度设计信息。

## 2 可靠性分析的摄动方法

应用概率设计方法, 在计算中考虑设计变量的不确定因素, 规定基本设计准则, 以及建立设计变量交互作用模型等, 是可靠性设计方法所面临的问题。可靠性设计的摄动法可以准确地反映机械构件固有的可靠性, 给出可供实际计算的数学力学模型, 估计或预测构件在规定工作条件下的可靠性, 揭示构件可靠性设计的本质。

可靠性设计的一个目标是计算可靠度:

$$R = \int_{g(\mathbf{X}) > 0} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}) d\mathbf{X}, \quad (1)$$

式中  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X})$  为基本随机参数向量  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$  的联合概率密度, 它们代表载荷、构件的特性等随机量。  $g(\mathbf{X})$  为状态函数, 可表示构件的两种状态:

$$\left. \begin{array}{ll} g(\mathbf{X}) \leq 0 & \text{为失效状态} \\ g(\mathbf{X}) > 0 & \text{为安全状态} \end{array} \right\}, \quad (2)$$

这里基本随机变量向量  $\mathbf{X}$  的均值  $E(\mathbf{X})$ 、方差  $\text{Var}(\mathbf{X})$ 、三阶矩  $C_3(\mathbf{X})$ 、四阶矩  $C_4(\mathbf{X})$  是已知的, 但是无法确定某些随机参数的分布概型。

**[收稿日期]** 2003-07-20; **[修回日期]** 2003-09-02

**[基金项目]** 国家自然科学基金资助项目(50175043)和吉林省自然科学基金资助项目

**[作者简介]** 张义民(1958-), 男, 吉林长春市人, 吉林大学教授, 博士生导师

把随机参数向量  $\mathbf{X}$  和状态函数  $g(\mathbf{X})$  表示为

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_d + \epsilon \mathbf{X}_p, \quad (3)$$

$$g(\mathbf{X}) = g_d(\mathbf{X}) + \epsilon g_p(\mathbf{X}), \quad (4)$$

这里  $\epsilon$  为一小参数，以  $d$  为下标的部分表示随机参数中的确定部分，以  $p$  为下标的部分表示随机参数中的随机部分，且具有零均值。显然这里要求随机部分要比确定部分小得多。对上面两式取数学期望，有

$$E(\mathbf{X}) = \bar{\mathbf{X}} = E(\mathbf{X}_d) + \epsilon E(\mathbf{X}_p) = \mathbf{X}_d, \quad (5)$$

$$\mu_g = E[g(\mathbf{X})] = \bar{g}(\mathbf{X}) =$$

$$E[g_d(\mathbf{X})] + \epsilon E[g_p(\mathbf{X})] = g_d(\mathbf{X}), \quad (6)$$

同理，对其取方差、三阶矩和四阶矩，根据 Kronecker 代数<sup>[14]</sup>及相应的随机分析理论，有

$$\text{Var}(\mathbf{X}) = E\{[\mathbf{X} - E(\mathbf{X})]^{\times 2}\} = \epsilon^2 [\mathbf{X}_p^{\times 2}], \quad (7a)$$

$$C_3(\mathbf{X}) = E\{[\mathbf{X} - E(\mathbf{X})]^{\times 3}\} = \epsilon^3 [\mathbf{X}_p^{\times 3}], \quad (7b)$$

$$C_4(\mathbf{X}) = E\{[\mathbf{X} - E(\mathbf{X})]^{\times 4}\} = \epsilon^4 [\mathbf{X}_p^{\times 4}], \quad (7c)$$

$$\text{Var}[g(\mathbf{X})] = E\{[g(\mathbf{X}) - E(g(\mathbf{X}))]^{\times 2}\} = \epsilon^2 E\{[g_p(\mathbf{X})]^{\times 2}\}, \quad (8a)$$

$$C_3[g(\mathbf{X})] = E\{[g(\mathbf{X}) - E(g(\mathbf{X}))]^{\times 3}\} = \epsilon^3 E\{[g_p(\mathbf{X})]^{\times 3}\}, \quad (8b)$$

$$C_4[g(\mathbf{X})] = E\{[g(\mathbf{X}) - E(g(\mathbf{X}))]^{\times 4}\} = \epsilon^4 E\{[g_p(\mathbf{X})]^{\times 4}\}, \quad (8c)$$

式中  $(\cdot)^{\times k} = (\cdot) \otimes (\cdot) \otimes \cdots \otimes (\cdot)$  为  $(\cdot)$  的 Kronecker 幂，符号  $\otimes$  代表 Kronecker 积，定义为  $(\mathbf{A})_{p \times q} \otimes (\mathbf{B})_{s \times t} = [a_{ij} \mathbf{B}]_{ps \times qt}$ 。

根据向量值和矩阵值函数的 Taylor 展开式，当随机参数的随机部分比其确定部分小得多时，可以把  $g_p(\mathbf{X})$  在  $E(\mathbf{X}) = \mathbf{X}_d$  附近展开到一阶为止，有

$$g_p(\mathbf{X}) = \frac{\partial g_d(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}^T} \mathbf{X}_p, \quad (9)$$

矩阵导数定义为

$$\partial(\mathbf{A})_{p \times q} / \partial(\mathbf{B})_{s \times t} = (\partial \mathbf{A} / \partial b_{ij})_{ps \times qt}.$$

把式 (9) 代入式 (8)，有

$$\sigma_g^2 = \text{Var}[g(\mathbf{X})] = \epsilon^2 E\left[\left(\frac{\partial g_d(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}^T}\right)^{\times 2} \mathbf{X}_p^{\times 2}\right] = \left(\frac{\partial g_d(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}^T}\right)^{\times 2} \text{Var}(\mathbf{X}), \quad (10a)$$

$$\theta_g = C_3[g(\mathbf{X})] = \epsilon^3 E\left[\left(\frac{\partial g_d(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}^T}\right)^{\times 3} \mathbf{X}_p^{\times 3}\right] =$$

$$\left(\frac{\partial g_d(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}^T}\right)^{\times 3} C_3(\mathbf{X}), \quad (10b)$$

$$\eta_g = C_4[g(\mathbf{X})] = \epsilon^4 E\left[\left(\frac{\partial g_d(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}^T}\right)^{\times 4} \mathbf{X}_p^{\times 4}\right] = \left(\frac{\partial g_d(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}^T}\right)^{\times 4} C_4(\mathbf{X}), \quad (10c)$$

式中  $\text{Var}(\mathbf{X})$ ,  $C_3(\mathbf{X})$ ,  $C_4(\mathbf{X})$  为基本随机参数的方差、三阶矩和四阶矩向量。

把状态函数  $g(\mathbf{X})$  对基本随机变量向量  $\mathbf{X}$  求偏导数，有

$$\frac{\partial g(\bar{\mathbf{X}})}{\partial \mathbf{X}^T} = \left[\frac{\partial g}{\partial X_1} \quad \frac{\partial g}{\partial X_2} \quad \cdots \quad \frac{\partial g}{\partial X_n}\right], \quad (11)$$

把式 (11) 代入式 (10)，可以得到状态函数的方差、三阶矩和四阶矩的表达式。

可靠性指标定义为

$$\beta = \frac{\mu_g}{\sigma_g} = \frac{E[g(\mathbf{X})]}{\sqrt{\text{Var}[g(\mathbf{X})]}}, \quad (12)$$

这样一方面可以利用可靠性指标直接衡量构件的可靠性，另一方面在基本随机参数向量  $\mathbf{X}$  服从正态分布时，可以用失效点处状态表面的切平面近似地模拟极限状态表面，获得可靠度的一阶估计量：

$$R = \Phi(\beta), \quad (13)$$

式中  $\Phi(\cdot)$  为标准正态分布函数。

众所周知，要计算可靠度或失效概率，需要知道概率密度函数或联合概率密度函数。但是由于缺少足够的试验数据，很难精确地确定设计参数的分布规律，并且在有些情况下，究竟采用何种分布，仁者见仁，智者见智。即使是近似地指定概率分布，在大多数情况下也很难进行积分计算获得可靠度或失效概率，而数值积分往往是不实用的。在机械零件可靠性设计实践中，在没有充分根据说明设计参数的分布是服从何种分布时，为了安全和简化计算，通常第一个选择就是假设它为正态分布。对于服从任意分布和无法确定分布概型的情况下，而有足够的资料来确定设计参数的前四阶矩（即均值、方差和协方差、三阶矩、四阶矩）时，作为可供选择的实用方法，可以采用摄动法求得可靠性指标，然后应用四阶矩技术和 Edgeworth 级数把未知的状态函数的概率分布展开成标准的正态分布的表达式，进而可以确定机械零件的可靠度和可靠性灵敏度。

根据 Edgeworth 级数方法，可以把服从任意分布的标准化了的随机变量的概率分布函数近似地展开成为标准正态分布函数，即

$$F(y) = \Phi(y) - \varphi(y) \left[ \frac{1}{6} \frac{\theta_g}{\sigma_g^3} H_2(y) + \frac{1}{24} \left( \frac{\eta_g}{\sigma_g^4} - 3 \right) H_3(y) + \frac{1}{72} \left( \frac{\theta_g}{\sigma_g^3} \right)^2 H_5(y) + \dots \right], \quad (14)$$

式中  $H_j(y)$  为  $j$  阶 Hermite 多项式, 其递推关系为

$$\begin{cases} H_{j+1}(y) = yH_j(y) - jH_{j-1}(y) \\ H_0(y) = 1, H_1(y) = y \end{cases}, \quad (15)$$

据此, 系统的可靠度为

$$R(\beta) = P[g(\mathbf{X}) > 0] = 1 - F(-\beta). \quad (16)$$

用上式计算可靠度时, 有时会出现  $R > 1$  的情况。当  $R > 1$  时, 采用下面的经验公式进行修正<sup>[15]</sup>:

$$R^* = R(\beta) - \left\{ \frac{R(\beta) - \Phi(\beta)}{[1 + (R(\beta) - \Phi(\beta))\beta]^\beta} \right\}. \quad (17)$$

Edgeworth 级数可以任意精确地逼近随机变量的真实分布, 但通常取级数的前 4 项即可得到较好的近似。在推导过程中, 对随机参数的分布概型和激励类型未作任何限制, 以便更接近于工程实际。

### 3 可靠性灵敏度设计

机械系统的可靠度对基本随机参数向量  $\mathbf{X}$  均值和方差的灵敏度为

$$\frac{dR}{d\bar{\mathbf{X}}^T} = \frac{\partial R(\beta)}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \mu_g} \frac{\partial \mu_g}{\partial \bar{\mathbf{X}}^T}, \quad (18)$$

$$\frac{dR}{d\text{Var}(\mathbf{X})} = \left[ \frac{\partial R(\beta)}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \sigma_g} + \frac{\partial R(\beta)}{\partial \sigma_g} \right] \frac{\partial \sigma_g}{\partial \text{Var}(\mathbf{X})}, \quad (19)$$

式中

$$\begin{aligned} \frac{\partial R(\beta)}{\partial \beta} = \varphi(-\beta) & \left\{ 1 - \beta \left[ \frac{1}{6} \frac{\theta_g}{\sigma_g^3} H_2(-\beta) + \frac{1}{24} \left( \frac{\eta_g}{\sigma_g^4} - 3 \right) H_3(-\beta) + \frac{1}{72} \left( \frac{\theta_g}{\sigma_g^3} \right)^2 H_5(-\beta) \right] - \left[ \frac{1}{3} \frac{\theta_g}{\sigma_g^3} H_1(-\beta) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{8} \left( \frac{\eta_g}{\sigma_g^4} - 3 \right) H_2(-\beta) + \frac{5}{72} \left( \frac{\theta_g}{\sigma_g^3} \right)^2 H_4(-\beta) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial \mu_g} = \frac{1}{\sigma_g}, \quad (21)$$

$$\frac{\partial \mu_g}{\partial \mathbf{X}^T} = \left[ \frac{\partial \bar{g}}{\partial X_1} \frac{\partial \bar{g}}{\partial X_2} \dots \frac{\partial \bar{g}}{\partial X_n} \right], \quad (22)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial \sigma_g} = -\frac{\mu_g}{\sigma_g^2}, \quad (23)$$

$$\frac{\partial R(\beta)}{\partial \sigma_g} = \varphi(-\beta) \left[ \frac{1}{2} \frac{\theta_g}{\sigma_g^4} H_2(-\beta) + \frac{1}{6} \frac{\eta_g}{\sigma_g^5} H_3(-\beta) + \frac{1}{12} \frac{\theta_g^2}{\sigma_g^7} H_5(-\beta) \right], \quad (24)$$

$$\frac{\partial \sigma_g}{\partial \text{Var}(\mathbf{X})} = \frac{1}{2\sigma_g} \left[ \frac{\partial \bar{g}}{\partial \mathbf{X}} \otimes \frac{\partial \bar{g}}{\partial \mathbf{X}} \right]. \quad (25)$$

把已知条件和可靠性分析的计算结果代入式 (18) 和式 (19), 即可获得可靠性灵敏度  $dR/d\bar{\mathbf{X}}^T$  和  $dR/d\text{Var}(\mathbf{X})$ 。

当应用 Edgeworth 级数估算系统的可靠度出现  $R > 1$  情况时, 根据计算实践, 采用式 (17) 比使用 Edgeworth 级数能获得更接近于 Monte Carlo 数值模拟的结果, 而所得的分布函数曲线在  $[0, 1]$  范围内也是单调的。可见, 当  $R > 1$  时, 应用经验修正公式的导数来计算系统的可靠性灵敏度, 比使用式 (18) 和式 (19) 的结果更加精确 (式 (18) 和式 (19) 所计算的结果有时是不正确的)。当出现  $R > 1$  情况时, 可靠性指标  $\beta$  的灵敏度为

$$\begin{aligned} \frac{\partial R^*}{\partial \beta} = \frac{\partial R(\beta)}{\partial \beta} + \left[ \frac{\partial R(\beta)}{\partial \beta} - \varphi(\beta) \right] & \cdot \\ \frac{\beta(\beta-1)[R(\beta) - \Phi(\beta)] - 1}{\{1 + [R(\beta) - \Phi(\beta)]\beta\}^{\beta+1}} + & \\ \frac{[R(\beta) - \Phi(\beta)](\{1 + [R(\beta) - \Phi(\beta)]\beta\} \ln |1 + [R(\beta) - \Phi(\beta)]\beta| - 1)}{\{1 + [R(\beta) - \Phi(\beta)]\beta\}^{\beta+1}} & \rightarrow \\ \leftarrow \frac{[R(\beta) - \Phi(\beta)]\beta + [R(\beta) - \Phi(\beta)]\beta}{\Phi(\beta)\beta^{\beta+1}}, & \end{aligned} \quad (26)$$

用上式替换式 (18) 和式 (19) 中的  $\partial R(\beta)/\partial \beta$ , 即获得可靠性灵敏度  $dR/d\mu_r$  和  $dR/d\sigma_r$ 。

## 4 车辆常用弹簧的力学模型

### 4.1 扭杆的力学模型

扭杆弹簧 (图 1), 是由一根弹簧钢制成的杆。杆的断面通常为圆形, 少数为管形、矩形或由片状组合, 其两端形状可以是花键、方形、六角形或带平面的圆柱形等, 以便一端固定在车架上, 另一端固定在悬架的摆臂上并与车轮相连。

对于圆形和管形截面的扭杆, 它所受的扭转应力为

$$\tau = \frac{16DT}{\pi(D^4 - d^4)}, \quad (27)$$

式中  $T$  为扭矩,  $D$  为管形截面外径,  $d$  为管形截面内径 (圆柱形截面  $d=0$ )。

根据应力-强度干涉理论, 以应力极限状态表

示的状态方程为

$$g(\mathbf{X}) = r - \tau, \quad (28)$$

式中  $r$  为扭杆的材料强度, 基本随机变量向量  $\mathbf{X} = (r \ T \ D \ d)^T$ 。这里  $\mathbf{X}$  的均值  $E(\mathbf{X})$ 、方差  $\text{Var}(\mathbf{X})$ 、三阶矩  $C_3(\mathbf{X})$ 、四阶矩  $C_4(\mathbf{X})$  是已知的, 可以认为基本随机变量是相互独立的, 但无法确定基本随机变量向量中  $\mathbf{X}$  的某些变量的分布概型。

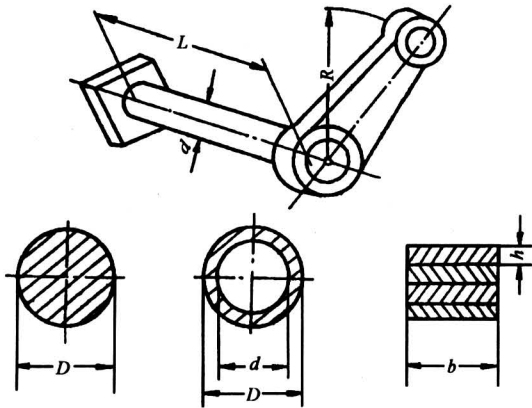


图 1 扭杆弹簧

Fig.1 Torsion bar

#### 4.2 螺旋弹簧的力学模型

螺旋弹簧(图 2)是用弹簧钢棒料卷制成螺旋状的一种弹簧, 可做成等螺距或变螺距。前者刚度不变, 后者刚度是可变的。

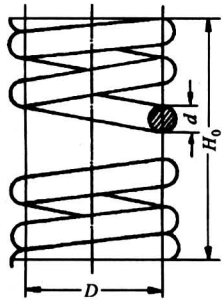


图 2 螺旋弹簧

Fig.2 Coil spring

弹簧中的最大切应力发生在簧丝内侧, 即

$$\tau = \frac{(1 + d/2D)dGy}{\pi D^2 n}, \quad (29)$$

式中  $d$  为棒料簧丝直径,  $D$  为弹簧中径,  $G$  为弹簧材料的剪切弹性模量,  $n$  为弹簧的有效圈数,  $y$  为弹簧的变形量。

根据应力-强度干涉理论, 以应力极限状态表示的状态方程为

$$g(\mathbf{X}) = r - \tau, \quad (30)$$

式中  $r$  为弹簧的材料强度, 基本随机参数向量  $\mathbf{X} = (r \ d \ D \ G \ n \ y)^T$ 。这里  $\mathbf{X}$  的均值  $E(\mathbf{X})$ 、方差  $\text{Var}(\mathbf{X})$ 、三阶矩  $C_3(\mathbf{X})$ 、四阶矩  $C_4(\mathbf{X})$  是已知的, 可以认为基本随机变量是相互独立的, 如同扭杆弹簧, 无法确定基本随机变量向量中  $\mathbf{X}$  的某些变量的分布概型。

#### 4.3 钢板弹簧的力学模型

车辆的多片钢板弹簧多半为中心受载的简支叠板弹簧。如图 3 所示按一定宽度  $b$  将其截开重叠使用。在计算钢板弹簧垂直方向载荷时, 通常采用所谓等应力梁计算公式, 工作应力的实用公式为

$$\sigma_i = \frac{3Pl}{2b} \frac{h_i}{n_1 h_1^3 + n_2 h_2^3 + \dots + n_m h_m^3}, \quad (31)$$

应力在最厚板上的最大值为

$$\sigma_{\max} = \frac{3Pl}{2b} \frac{h_{\max}}{n_1 h_1^3 + n_2 h_2^3 + \dots + n_m h_m^3}, \quad (32)$$

式中  $P$  为载荷; 几何尺寸宽度、厚度和跨距分别为  $b$ ,  $h_i$  和  $l$ ;  $n_i$  是板厚度为  $h_i$  的钢板片数。严格地说, 应考虑叠板之间的摩擦对工作应力的影响, 不过采用这种近似设计方法还是允许的。在汽车、电车等车辆钢板弹簧的设计中, 多采用这种方法。

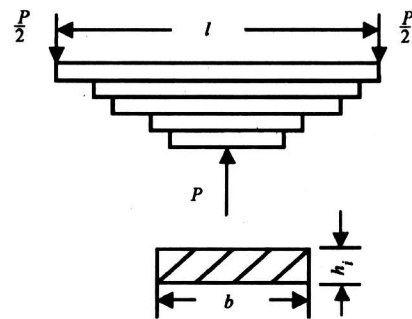


图 3 钢板弹簧

Fig.3 Multi-leaf spring

根据应力-强度干涉理论, 以应力极限状态表示的状态方程为

$$g(\mathbf{X}) = r - \sigma_{\max}, \quad (33)$$

式中  $r$  为钢板弹簧的材料强度, 基本随机变量向量  $\mathbf{X} = (r \ P \ l \ b \ h_1 \ h_2 \ \dots \ h_m)^T$ 。这里  $\mathbf{X}$  的均值  $E(\mathbf{X})$ 、方差  $\text{Var}(\mathbf{X})$ 、三阶矩  $C_3(\mathbf{X})$ 、四阶矩  $C_4(\mathbf{X})$  是已知的, 可以认为基本随机变量是相互独立的, 但是无法确定基本随机变量向量中  $\mathbf{X}$  的某些变量的分布概型。

## 5 数值算例

例1 某型机械的扭杆为管形截面, 一般情况下, 在工程实际中构件的几何尺寸和材料的强度极限是服从正态分布的随机变量, 其危险截面的均值和标准差为: 内径  $d = (25, 0.125)$  mm, 外径  $D = (30, 0.15)$  mm; 扭矩服从任意分布的随机变量, 前四阶矩为  $T = (6.7087 \times 10^5 \text{ N} \cdot \text{mm}, 8.8249 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{mm}, 7.8292 \times 10^{11} (\text{N} \cdot \text{mm})^3, 3.274 \times 10^{16} (\text{N} \cdot \text{mm})^4)$ ; 要求工作循环次数  $N \geq 4000$ , 材料的疲劳极限服从任意分布的随机变量, 其前四阶矩为  $r = (680.0173 \text{ MPa}, 94.7136 \text{ MPa}, -4.7941 \times 10^5 \text{ MPa}^3, 2.724 \times 10^8 \text{ MPa}^4)$ 。

计算得到该扭杆的可靠性指标、可靠度和可靠性灵敏度分别为

$$\beta = 4.57408, R_E = 0.9999099, \\ R_{\text{MCS}} = 0.99988, \quad (34)$$

$$dR/d\bar{\mathbf{X}}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial R}{\partial \bar{r}} & \frac{\partial R}{\partial \bar{T}} & \frac{\partial R}{\partial \bar{D}} & \frac{\partial R}{\partial \bar{d}} \end{bmatrix} = \\ \begin{bmatrix} 3.327 \times 10^{-6} \\ -1.212 \times 10^{-9} \\ 1.823 \times 10^{-4} \\ -1.212 \times 10^{-4} \end{bmatrix}^T, \quad (35)$$

$$dR/d\text{Var}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} R_{\text{Var}(r)} \\ R_{\text{Cov}(r,T)} \\ R_{\text{Cov}(r,D)} \\ R_{\text{Cov}(r,d)} \\ R_{\text{Cov}(T,r)} \\ R_{\text{Var}(T)} \\ R_{\text{Cov}(T,D)} \\ R_{\text{Cov}(T,d)} \\ R_{\text{Cov}(D,r)} \\ R_{\text{Cov}(D,T)} \\ R_{\text{Var}(D)} \\ R_{\text{Cov}(D,d)} \\ R_{\text{Cov}(d,r)} \\ R_{\text{Cov}(d,T)} \\ R_{\text{Cov}(d,D)} \\ R_{\text{Var}(d)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.429 \times 10^{-7} \\ 5.208 \times 10^{-11} \\ -7.833 \times 10^{-6} \\ 5.207 \times 10^{-6} \\ 5.208 \times 10^{-11} \\ -1.897 \times 10^{-14} \\ 2.854 \times 10^{-9} \\ -1.897 \times 10^{-9} \\ -7.833 \times 10^{-6} \\ 2.854 \times 10^{-9} \\ -4.292 \times 10^{-4} \\ 2.853 \times 10^{-4} \\ 5.207 \times 10^{-6} \\ -1.897 \times 10^{-9} \\ 2.853 \times 10^{-4} \\ -1.897 \times 10^{-4} \end{bmatrix}, \quad (36)$$

式(34)至式(36)中,  $R_E$  为使用 Edgeworth 级数计算的可靠度,  $R_{\text{MCS}}$  为应用 Monte Carlo 数值技术模拟车辆构件的可靠度,  $R_{(\cdot)}$  表示可靠度  $R$  对  $(\cdot)$  的灵敏度。

从灵敏度矩阵  $dR/d\bar{\mathbf{X}}^T$  可以看出, 扭杆的材料强度  $r$  和管形截面外径  $D$  均值的增加, 其结果将使扭杆趋于更加可靠; 而扭杆承受的载荷  $P$  和管形截面内径  $d$  均值的增加, 其结果将使扭杆趋于更加不可靠(失效)。变化率最大的是扭杆的几何尺寸, 最小的是载荷, 也就是说, 几何尺寸变化比材料强度变化更容易使扭杆趋向可靠(或失效); 材料强度变化比载荷变化更容易使扭杆趋向可靠(失效)。从灵敏度矩阵  $dR/d\text{Var}(\mathbf{X})$  可以看出, 基本随机参数方差的增加, 都会使扭杆趋于更加不可靠(失效), 但基本随机参数协方差的变化对扭杆可靠与否的影响却不尽相同。

例2 某型弹簧的几何尺寸和材料特性的均值和标准差分别为  $d = (6.0, 0.03)$  mm,  $D = (35.0, 0.175)$  mm,  $G = (79380.0, 3969.0)$  MPa,  $n = (8, 0.0833)$  圈; 弹簧的材料强度  $r$  取为弹簧的疲劳极限, 其前四阶矩分别为  $r = (524.1855 \text{ MPa}, 72.8453 \text{ MPa}, -2.1176 \times 10^5 \text{ MPa}^3, 9.4475 \times 10^7 \text{ MPa}^4)$ ; 变形量为服从任意分布的随机变量, 其前四阶矩为  $y = (11.5884 \text{ mm}, 0.2006 \text{ mm}, 9.2 \times 10^{-3} \text{ mm}^3, 8.7 \times 10^{-3} \text{ mm}^4)$ 。这里认为弹簧的变形量是在最大载荷(并圈时载荷)的情况下产生的。

计算得到弹簧的可靠性指标、可靠度和可靠性灵敏度分别为

$$\beta = 4.475561, R_E = 0.9998866, \\ R_{\text{MCS}} = 0.99985, \quad (37)$$

$$dR/d\bar{\mathbf{X}}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial R}{\partial \bar{r}} & \frac{\partial R}{\partial \bar{d}_1} & \frac{\partial R}{\partial \bar{d}} & \frac{\partial R}{\partial \bar{D}} & \frac{\partial R}{\partial \bar{G}} & \frac{\partial R}{\partial \bar{N}} & \frac{\partial R}{\partial \bar{\delta}} \end{bmatrix} = \\ \begin{bmatrix} 5.242 \times 10^{-6} \\ -1.835 \times 10^{-4} \\ 6.060 \times 10^{-5} \\ -1.285 \times 10^{-8} \\ 1.275 \times 10^{-4} \\ -8.804 \times 10^{-5} \end{bmatrix}^T, \quad (38)$$

$$dR/d\text{Var}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} R_{\text{Var}(r)} \\ R_{\text{Cov}(r,d)} \\ R_{\text{Cov}(r,D)} \\ R_{\text{Cov}(r,G)} \\ R_{\text{Cov}(r,n)} \\ R_{\text{Cov}(r,y)} \\ R_{\text{Cov}(d,r)} \\ R_{\text{Var}(d)} \\ R_{\text{Cov}(d,D)} \\ R_{\text{Cov}(d,G)} \\ R_{\text{Cov}(d,n)} \\ R_{\text{Cov}(d,y)} \\ R_{\text{Cov}(D,r)} \\ R_{\text{Cov}(D,d)} \\ R_{\text{Var}(D)} \\ R_{\text{Cov}(D,G)} \\ R_{\text{Cov}(D,n)} \\ R_{\text{Cov}(D,y)} \\ R_{\text{Cov}(G,r)} \\ R_{\text{Cov}(G,d)} \\ R_{\text{Cov}(G,D)} \\ R_{\text{Var}(G)} \\ R_{\text{Cov}(G,n)} \\ R_{\text{Cov}(G,y)} \\ R_{\text{Cov}(n,r)} \\ R_{\text{Cov}(n,d)} \\ R_{\text{Cov}(n,D)} \\ R_{\text{Cov}(n,G)} \\ R_{\text{Var}(n)} \\ R_{\text{Cov}(n,y)} \\ R_{\text{Cov}(y,r)} \\ R_{\text{Cov}(y,d)} \\ R_{\text{Cov}(y,D)} \\ R_{\text{Cov}(y,G)} \\ R_{\text{Cov}(y,n)} \\ R_{\text{Var}(y)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.027 \times 10^{-7} \\ 1.059 \times 10^{-5} \\ -3.499 \times 10^{-6} \\ 7.421 \times 10^{-10} \\ -7.364 \times 10^{-6} \\ 5.083 \times 10^{-6} \\ 1.059 \times 10^{-5} \\ -3.708 \times 10^{-4} \\ 1.225 \times 10^{-4} \\ -2.597 \times 10^{-8} \\ 2.577 \times 10^{-4} \\ -1.779 \times 10^{-4} \\ -3.499 \times 10^{-6} \\ 1.225 \times 10^{-4} \\ -4.045 \times 10^{-5} \\ 8.580 \times 10^{-9} \\ -8.513 \times 10^{-5} \\ 5.877 \times 10^{-5} \\ 7.421 \times 10^{-10} \\ -2.597 \times 10^{-8} \\ 8.580 \times 10^{-9} \\ -1.820 \times 10^{-12} \\ 1.806 \times 10^{-8} \\ -1.246 \times 10^{-8} \\ -7.364 \times 10^{-6} \\ 2.577 \times 10^{-4} \\ -8.513 \times 10^{-5} \\ 1.806 \times 10^{-8} \\ -1.792 \times 10^{-4} \\ 1.237 \times 10^{-4} \\ 5.083 \times 10^{-6} \\ -1.779 \times 10^{-4} \\ 5.877 \times 10^{-5} \\ -1.246 \times 10^{-8} \\ 1.237 \times 10^{-4} \\ -8.538 \times 10^{-5} \end{bmatrix}, \quad (39)$$

数值计算结果为工程设计人员精确设计车辆构件提供了定量的依据，计算结果与通常的定性分析结果完全一致，进一步说明灵敏度矩阵对车辆构件各因素分析的正确性。可见在车辆构件的设计、制造、使用和评估中，要严格控制敏感参数的变化。

例 3 国产某型汽车钢板弹簧几何尺寸的均值和标准差分别为  $b = (90, 0.45) \text{ mm}$ ,  $l = (1475.5, 7.375) \text{ mm}$ ,  $h_1 = (11, 0.055) \text{ mm}$ ,  $h_2 = (10, 0.05) \text{ mm}$ ,  $h_3 = (9, 0.045) \text{ mm}$ ; 钢板弹簧片数  $n_1 = 2, n_2 = 6, n_3 = 4$ ; 材料强度的均值和标准差为  $r = (614, 45.8) \text{ MPa}$ ; 载荷为服从任意分布的随机变量，其前四阶矩为  $P = (1.6567 \times 10^4 \text{ N}, 8.2516 \times 10^2 \text{ N}, 6.7288 \times$

$10^8 \text{ N}^3, 2.6608 \times 10^{12} \text{ N}^4)$ 。

计算得到该钢板弹簧的可靠性指标、可靠度和可靠性灵敏度分别为

$$\beta = 4.546041, RE = 1.000026, R^* = 0.9999973, R_{\text{MCS}} = 0.99998, \quad (40)$$

$$dR/d\bar{\mathbf{X}}^T = \left[ \frac{\partial R}{\partial \bar{r}} \quad \frac{\partial R}{\partial \bar{P}} \quad \frac{\partial R}{\partial \bar{l}} \quad \frac{\partial R}{\partial \bar{b}} \quad \frac{\partial R}{\partial \bar{h}_{\text{max}}} \right] = \begin{bmatrix} 2.576 \times 10^{-7} \\ -6.018 \times 10^{-9} \\ -6.757 \times 10^{-8} \\ 1.108 \times 10^{-6} \\ 1.813 \times 10^{-5} \end{bmatrix}, \quad (41)$$

$$dR/d\text{Var}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} R_{\text{Var}(r)} \\ R_{\text{Cov}(r,P)} \\ R_{\text{Cov}(r,l)} \\ R_{\text{Cov}(r,b)} \\ R_{\text{Cov}(r,h_{\text{max}})} \\ R_{\text{Cov}(P,r)} \\ R_{\text{Var}(P)} \\ R_{\text{Cov}(P,l)} \\ R_{\text{Cov}(P,b)} \\ R_{\text{Cov}(P,h_{\text{max}})} \\ R_{\text{Cov}(l,r)} \\ R_{\text{Cov}(l,P)} \\ R_{\text{Var}(l)} \\ R_{\text{Cov}(l,b)} \\ R_{\text{Cov}(l,h_{\text{max}})} \\ R_{\text{Cov}(b,r)} \\ R_{\text{Cov}(b,P)} \\ R_{\text{Cov}(b,l)} \\ R_{\text{Var}(b)} \\ R_{\text{Cov}(b,h_{\text{max}})} \\ R_{\text{Cov}(h_{\text{max}},r)} \\ R_{\text{Cov}(h_{\text{max}},P)} \\ R_{\text{Cov}(h_{\text{max}},l)} \\ R_{\text{Cov}(h_{\text{max}},b)} \\ R_{\text{Var}(h_{\text{max}})} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9.317 \times 10^{-8} \\ 2.177 \times 10^{-9} \\ 2.444 \times 10^{-8} \\ -4.007 \times 10^{-7} \\ -6.557 \times 10^{-6} \\ 2.177 \times 10^{-9} \\ -5.086 \times 10^{-11} \\ -5.710 \times 10^{-10} \\ 9.362 \times 10^{-9} \\ 1.532 \times 10^{-7} \\ 2.444 \times 10^{-8} \\ -5.710 \times 10^{-10} \\ -6.412 \times 10^{-9} \\ 1.051 \times 10^{-7} \\ 1.720 \times 10^{-6} \\ -4.007 \times 10^{-7} \\ 9.362 \times 10^{-9} \\ 1.051 \times 10^{-7} \\ -1.723 \times 10^{-6} \\ -2.820 \times 10^{-5} \\ -6.557 \times 10^{-6} \\ 1.532 \times 10^{-7} \\ 1.720 \times 10^{-6} \\ -2.820 \times 10^{-5} \\ -4.615 \times 10^{-4} \end{bmatrix}, \quad (42)$$

式 (40) 中  $R^*$  为采用 Edgeworth 级数的经验修正公式计算的可靠度。

从灵敏度矩阵  $dR/d\bar{\mathbf{X}}^T$  可以看出，钢板弹簧的材料强度  $r$  与截面几何尺寸  $b$  和  $h_i (h_{\text{max}})$  均值的增加，其结果将使钢板弹簧趋于更加可靠，而钢板弹簧承受的载荷  $P$  和几何尺寸  $l$  均值的增加，其结果将使钢板弹簧趋于更加不可靠（失效），变化率最大的是钢板弹簧的几何尺寸，最小的为载荷，也就是说，几何尺寸变化比材料强度变化更容易使



钢板弹簧趋向可靠(或失效);材料强度变化比载荷变化更容易使钢板弹簧趋向可靠(或失效)。从灵敏度矩阵  $dR/d\text{Var}(\mathbf{X})$  可以看出,基本随机参数方差的增加,都会使钢板弹簧趋于更加不可靠(失效),但基本随机参数协方差的变化对钢板弹簧可靠与否的影响却不尽相同。这里给出了不同厚度的多片钢板弹簧可靠性灵敏度设计的一种实用有效的方法,具有计算不同厚度的多片钢板弹簧的可靠度和可靠性灵敏度设计的特色。

## 6 结语

在车辆常用弹簧可靠性研究的基础上,笔者提出一种计算车辆常用弹簧可靠性灵敏度的数值方法,有效地反映了车辆常用弹簧各因素对其失效的影响程度。该方法在随机参数前四阶矩已知的情况下,放宽了对随机参数概率分布类型的限制,使之更接近于工程实际中车辆常用弹簧的可靠性问题,为修订车辆常用弹簧的可靠性标准提供了理论依据。因此,该方法是对机械行业产品进行可靠性灵敏度设计的通用的、实用的和有效的方法。

### 参考文献

- [1] 张义民. 汽车零部件可靠性设计[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 2000
- [2] Zhang Y M, Chen S H, Liu Q L, et al. Stochastic perturbation finite elements [J]. Computers & Structures, 1996, 59(3): 425~429
- [3] Zhang Y M, Wen B C, Chen S H. PFEM formalism in Kronecker notation [J]. Mathematics and Mechanics of Solids, 1996, 1(4): 445~461
- [4] Zhang Y M, Liu Q L, Wen B C. Quasi-failure analysis on resonant demolition of random structural systems [J]. AIAA Journal, 2002, 40(3): 585~586
- [5] Zhang Y M, Liu Q L. Reliability-based design of automobile components [J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part D, Journal of Automobile Engineering, 2002, 216(D6): 455~471
- [6] 张义民, 贺向东, 闻邦椿. 螺旋管簧的可靠性优化设计 [J]. 中国工程科学, 2002, 4(5): 71~74
- [7] 张义民, 王 顺, 刘巧伶, 等. 具有相关失效模式的多自由度非线性随机结构振动系统的可靠性分析 [J]. 中国科学(E辑), 2003, 33(9): 1~9
- [8] Madsen H O, Krenk S, Lind N C. Methods of Structural Safety [M]. Prentice Hall, Inc, Englewood Cliffs, N J, 1986
- [9] Hohenbichler M, Rackwitz R. Sensitivity and importance measures in structural reliability [J]. Civil Engineering Systems, 1986, 3(4): 203~209
- [10] Bjerager P, Krenk S. Parametric sensitivity in first order reliability analysis [J]. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 1989, 115(7): 1577~1582
- [11] Zhang Y M, Wen B C, Liu Q L. Reliability sensitivity for rotor-stator systems with rubbing [J]. Journal of Sound and Vibration, 2003, 259(5): 1095~1107
- [12] 张义民, 刘巧伶, 闻邦椿. 单自由度非线性随机参数振动系统的可靠性灵敏度分析 [J]. 固体力学学报, 2003, 24(1): 61~67
- [13] 张义民, 刘巧伶, 闻邦椿. 非线性随机系统的独立失效模式可靠性灵敏度 [J]. 力学学报, 2003, 35(1): 117~120
- [14] Vetter W J. Matrix calculus operations and Taylor expansions [J]. SIAM Review, 1973, 15: 352~369
- [15] Zhang Y M, Wen B C, Liu Q L. First passage of uncertain single degree-of-freedom nonlinear oscillators [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1998, 165(4): 223~231

## Reliability Sensitivity Design of Vehicle Familiar Spring

Zhang Yimin<sup>1</sup>, Liu Qiaoling<sup>1</sup>, Wen Bangchun<sup>2</sup>

(1. College of Mechanical Science and Engineering, Jilin University, Changchun 130025, China;

2. School of Mechanical Engineering and Automation, Northeastern University, Shenyang 110004, China)

[Abstract] Based on the reliability design theory and sensitivity analysis method, the reliability sensitivity of the familiar spring for vehicles is extensively discussed and a numerical method for reliability sensitivity design is presented. The variation regularities of reliability sensitivity are obtained and the effects of design parameters on reliability of the familiar spring for vehicles are studied. The method presented in this paper provides the theoretic basis for the reliability design of the vehicle familiar spring.

[Key words] vehicle familiar spring; reliability design; sensitivity; arbitrary distribution parameters