

非线性弹性薄膜表面效应的尺寸相关性研究

黄殿武¹, 连媛², 李凯¹

(1. 中国科学技术大学力学和机械工程系中科院材料力学行为与设计重点实验室, 合肥 230027;
2. 安徽理工大学化工系, 安徽淮南 232001)

[摘要] 在 Mindlin 假设的前提下, 考虑了几何非线性条件及表面效应的影响, 建立了纳米尺度下尺寸相关的板状各向同性弹性薄膜模型; 从哈密尔顿变分原理出发, 导出了薄膜的控制方程, 用公式明确阐述了由表面张力引起的符合经典板理论且与薄膜变形相关的残余膜力和弯矩; 通过微小尺寸薄膜弯曲的算例, 说明了表面效应与薄膜厚度的相关性, 当薄膜厚度等于或者小于其内禀尺度时, 表面效应对薄膜厚度表现出很强的敏感性。

[关键词] 弹性薄膜; 几何非线性; 表面效应; 内禀尺度; 尺度相关

[中图分类号] O343.5 **[文献标识码]** A **[文章编号]** 1009-1742(2006)04-0054-06

1 引言

超薄板状结构单元具有优异的物理、化学和力学性能^[1], 在微机械系统中具有重要应用, 吸引很多人研究这些结构的力学特性, 为设计和预测这些装置的行为提供依据^[2, 3]。研究这类微结构单元通常以经典弹性理论为基础, 得到可以预测不依赖结构单元绝对尺寸的作用和响应关系^[4-6]。这些研究忽略了表面效应的影响, 这对于大多数大尺度结构是合理的, 因为它们来说, 表面效应的影响与体的影响相比是微小量, 忽略前者对整体的力学行为几乎没有影响。但是, 对于微小尺度的固体来说, 表面效应影响与体的比值增大, 必须予以考虑。

固体的表面是带有特有原子排列和不同于体的属性的微小厚度的区域^[2, 7]。为了引入表面效应的影响, Gurtin 和 Murdoch 建立了反映表面弹性的通用模型, 将表面看作和体不同性质的二维膜无滑移地黏附在体上, 由于存在表面应力, 导致非经典的边界条件, 它与表面经典的弹性方程结合, 共同组成场方程系统^[8-12]。Miller 和 Shenoy 用原子模拟的方法计算了一些材料的表面特征常数, 选择合适的表面层的特征常数后^[13], 连续表面模型和原子模

拟一样能预测弹性响应, 进而吸引更多人来研究许多纳观固体结构的力学问题^[14-26]。

笔者研究的目的是在表面弹性理论的基础上, 考虑基底表面正应力影响, 建立非线性尺寸相关的板状弹性薄膜模型, 这是在归纳了 Lim 和 He 的基于表面弹性理论基础的非线性尺寸相关的薄板模型, 以及 He 的引入体基底表面正应力影响下的线性尺寸相关薄板模型基础上建立的^[14, 15]。Lim 和 He 的模型没有考虑体基底表面正应力的影响, 不能满足 Gurtin 和 Murdoch 表面弹性理论的一些表面平衡关系, 而 He 的模型没有体现非线性项的影响, 没有反映弱作用。笔者提出的新模型既能满足表面平衡关系, 又考虑了非线性项的影响, 使得尺寸相关的薄板理论更加完备。

通过引入体基底表面正应力的影响及采用应变的非线性几何关系, 用能量泛函变分方法, 导出了板状弹性薄膜的控制方程, 更主要的是用公式明确阐述了由表面张力引起的符合经典板理论且与薄膜变形相关的残余膜力和弯矩。为了更好地说明表面效应的影响, 以在平面应变条件下的薄膜弯曲和屈曲为例进行研究, 从中得到以表面弹性常数与体弹性常数之比为内禀尺度的精确解。

2 建立模型

研究一个厚度为常量 h 的各向同性弹性薄膜结构,如图1所示。建立笛卡儿直角坐标系 $x_i (i = 1, 2, 3)$, 其中 $x_1 ox_2$ 为未发生变形的中面。 $x_3 = h/2$ 处为薄膜的上表面 S^+ , $x_3 = -h/2$ 处为薄膜的下表面 S^- 。本文重复的下标符合求和约定, 其中拉丁字母下标取值为 1, 2 和 3, 希腊字母下标取值为 1 和 2。薄膜上表面 S^+ 上的应力定义为 τ_{ia}^+ , 下表面 S^- 上的应力定义为 τ_{ia}^- , 且满足表面平衡关系^[10,12]:

$$\begin{aligned} \tau_{\beta i, \beta}^+ - \sigma_{i3}^+ &= \rho_0^+ \dot{u}_i^+, \text{ at } x_3 = h/2, \\ \tau_{\beta i, \beta}^- + \sigma_{i3}^- &= \rho_0^- \dot{u}_i^-, \text{ at } x_3 = -h/2 \end{aligned} \quad (1)$$

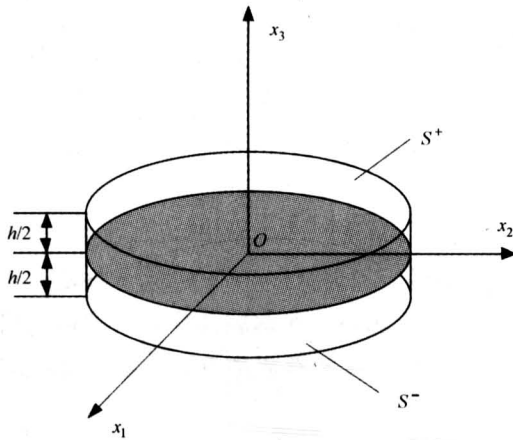


图1 厚度为常量的各向同性弹性薄膜示意图

Fig.1 The sketch of the elastic thin film with surface effects

这里 σ_{i3}^+ 和 u_i^+ 是分别在上下表面 t 时刻的体应力和位移, ρ_0^+ 为上下表面层的密度。由于在表面层和层下的体材料之间无滑移, 所以在整个薄膜内位移是连续的。按照 Mindlin 理论, 薄膜内一点的位移场 u_i (包括上下表面层) 可以表述为

$$u_a = u_a^0 + x_3 \Psi_a, \quad u_3 = u_3^0 \quad (2)$$

这里 u_i^0 是在 t 时刻的中面位移分量, 同时, 按照 von Kármán 的理论, 典型的非线性应变可写为

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta}^0 + \frac{x_3}{2} (\Psi_{\alpha, \beta} + \Psi_{\beta, \alpha}) \quad (3)$$

其中

$$\epsilon_{\alpha\beta}^0 = \frac{1}{2} (u_{\alpha, \beta}^0 + u_{\beta, \alpha}^0 + u_{3, \alpha} u_{3, \beta}) \quad (4)$$

是中面应变。假设上下表面具有相同的材料常数,

由 Gurtin 和 Murdoch 给出的上下表面的连续性关系可以表述为

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha\beta} &= \tau_0 \delta_{\alpha\beta} + 2(\mu_0 - \tau_0) \epsilon_{\alpha\beta} + \\ &(\lambda_0 + \tau_0) \epsilon_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta} + \tau_0 u_{\alpha, \beta}, \\ \tau_{i3}^+ &= \tau_0 u_{3, i} \end{aligned} \quad (5)$$

这里的 $\tau_{\alpha\beta}$ 为上下表面上的表面应力。 τ_0 是无约束条件下的残余表面应力, λ_0 和 μ_0 分别为上下表面的 Lamé 系数, 并且 δ_{ij} 为 Kronecker 记号, 当 $i = j$ 时, $\delta_{ij} = 1$; $i \neq j$ 时, $\delta_{ij} = 0$ 。

由于薄膜厚度与其他两个方向相比很小, 薄膜体应力分量 σ_{33} 与面内应力分量 $\sigma_{\alpha\beta}$ 相比很小, 在经典板理论中被忽略了。然而按照假设, 在上下表面上不能满足表面平衡关系式(1); 为了满足式(1)而考虑弱作用, 假设应力分量 σ_{33} 沿厚度方向呈线性变化, 并且满足表面平衡条件, 于是应力分量 σ_{33} 可以写为

$$\sigma_{33} = \frac{1}{2} (\sigma_{33}^+ + \sigma_{33}^-) + \frac{1}{h} (\sigma_{33}^+ - \sigma_{33}^-) x_3 \quad (6)$$

将式(1)代入式(6)可得

$$\begin{aligned} \sigma_{33} &= \frac{1}{2} (\tau_{\beta 3, \beta}^+ - \tau_{\beta 3, \beta}^-) + \\ &\frac{1}{h} (\tau_{\beta 3, \beta}^+ + \tau_{\beta 3, \beta}^- - 2\rho_0 \dot{u}_3) x_3 \end{aligned} \quad (7)$$

薄膜的材料性质遵循广义三维虎克定律, 则薄膜内部材料的本构关系可以表示为

$$\sigma_{i\beta} = \frac{E}{1+\nu} \left(\epsilon_{i\beta} + \frac{\nu}{1-\nu} \epsilon_{\gamma\gamma} \delta_{i\beta} \right) + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{33} \delta_{i\beta} \quad (8)$$

式中 E 是杨氏模量, ν 是泊松比。

最后, 定义膜力 N_{ij} , 弯矩 M_{ij} 和剪力 Q_β 为

$$\begin{aligned} N_{ij} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} dx_3, \\ M_{ij} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} x_3 dx_3, \\ Q_\beta &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\beta 3} dx_3 \end{aligned} \quad (9)$$

为了导出薄膜的控制方程, 使用 Hamilton 变分原理

$$\delta \int_0^t L dt = 0 \quad (10)$$

式中 δ 是变分算子, $L = T - U + W$ 为能量泛函, T 是动能, U 是应变能, W 是外力势, T , U 和 W 的表达式分别为

$$\begin{aligned} T &= \int_V \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i dV, \\ U &= \int_V \sigma_{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta} dV + \int_{S^+} \tau_{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta} dS^+ + \int_{S^-} \tau_{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta} dS^-, \end{aligned}$$

$$W = \int_{S^+} P_3 u_3 dS^+ \quad (11)$$

其中 \dot{u}_i 是对时间的微分, ρ 是薄膜体内的质量密度, 将式 (2) 至式 (5)、式 (7) 至式 (9) 和式 (11) 代入式 (10), 并进行分部积分, 由于薄膜沿厚度方向的影响与其他两个方向相比很小, 可以忽略。沿厚度方向积分, 可得到薄膜面内的运动方程

$$(N_{\alpha\beta} + \tau_{\alpha\beta}^+ + \tau_{\alpha\beta}^-)_{,\beta} - I\ddot{u}_\alpha^0 = 0 \quad (12)$$

$$\left[M_{\alpha\beta} + \frac{h}{2}(\tau_{\alpha\beta}^+ - \tau_{\alpha\beta}^-) \right]_{,\beta} - (Q_\alpha + \tau_{\alpha 3}^+ + \tau_{\alpha 3}^-) - J\ddot{\Psi}_\alpha = 0 \quad (13)$$

$$(N_{\alpha\beta} + \tau_{\alpha\beta}^+ + \tau_{\alpha\beta}^-)_{,\beta} u_{3,\alpha} + (N_{\alpha\beta} + \tau_{\alpha\beta}^+ + \tau_{\alpha\beta}^-) u_{3,\alpha\beta} + (Q_\beta + \tau_{\beta 3}^+ + \tau_{\beta 3}^-)_{,\beta} + P_3 - I\ddot{u}_3 = 0 \quad (14)$$

这里 $I = \int_{-h/2}^{h/2} \rho dx_3 = \rho h$, $J = \int_{-h/2}^{h/2} \rho x_3^2 dx_3 = \frac{\rho h^3}{12}$,

并且可以定义膜力、弯矩和剪力为

$$\begin{aligned} N_{\alpha\beta}^* &= N_{\alpha\beta} + \tau_{\alpha\beta}^+ + \tau_{\alpha\beta}^-, \\ M_{\alpha\beta}^* &= M_{\alpha\beta} + \frac{h}{2}(\tau_{\alpha\beta}^+ - \tau_{\alpha\beta}^-), \\ Q_\alpha^* &= Q_\alpha + \tau_{\alpha 3}^+ + \tau_{\alpha 3}^-. \end{aligned} \quad (15)$$

假如忽略表面应力的影响, 式 (12) 至式 (14) 可退化为经典的板方程。将式 (15) 分别代入式 (12) 至式 (14) 后, 运动方程可以写为

$$N_{\alpha\beta,\beta}^* - I\ddot{u}_\alpha^0 = 0 \quad (16)$$

$$M_{\alpha\beta,\beta}^* - Q_\alpha^* - J\ddot{\Psi}_\alpha = 0 \quad (17)$$

$$N_{\alpha\beta,\beta}^* u_{3,\alpha} + N_{\alpha\beta}^* u_{3,\alpha\beta} + Q_{\beta}^*_{,\beta} + P_3 - I\ddot{u}_3 = 0 \quad (18)$$

这里的膜力和弯矩包含了依赖于薄膜内位移的表面应力的贡献。将式 (5)、式 (7) 至式 (9) 代入式 (15), 可得到膜力、弯矩和剪力的表达式:

$$\begin{aligned} N_{\alpha\beta}^* &= 2\tau_0(\delta_{\alpha\beta} + u_{\alpha,\beta}^0) + \frac{Eh}{1-\nu^2} \cdot \\ &\quad \left[(1-\nu) \left(1 + \frac{l_1}{h} \right) \varepsilon_{\alpha\beta}^0 + \nu \left(1 + \frac{l_2}{h} \right) \varepsilon_m^0 \delta_{\alpha\beta} \right], \\ M_{\alpha\beta}^* &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[(1-\nu) \left(1 + 3 \frac{l_1}{h} \right) \cdot \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} (\Psi_{\alpha,\beta} + \Psi_{\beta,\alpha}) + \nu \left(1 + 3 \frac{l_2}{h} \right) \Psi_{\nu,\nu} \delta_{\alpha\beta} + \right. \\ &\quad \left. 3 \frac{l_3}{h} \psi_{\alpha,\beta} + \nu \frac{l_4}{h} u_{3,m} \delta_{\alpha\beta} \right] - \rho_0 h l_5 \ddot{u}_3 \delta_{\alpha\beta}, \\ Q_\beta^* &= \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left[\left(1 + 2 \frac{l_4}{h} \right) u_{3,\beta} + \psi_\beta \right] \end{aligned} \quad (19)$$

式中参数 l_1 , l_2 , l_3 和 l_4 分别为 $l_1 = 4(1+\nu)(\mu_0 - \tau_0)/E$, $l_2 = 2(1-\nu^2)(\lambda_0 + \tau_0)/E\nu$, $l_3 = 2\tau_0(1 -$

$\nu^2)/E$, $l_4 = 2(1+\nu)\tau_0/E$, 以及 $l_5 = h\nu/6(1-\nu)$ 。所有这些参数都有长度的量纲。当忽略表面效应的影响后, 即 $\tau_0 \rightarrow 0$, $\lambda_0 \rightarrow 0$ 和 $\mu_0 \rightarrow 0$, 式 (19) 退化为经典板理论中的膜力和弯矩表达式。

3 算例

为了论证表面效应的影响, 以简支的条状薄膜的弯曲为例来说明。该条状薄膜在 x_2 方向为无限长, 在 x_1 方向为有限长度 l 。当施加的外载分布不依赖 x_2 , 且 $u_2 = 0$ 时, 由条带支撑平面的变形, 膜力和弯矩可简化为

$$\begin{aligned} N_{11}^* &= 2\tau_0 + \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(1 + \frac{\eta_1}{h} \right) u_{1,1}^0 + \\ &\quad \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \left(1 + \frac{\eta_2}{h} \right) u_{3,1}^2, \\ M_{11}^* &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[\left(1 + 3 \frac{\eta_1}{h} \right) \Psi_{1,1} + \nu \frac{l_4}{h} u_{3,1,1} \right] \cdot \\ &\quad - \rho_0 h l_5 \ddot{u}_3, \\ Q_1^* &= \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left[\left(1 + 2 \frac{l_4}{h} \right) u_{3,1} + \Psi_1 \right] \end{aligned} \quad (20)$$

式中 $\eta_1 = 2(\lambda_0 + 2\mu_0)(1-\nu^2)/E$, $\eta_2 = 2(\lambda_0 + 2\mu_0 - \tau_0)(1-\nu^2)/E$ 为不依赖薄膜几何尺寸的内禀尺度, 在例子中采用的材料常数是由 Gurtin 和 Murdoch 给出的^[9-12]。

Set 1:

$$\begin{aligned} E &= 5.625 \times 10^{10} \text{ N/m}^2, \nu = 0.25, \\ \rho &= 3 \times 10^3 \text{ kg/m}^3, \\ \lambda_0 &= 7 \times 10^3 \text{ N/m}, \mu_0 = 8 \times 10^3 \text{ N/m}, \\ \tau_0 &= 110 \text{ N/m}, \rho_0 = 7 \times 10^{-4} \text{ kg/m}^2 \end{aligned} \quad (21)$$

为第一种材料的常数。

Set 2:

$$\begin{aligned} E &= 17.73 \times 10^{10} \text{ N/m}^2, \nu = 0.27, \\ \rho &= 7 \times 10^3 \text{ kg/m}^3, \\ \lambda_0 &= -8 \text{ N/m}, \mu_0 = 2.5 \text{ N/m}, \\ \tau_0 &= 1.7 \text{ N/m}, \rho_0 = 7 \times 10^{-6} \text{ kg/m}^2 \end{aligned} \quad (22)$$

为第二种材料的常数。

在这里, 薄膜在边界 $x_1 = 0$ 和 $x_1 = l$ 处为简单支撑, 则静态平衡方程为

$$N_{11,1}^* = 0,$$

$$M_{11,1}^* - Q_1^* = 0,$$

$$N_{11,1}^* u_{3,1} + N_{11}^* u_{3,1,1} + Q_{1,1}^* + P_3 = 0 \quad (23)$$

相关的边界条件为

$$u_1^0 = 0, u_3 = 0, M_{11} = 0$$

在 $x_1 = 0$ 和 $x_1 = l$ 处 (24)

在一个正弦变换力 $P_3 = P_0 \sin(\pi x_1/l)$ 的作用下，薄膜的变形可假设为

$$u_3 = w_m \sin\left(\frac{\pi x_1}{l}\right),$$

$$\Psi = \Psi_m \cos\left(\frac{\pi x_1}{l}\right) \quad (25)$$

式中 w_m 是待定的最大变形， Ψ_m 是特定的最大转角，显然，该假设满足边界条件式 (24)。

由式 (23) 的第 1 式可以看出 N_{11} 是一个常量，可认为它等于常量 N ，意味着从式 (23) 可以得到

$$N_{11}^* = 2\tau_0 + \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(1 + \frac{\eta_1}{h}\right) u_{3,1}^0 +$$

$$\frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \left(1 + \frac{\eta_2}{h}\right) u_{3,1}^2 = N \quad (26)$$

将式 (25) 代入式 (26)，并对 $x_1 = 0$ 到 $x_1 = l$ 进行积分，同时使用面内的边界条件，可得到常量 N 为

$$N = 2\tau_0 + \frac{Eh}{4(1-\nu^2)} \left(1 + \frac{\eta_2}{h}\right) \left(\frac{\pi}{s}\right)^2 \left(\frac{w_m}{h}\right)^2 \quad (27)$$

式中 $s = l/h$ 。

将式 (25) 和式 (27) 及应力条件代入式 (20) 的第 2 式和第 3 式，可得弯矩和剪力为

$$M_{11}^* = -\frac{Eh}{12(1-\nu^2)} \left[\left(1 + 3\frac{\eta_1}{h}\right) \Psi_m h + \nu \frac{l_4}{h} w_m \frac{\pi}{s} \right] \cdot$$

$$\frac{\pi}{s} \sin\left(\frac{\pi x_1}{sh}\right),$$

$$Q_1^* = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left[\left(1 + 2\frac{l_4}{h}\right) \frac{w_m}{h} \frac{\pi}{s} + \Psi_m \right] \cos\left(\frac{\pi x_1}{sh}\right) \quad (28)$$

将式 (27) 和式 (28) 及力的条件代入式 (23) 的第 2 式，可得 w_m 和 Ψ_m 的关系式为

$$\Psi_m = \zeta \frac{w_m}{h} \quad (29)$$

式中

$$\zeta = -\left[\nu \frac{l_4}{h} \left(\frac{\pi}{s}\right)^3 + 6(1-\nu) \left(1 + 2\frac{l_4}{h}\right) \frac{\pi}{s} \right] /$$

$$\left[\left(1 + 3\frac{\eta_1}{h}\right) \left(\frac{\pi}{s}\right)^2 + 6(1-\nu) \right],$$

将式 (27) 至式 (29) 及力的条件代入式 (23) 的第 3 式，可得

$$\frac{1-\nu^2}{E} P_0 = \left[2\frac{\xi}{h} +$$

$$\frac{1}{4} \left(1 + \frac{\eta_2}{h}\right) \left(\frac{\pi}{s}\right)^2 \left(\frac{w_m}{h}\right)^2 \right] \frac{w_m}{h} \left(\frac{\pi}{s}\right)^2 +$$

$$\frac{(1-\nu)}{2} \left[\left(1 + 2\frac{l_4}{h}\right) \frac{\pi}{s} + \zeta \right] \frac{w_m}{h} \left(\frac{\pi}{s}\right) \quad (30)$$

式中 $\xi = (1-\nu^2) \tau_0/E$ 。

给定施加的外力，即可得到确定的挠度。同样，面内的膜力也可由式 (27) 导出，对式 (26) 积分可得面内位移。

当忽略表面效应的影响，即 $\zeta = 0$ ， $\eta_2 = 0$ 及式 (23) 中的 $l_4 = 0$ 和 $\eta_1 = 0$ ，可以看出由式 (30) 确定的无量纲的力 $(1-\nu^2)P_0/E$ 与无量纲的最大挠度 w_m/h 之间的关系是与薄膜的绝对尺寸不相关的。按照式 (21) 和式 (22) 确定的内禀尺度，对于 Set 1 有 $\zeta = 1.833 \text{ nm}$ ， $\eta_1 = 766.7 \text{ nm}$ ， $\eta_2 = 763.0 \text{ nm}$ ， $l_4 = 766.3 \text{ nm}$ ；对于 Set 2 有 $\zeta = 8.89 \times 10^{-3} \text{ nm}$ ， $\eta_1 = -3.137 \times 10^{-2} \text{ nm}$ ， $\eta_2 = 4.915 \times 10^{-2} \text{ nm}$ ， $l_4 = 2.435 \times 10^{-2} \text{ nm}$ 。在这两种情况下，内禀尺度 ζ 远小于内禀尺度 η_1 和 η_2 ，因此， ζ 影响较弱， η_1 和 η_2 影响较大。当薄膜厚度等于或者小于内禀尺度的量级时， η_1/h 和 η_2/h 就会对式 (30) 描述的响应关系产生很大影响。为了直观地描述该响应关系，取薄膜跨度与厚度之比 $s = 10$ ，分别对这两种材料作图可得不同厚度下的应力 - 挠度曲线图 2 和图 3。

由图 2 和图 3 可以看出，随着无量纲挠度的增大，无量纲力增大得更快，它们之间的关系呈非线性变化；在相同的无量纲挠度下，对于 Set 1，薄

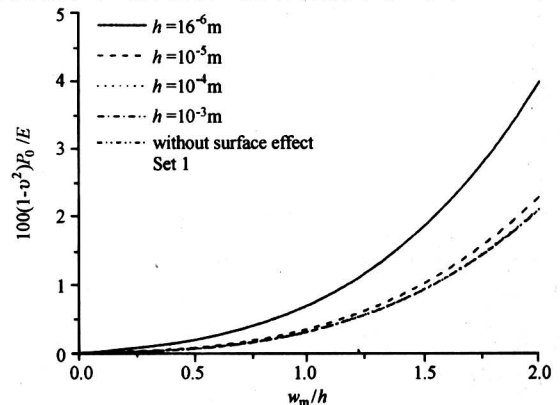


图 2 Set 1 中材料不同薄膜厚度的无量纲力与挠度的关系

Fig.2 The relation between dimensionless load and deflection of the film with various thicknesses for data Set 1

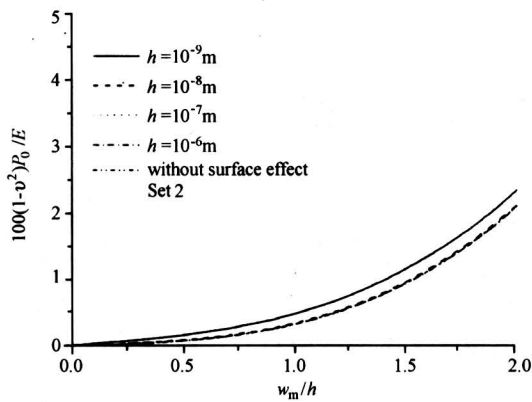


图 3 Set 2 中材料不同薄膜厚度的无量纲力与挠度的关系

Fig.3 The relation between dimensionless load and deflection of the film with various thicknesses for data Set 2

膜厚度 $\leq 10 \mu\text{m}$ 量级, 对于 Set 2, 薄膜厚度 $\leq 1 \text{ nm}$ 量级时, 无量纲力差别较大, 说明表面效应明显; 对于 Set 1, 薄膜厚度 $> 10 \mu\text{m}$ 量级, 对于 Set 2, 薄膜厚度 $> 1 \text{ nm}$ 量级时, 无量纲力差别较小, 随着薄膜厚度的继续增大, 无量纲力与无表面效应的情况相比几乎无差别, 说明表面效应不明显。因此, 由图 2 和图 3 可知, 无量纲力与无量纲挠度关系曲线是与薄膜厚度相关的, 且由材料的内禀尺度决定。同时, 从另一个角度也证明, 在处理许多大尺度的宏观问题时, 表面效应对计算结果的影响可以忽略不计。

4 结论

笔者提出了研究静态和动态的纳米厚度弹性薄膜的大变形模型, 在采用 Mindlin 理论的基础上, 拓展了卡门的几何非线性弹性板理论。同时, 新模型通过引入基底上沿表面的正应力的影响, 满足了由 Gurtin 和 Murdoch 提出的表面平衡关系, 得出的精确的膜力和弯矩的表达式中包含了表面的贡献, 并且与薄膜的位移场是协调一致的, 这清楚地说明微结构的弹性响应是与尺寸相关的。通过计算分析简支条状薄膜的弯曲问题, 可以得出当薄膜的厚度等于或者小于它的内禀尺度的量级时, 薄膜的弹性行为对尺度非常敏感; 反之, 当薄膜的厚度远大于其内禀尺度时, 薄膜的弹性行为对尺度不敏感。这样, 在微电子机械系统和纳米电子机械系统中, 运用新模型可以更简便准确地分析和设计薄膜

结构。

参考文献

- [1] Gleiter H. Nanostructured materials: basic concepts and microstructure [J]. *Acta Materialia*, 2000, 48 (1): 1 ~ 29
- [2] Ibach H. The role of surface stress in reconstruction, epitaxial growth and stabilization of mesoscopic structures [J]. *Surface Science Reports*, 1997, 29 (5,6): 195 ~ 263
- [3] Lavrik N V, Sepaniak M J, Datskos P G. Cantilever transducers as a platform for chemical and biological sensors [J]. *Review of Scientific Instruments*, 2004, 75 (7): 2229 ~ 2253
- [4] Chia C Y. *Nonlinear Analysis of Plates* [M]. New York: McGraw-Hill, 1980
- [5] Reddy J N. *Theory and Analysis of Elastic Plates* [M]. Philadelphia: Taylor & Francis, 1999
- [6] Timoshenko S, Woinowsky-Krieger S. *Theory of Plates and Shells* [M]. New York: McGraw-Hill, 1959
- [7] Muller P, Saul A. Elastic effects on surface physics [J]. *Surface Science Reports*, 2004, 54 (5—8): 157 ~ 258
- [8] Andreussi F, Gurtin M E. On the wrinkling of a free surface [J]. *Journal of Applied Physics*, 1977, (48): 3798 ~ 3799
- [9] Gurtin M E, Murdoch A I. Addenda to our paper: a continuum theory of elastic material surfaces [J]. *Arch Rat Mech Anal*, 1975, (59): 389 ~ 390
- [10] Gurtin M E, Murdoch A I. Surface stress in solids [J]. *International Journal of Solids And Structures*, 1978, (14): 431 ~ 440
- [11] Gurtin M E. Effect of surface stress on wave propagation in solids [J]. *Journal of Applied Physics*, 1976, (47): 441
- [12] Gurtin M E, Murdoch A I. A continuum theory of elastic material surfaces [J]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1975, (57): 291 ~ 323
- [13] Miller R E, Shenoy V B. Size-dependent elastic properties of nanosized structural elements [J]. *Nanotechnology*, 2000, 11 (3): 139 ~ 147
- [14] He L H, Lim C W, Wu B S. A continuum model for size-dependent deformation of elastic films of nano-scale thickness [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2004, 41(3—4): 847 ~ 857
- [15] Lim C W, He L H. Size-dependent nonlinear response of thin elastic films with nano-scale thickness [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2004, 46 (11): 1715 ~ 1726

- [16] Sharma P, Ganti S. Size-dependent Eshelby's tensor for embedded nano-inclusions incorporating surface/interface energies [J]. *Journal of Applied Mechanics-Transactions of the Asme*, 2004, 71 (5): 663 ~ 671
- [17] Sharma P, Ganti S, Bhate N. Effect of surfaces on the size-dependent elastic state of nano-inhomogeneities [J]. *Applied Physics Letters*, 2003, 82 (4): 535 ~ 537
- [18] Shenoy V B. Size-dependent rigidities of nanosized torsional elements. [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2002, 39 (15): 4039 ~ 4052
- [19] Sun C T, Zhang H T. Size-dependent elastic moduli of platelike nanomaterials. [J]. *Journal of Applied Physics*, 2003, 93 (2): 1212 ~ 1218
- [20] Wong E. W, Sheehan P E, Lieber C M. Nanobeam mechanics: elasticity, strength, and toughness of nanorods and nanotubes. [J]. *Science*, 1997, 277 (5334): 1971 ~ 1975
- [21] Jung S C, Kim S J, Imaishi N, et al. Effect of TiO₂ thin film thickness and specific surface area by low-pressure metal-organic chemical vapor deposition on photocatalytic activities [J]. *Applied Catalysis B-Environmental*, 2005, 55 (4): 253 ~ 257
- [22] Puri V, Salunkhe S M, Puranik M M. Size dependent layer overlay effects on thin film microstrip patch antenna [J]. *Microelectronics International*, 2005, 22 (1): 21 ~ 25
- [23] Spaepen F. interfaces and stresses in thin films [J]. *Acta Materialia*, 2000, 48 (1): 31 ~ 42
- [24] Zhang Z Y, Detch J, Metiu H. Surface-roughness in thin-film growth—the effect of mass-transport between layers [J]. *Physical Review B*, 1993, 48 (7): 4972 ~ 4975
- [25] Zheng D W, Jia Z Y, Liu C Y, et al. Size dependent dewetting and sideband reaction of eutectic SnPb on Au/Cu/Cr multilayered thin film [J]. *Journal of Materials Research*, 1998, 13 (5): 1103 ~ 1106
- [26] Liang L H, Li J C, Jiang Q. Size-dependent elastic modulus of Cu and Au thin films [J]. *Solid State Communications*, 2002, 121 (8): 453 ~ 455

Nonlinear Size-dependent Study of Ultra-thin Elastic Film With Surface Effect

Huang Dianwu¹, Lian Yuan², Li kai¹

(1. Key Laboratory of Mechanical Behavior & Design of Materials, CAS, Department of Mechanics & Mechanical Engineering, University of Science and Technology of China, Hefei 230027, China;

2. Department of Chemistry, Anhui University of Science and Technology, Huainan, Anhui 232001, China)

[Abstract] A new nano-scale plate-like model in which the influence of surface effect and the geometrically nonlinear condition are considered is introduced on the basis of Mindlin theory. By using Hamilton's principle, the governing equations are derived. The residue membrane force and bending moment, which are caused by the surface stresses, are explicitly expatiated. After analyzing the membrane force and bending moment, it can be obtained that they are dependent on the deformation of the film and are accordant to classical plate theory. The model is then applied to analyze the bending and buckling of simply supported micro- and nano-films in plane strains. Differing from the conventional plate theory, the proposed model and solutions involve the intrinsic scale and depend on the thickness of the film. Thus, it can be found that when the thickness of the film is equal to or less than the intrinsic scale, the surface effect is strongly sensitive to the thickness of the film.

[Key words] thin elastic film; geometrically nonlinear; surface effect; intrinsic scale; size-dependence