

# 下降敲入续租期权定价研究

吴云<sup>1</sup>, 何建敏<sup>2</sup>

(1. 江苏金融租赁有限公司, 南京 210018; 2. 东南大学经济管理学院, 南京 210009)

**[摘要]** 阐述了现代租赁的基本内涵和实物期权的基本原理, 提出了下降敲入续租期权定价模型及其定价求解, 最后给出了算例分析。

**[关键词]** 租赁; 续租; 租赁期权; 实物期权; 下降敲入期权

**[中图分类号]** F830.9 **[文献标识码]** A **[文章编号]** 1009-1742(2004)12-0047-04

## 1 现代租赁的基本内涵<sup>[1]</sup>

现代租赁作为一种新型交易方式; 在经济生活中发挥着越来越重要的作用, 也为社会投资提供了一个新的领域。现代租赁是一种将“融资”与“融物”结合为一体的新型融资手段、投资方式和贸易方式; 作为一种特殊的信用形式, 成为连接金融、贸易和工业生产的桥梁。现代租赁自20世纪50年代在美国诞生以来, 作为一种融资创新、贸易创新在全世界获得了年均13%的增长速度, 成为与银行、证券、保险、信托并驾齐驱的行业, 是仅次于银行信贷的第二大融资方式, 被誉为“朝阳产业”。有关资料显示: 20世纪末期, 美国的租赁渗透率为30%, 英国为18%; 目前美国有80%以上的企业采用租赁设备的方法节省投资资金, 日本千人以上的大中型企业100%利用租赁。由此可见, 现代租赁业在发达国家的国民经济发展中处于举足轻重的地位, 并日益成为新兴的支柱产业之一。

现代租赁有以下突出的功能:

1) 杠杆功能。现代租赁是支持企业技术改造、促进企业调整产品方向、加速企业产品更新换代的有效措施, 也是促进资源的优化配置的有效途径。

2) 投融资功能。现代租赁业务是一种以实物

为载体的融资方式, 金融租赁公司按承租人的选择购买指定的资产设备, 随后将使用权转移给承租人。承租人通过租赁“借鸡生蛋”, 扩大固定资产投资。同时金融租赁公司作为金融机构, 可以通过吸收股东投资、在货币市场和资本市场采取借贷、拆借、发债、上市等融资手段筹资, 促进投资。

3) 促销功能。现代租赁业务为承租企业提供金融服务的同时, 对生产厂商来说, 金融租赁公司又是一种营销载体, 金融租赁是一种营销方式。

4) 理财和资产管理功能。现代租赁是通过税收优惠、资金运作、财务安排、投资决策的作用, 形成一种引导优势企业加速技术进步和经营管理, 并涵养税源的综合服务。企业或其他单位如有闲置资金或闲置资产, 采用现代租赁方式, 既可以解决承租企业资金、资产需求问题, 同时也可提高委托方资产报酬率。

## 2 实物期权的基本原理<sup>[2~6]</sup>

期权是指赋予持有人在将来一定时期内按照一定价格购买或出售一定数量的标的资产的权利。实物期权(real option)是指以实物投资为标的资产的期权, 具体表现在经营、管理、投资等经济活动中, 以各种形式获得的进行或有决策的权利。它是

金融期权理论在实物投资领域的发展和应用,其理论基础是金融期权定价理论的发展,可以用类似金融期权定价的方法进行估值。

早在1973年,Black和Scholes<sup>[3]</sup>发表论文时就指出:金融期权是处理金融市场上交易的金融资产的一类金融衍生工具,而实物期权是处理一些具有不确定性投资结果的非金融资产的一种投资决策工具。因此,实物期权是相对金融期权来说的,它与金融期权相似但并非相同,如实物期权的标的资产是某个项目,它不存在交易市场,而金融期权的标的资产是期权、期货、债券等可以上市交易的金融工具。Amram和Kulatilada<sup>[6]</sup>指出,实物期权是项目投资者在投资过程中所用的一系列非金融性选择权(推迟/提前、扩大/缩减投资获取新的信息等)。在一定意义上除了考虑现金流时间价值为基础的项目价值外,还充分考虑了项目投资的时间价值和管理柔性价值以及减少不确定性信息带来的价值,从而能够更完整地对外投资项目的整体价值进行科学的评价。因此实物期权是关于价值评估和投资决策的重要思想方法,是投资决策和金融分析相结合的框架模型,是将现代金融领域中的金融期权定价理论应用于实物投资决策的分析方法和技术。

由于实物期权的标的资产是某个项目,而项目本身不存在交易市场,因此也就不存在套利和复制的问题。可是期权定价的基础是无套利原则。这本质的区别似乎是标准的金融期权的定价模型不能用于实物期权的定价。幸运的是,Mason与Merton以及Dixit与Pindyck的理论研究表明,可以用推导标准期权定价模型的方法来建立实物期权的定价模型,这就是说尽管实物期权不存在交易市场,但其定价过程仍然可以按照金融期权定价的基本思路进行。金融股票期权与实物期权有关参数的对比如表1。

表1 金融股票期权与实物期权有关参数的比较

Table 1 Parameters' comparison of financial option and real option

股票期权	实物期权
标的股票当前市场价格	项目预期现金流量的现值
执行价格	投资成本
距离到期日的时间	距离失去投资机会的时间
标的股票价格的波动率	项目价值的不确定性
无风险利率	无风险利率

### 3 下降敲入续租期权定价模型

租赁期权是实物期权在现代租赁中的具体应

用<sup>[7,8]</sup>,有两种类型最为常见且最具有价值,一种是续租期权,即在初始租赁阶段约定对一标的物租赁结束后继续对该标的物进行租赁而产生的期权;另一种是购买期权,即在租期结束时购买所租标的物而产生的期权。虽然由于涉及所有权转移,这两种期权显著不同,但是它们的定价却非常相似。依据实物期权的基本原理,可以用推导标准金融期权定价模型的方法来建立租赁期权的定价模型。

近年来,国际金融衍生市场除交易人们广为熟悉的欧式、美式金融期权之外,还涌现了大量由标准金融期权变化、组合、派生出的新品种,即新型期权,近年发展起来的敲入障碍期权就是其中一种。下降敲入期权(down knock-in option)是与路径相关的新型期权<sup>[2]</sup>,也是障碍期权的一种,其收益依附于标的资产在一特定时期是否达到了某个特定水平(敲入障碍)。同理,下降敲入续租期权对期权设置了进入障碍,只有当标的资产价格(租金)触及一个特定的障碍水平时,该期权得以存在,即一旦租金 $R_t$ 触及敲入障碍 $R_b$ ,原来的期权生效。

如图1所示,路径1没有触及敲入障碍,因此该续租期权无效,路径2触及了敲入障碍 $R_b$ ,因此续租期权有效,其中 $K$ 为执行价格。

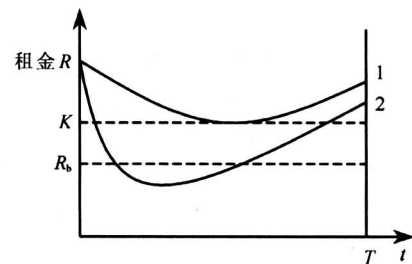


图1 下降敲入期权

Fig.1 Down knock-in option

基于为推导标准金融期权定价模型Black和Scholes<sup>[3]</sup>所作的假设和实物期权基本原理,令 $R$ 为租金价格,则

$$dR = \mu R dt + \sigma R dZ \quad (1)$$

其中, $\mu$ 为期望收益率, $\sigma$ 为波动率,度量收益的标准偏差,两者都假设为常数。 $dZ$ 是标准维纳过程,其详细的表达式为

$$dZ = \phi(dt)^{1/2} \quad (2)$$

式中 $\phi$ 满足标准正态分布。

由上文知道,下降敲入续租期权是一种路径依

赖型期权，因此必须考虑路径因子对期权定价的影响。因为路径因子  $I$  与租金  $R$  和时间  $t$  有关，故可将其描述为

$$I = \int_0^t f(R(\tau), \tau) d\tau \quad (3)$$

根据 ITO 定理<sup>[9]</sup>，下降敲入期权定价公式  $V(R, I, t)$  满足如下随机过程：

$$dV = \left( \frac{1}{2} \sigma^2 R^2 \frac{\partial^2 V}{\partial R^2} + \mu R \frac{\partial V}{\partial R} + \frac{\partial V}{\partial t} + f(R, t) \frac{\partial V}{\partial I} \right) dt + \sigma R \frac{\partial V}{\partial R} dZ \quad (4)$$

结合无套利原理<sup>[10]</sup>，得到下降敲入续租期权的定价模型

$$\frac{1}{2} \sigma^2 R^2 \frac{\partial^2 V}{\partial R^2} + rR \frac{\partial V}{\partial R} + \frac{\partial V}{\partial t} + f(R, t) \frac{\partial V}{\partial I} = rV \quad (5)$$

边界条件为

$$\max(0, R_T - K | \exists t \leq T, R_t \leq R_b) \quad (6)$$

其中  $R_b$  为障碍价格。

#### 4 下降敲入续租期权的定价求解

采用反射原理<sup>[11, 12]</sup>与二叉树图相结合的方法对下降敲入续租期权定价模型进行求解。

考虑一个粒子在时刻  $t$  的值是  $R(t) = R$ ，在  $t + \Delta t$  时刻，该粒子的值有两种可能，上升或下降。不失一般性，取  $\Delta t = 1$ ，则

$$R(t + \Delta t) = R(t + 1) = R + 1$$

$$\text{或者 } R(t + \Delta t) = R(t + 1) = R - 1 \quad (7)$$

那么，经过  $n\Delta t$  时间后，该粒子的取值为

$$R(t + n) = R + (n - 2i) \quad (8)$$

其中， $i = 0, 1, \dots, n$ 。

如图 2 示，不妨令初始时刻  $t = 0, R = 0$ ，即点坐标为  $(0, 0)$ ，那么经过  $j$  次上升和  $n - j$  次下降后，点  $P^*$  的坐标为  $(n, 2j - n)$ 。根据排列组合的有关知识，可以得到从点  $P$  到点  $P^*$  的路径数为

$$L = C_n^j \quad (9)$$

在图 2 中， $R_b$  表示敲入障碍，起始点  $P_1$  的坐标为  $(0, -m)$ ，并且在敲入障碍  $R_b$  的上方。令  $\Phi$  为从点  $P$  到点  $P^*$  触及敲入障碍  $R_b$  的路径集合， $L'$  为集合  $\Phi$  中的元素数，那么根据反射原理，从点  $P$  到点  $P^*$  触及敲入障碍  $R_b$  的路径可以分解成两部分：从点  $P$  到敲入障碍  $R_b$ ，从敲入障碍  $R_b$  到点  $P^*$ 。设点  $P'$  为点  $P$  的关于敲入障碍  $R_b$  的对称点，即  $P'$  的坐标为  $(0, -2m)$ ，那么从点  $P$  到敲入障碍  $R_b$  和从点

$P'$  到敲入障碍  $R_b$  有一一对应的关系。因此，只要计算出从点  $P'$  到敲入障碍  $R_b$  的路径数，即为从点  $P$  到敲入障碍  $R_b$  的路径数。由此可以得到：经过  $j + m$  次上升后，

$$L' = C_n^{j+m} \quad (10)$$

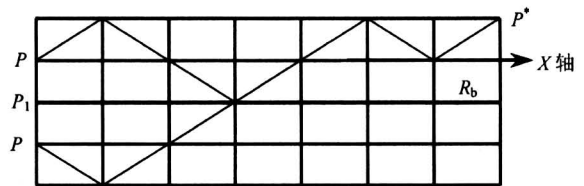


图 2 带敲入障碍的随机游走的反射原理

Fig. 2 Reflection principle of random walk with knock-in barrier

使用二叉树法对这种期权进行定价必须考虑障碍与二叉树节点之间的关系<sup>[13]</sup>，见图 3，其中，上升乘子  $u = \exp(\sigma(\Delta t)^{1/2})$ ，下降乘子  $d = 1/u$ ，上升概率为  $p$ 。

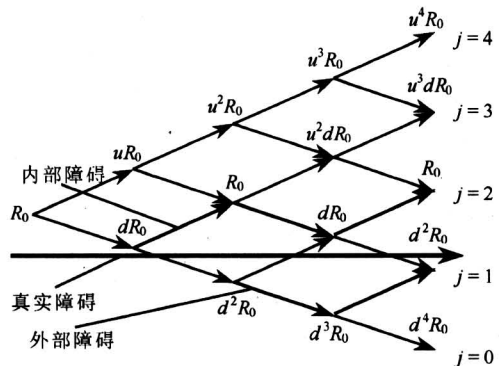


图 3 二叉树图

Fig. 3 Binomial tree

令经过  $m$  次下降以后，障碍  $R_b$  在内部障碍和外部障碍之间，即

$$R_0 d^m > R_b > R_0 d^{m+1} \quad (11)$$

令  $n$  为最小的时间步数，满足

$$\Delta t = (T - t)/n \quad (12)$$

并且

$$R_0 d^m \geq R_b \quad (13)$$

即  $R_0 \exp[-m\sigma(\Delta t)^{1/2}] \geq R_b$ ，

$$\text{所以 } n \geq m^2 \sigma^2 (T - t) / (\ln R_0 / R_b)^2 \quad (14)$$

$$\text{取 } n = \text{ent} [m^2 \sigma^2 (T - t) / (\ln R_0 / R_b)^2] \quad (15)$$

通过确定时间步  $n$  的值，得到的二叉树有一层节点恰好在下敲入障碍  $R_b$  之下，这样有效地避免了传统二叉树法求解带来的震荡误差<sup>[13]</sup>。

结合反射原理<sup>[11]</sup>, 可以得到下降敲入续租期权的定价求解公式为

$$C_{di}(t) = e^{-r(T-t)} \sum_{j=0}^n L' p^j (1-p)^{n-j} \max[R_0 u^j d^{n-j} - K, 0] \quad (16)$$

其中  $r$  为无风险利率。

## 5 算例分析

某金融租赁公司与一企业签订租赁合同, 租赁标的物价格为 RMB  $10^6$  元, 租期 2 年, 同时约定若 2 年后标的物的公允价值为 RMB  $0.8 \times 10^6$  元, 该企业可以以 RMB  $0.85 \times 10^6$  元续租该租赁物。设无风险利率为  $r = 0.1$ ,  $R_0 = 100$ ,  $K = 85$ ,  $R_b = 80$ ,  $T = 2$ , 波动率系数为  $\sigma = 0.3$ , 表 2 给出了取不同时间步得到的计算结果。

表 2 结合反射原理的二叉树法计算的下降敲入续租期权

Table 2 Knock-in renewal option calculated by binomial tree with reflection principle

$m$	$n$	期权值
10	361	6.55
15	813	6.58
20	1 445	6.58

根据计算结果, 可以得到

$$80 + 6.58 = 86.58 > 85.$$

因此, 考虑下降敲入期权对于租赁公司和企业来说, 是一种双赢的选择。

## 6 结论

阐述了现代租赁的基本内涵和实物期权的基本原理, 提出了下降敲入续租期权定价模型及其求解, 并通过算例进行了分析。可以看出, 引入下降敲入续租期权思想, 在租赁实践中具有指导意义。

## 参考文献

- [1] 陆世敏, 李晓洁. 现代租赁 [M]. 上海: 上海译文出版社, 2003
- [2] 茅宁. 期权分析——理论与应用 [M]. 南京: 南京大学出版社, 2000
- [3] Black F, Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities [J]. Journal of Political Economy, 1973, 81: 637~659
- [4] 方曙, 武振业. 实物期权理论及其在企业决策中的应用 [J]. 科学管理研究, 2001, 19: 42~46
- [5] Dixit K V, Pindyck R S. The option approach to capital investment [J]. Harvard Business Review, 1995, 73 (3): 105~114
- [6] Amram M, Kulatilaka N. Real Options: Managing Strategic Investment in an Uncertainty World [M]. Harvard Business School Press, 1998
- [7] Gerald W B Jr, Albert D J. The pricing of embedded options in real estate lease contracts [J]. Journal of Real Estate Research, 1996, (2): 253~263
- [8] Adams A T, Booth P M, Macgregor B D. Lease terms, option pricing and the financial characteristics of property [J]. Real Estate Finance and Investment Research Paper, No 2001. 02
- [9] 泽夫·司曲斯. 随机微分方程理论与应用 [M]. 钮晓鸣译. 上海: 上海科学技术文献出版社, 1996
- [10] 宋逢明. 金融工程原理——无套利均衡分析 [M]. 北京: 清华大学出版社, 1999
- [11] Costabile M. A discrete-time algorithm for pricing double barrier options [J]. Decisions in Economics and Finance, 2001, (24): 49~58
- [12] Mohanty S G. Lattice Path Counting and Applications [M]. New York: Academic Press, 1979
- [13] Boyle P P, Lau S H. Bumping up against the barrier with the binomial method [J]. The Journal of Derivatives, 1994, (1): 6~14

# Study on Down Knock-in Renewal Option Pricing

Wu Yun<sup>1</sup>, He Jianmin<sup>2</sup>

(1. Jiangsu Financial Leasing Co., LTD., Nanjing 210018, China;

2. Southeast University, Nanjing 210009, China)

[Abstract] In this paper, firstly, the basic connotation of modern leasing and the basic principle of real option are dissertated. Then, the down knock-in renewal option pricing model and its solution are put forward. At last, example is provided.

[Key words] leasing; renewal; leasing option; real option; down knock-in option