学术论文

应用规范化公式的 MCDM 保序研究

章　玲，周德群，李洪伟，朱佩枫
（南京航空航天大学经济与管理学院，南京　210016）

［摘要］　规范化公式的应用会破坏方案之间的独立性，导致逆序的产生。提出了两种改进规范化公式的方法以消除逆序，并以加权算术平均（WAA）集结算子的多属性决策分析（MCDM）为例验证了所提出方法的合理性和有效性。改进后的规范化公式不仅可以应用于 WAA 算子，还可以应用到其他类似的决策算子中。改进后规范化公式的应用可以降低和消除规范化公式对无关方案独立性的影响，使得 MCDM 决策过程更加合理、科学。

［关键词］　MCDM 决策；规范化公式；无关方案独立性；保序；逆序
［中图分类号］ C934　　［文献标识码］ A　　［文章编号］ 1009－1742（2006）12－0085－04

1　引言

在进行多属性决策分析（MCDM，multiple criteria decision making）时，由于各个指标之间单位的不同，通常会引入规范化公式处理初始决策矩阵，以消除决策矩阵中各个指标单位对决策的影响，使不同类型的指标具有可加性[1,2]。针对不同类型的指标以及指标的不同取值方式，存在着不同的规范化公式：效益型规范化公式、成本型规范化公式等[3]。

包含多种方案的 MCDM 应该满足无关方案独立性[4~9]。目前还鲜有对规范化公式应用的深入探讨。文献[10]指出规范化公式的应用会破坏无关方案独立性，并从理论上详细阐述了规范化公式导致违反无关方案独立性与产生逆序的原因。但文献[10]没有给出解决规范化公式与无关方案独立性之间矛盾的方案。笔者在文献[10]的基础上提出了两种基于规范化公式的 MCDM 保序方法，并以加权算术平均（WAA）算子的 MCDM 决策为例，验证了这两种方法的合理性和有效性。保序方法的应用有效地化解了规范化公式与无关方案独立性之间的矛盾，使得基于规范化公式的 MCDM 决策更加合理、科学。

2　规范化公式导致违反无关方案独立性与产生逆序

序是在不同事物之间对比中产生的，反映不同事物之间对比状况或对比程度。Satty 认为序并不是事物本身固有的特性，它依赖于人的判断和偏好。序定量化的精确表达则是序值，序值的确定靠人的判断[11]。在多方案的 MCDM 中，若方案的增减没有改变决策者的原有判断，则序值不会发生变化，否则序值将会改变，从而可能产生逆序。

假设 MCDM 中某效益型属性（属性的效用值与属性值是同方向变化的）在方案集上的取值向量为 $\boldsymbol{a} = (a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n)^{\mathrm{T}}$，为了消除该属性单位对决策的影响，采用

$$r_i = \frac{a_i}{\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \{a_j\}},\ i = 1,\cdots,n \tag{1}$$

对其进行规范化处理；若属性 $\boldsymbol{a}$ 是成本型属性（属性的效用值与属性值是反方向变化的），则可以采用

［收稿日期］　2005－10－19；修回日期　2006－01－06
［基金项目］　国家自然科学基金资助项目（90510010）；教育部博士点基金资助项目（20050287026）
［作者简介］　章　玲（1979－），女，安徽肥东县人，南京航空航天大学博士研究生，研究方向为系统评价和决策

$$r_i = \frac{\min\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \{a_j\}}{a_i}, \ i = 1, \cdots, n \tag{2}$$

对其进行规范化处理。

从式(1)和式(2)不难看出，规范化后各个元素的取值不仅与初始决策矩阵所对应的元素值有关，而且与初始矩阵中同列元素的最大(小)值相关。这说明规范化公式的应用尽管消除了各个属性单位的差异，但引入了方案之间的相关性。方案的增减可能改变各个属性向量的极值(极大值和极小值)。而方案极值的改变导致了方案增减前后决策者判断的不一致性。以下举例说明方案的增减带来决策者判断的不一致。

假设 n 个方案在效益型属性 a 上有式 $\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n}\{a_j\} = 0.8$ 成立，此时决策者认为该属性取值0.8时效用为最大，也即 $u_a(0.8) = 1$。若在方案集上新增方案 $n+1$ 并假设该方案在属性 a 上的取值为0.96，则新情况下有 $u_a(0.96) = 1$ 成立；$0.8 < 0.96$，所以 $u_a(0.8) < 1$。同理，方案的减少也会带来决策者判断的不一致性。正是由于判断不一致，导致了逆序。

3 应用规范化公式的MCDM保序方法

基于文献[10]和对逆序产生原因的分析，解决逆序的根本就是利用各种方法消除方案的增减对规范化公式的影响。下面给出两种基于规范化公式的MCDM保序方法。

为便于描述，假设存在某MCDM中包含 m 个方案$(a_1, \cdots, a_m)$，每个方案都可以通过 n 个属性$(c_1, \cdots, c_n)$进行描述。c_i^j 为方案 a_j 在属性 c_i，$j \in \{1, \cdots, m\}, i \in \{1, \cdots, n\}$ 上的取值。不失一般性，假设$(c_1, \cdots, c_n)$中前 $k(1 \leqslant k \leqslant n)$ 个属性为效益型属性，后 $n-k$ 个属性为成本型属性。

3.1 保序方法1：固定MCDM中各个属性的极值

由上述分析可知，要消除方案变化对原有方案排序的影响，只有消除方案变化所带来的规范化公式的变化。而规范化公式的变化来自各个目标极值随着方案的增减而变化。对于实际中具体的决策问题，各个目标的取值通常都存在一个可行区间，区间的上限为目标的极大值，下限为目标的极小值。若固定目标极值，使其不随方案集的变化而改变，也就切断了规范化公式导致无关方案独立性违反的源头，避免了决策者的判断随着方案集的变化而改变，消除了逆序的产生。

假设属性 c_i 的取值区间为 $[l_i, h_i]$，$i \in \{1, \cdots, n\}$。若采用上述方法对属性进行规范化处理，则式(1)和式(2)相应转化为式(3)和式(4)：

$$r_i^j = \frac{c_i^j}{h_i}, \ j \in \{1, \cdots, m\}, \ i \in \{1, \cdots, k\} \tag{3}$$

$$r_i^j = \frac{l_i}{c_i^j}, \ j \in \{1, \cdots, m\}, \ i \in \{k+1, \cdots, n\} \tag{4}$$

假设 n 个属性$(c_1, \cdots, c_n)$的权重向量为$(w_1 \ \cdots \ w_n)$，利用WAA算子计算方案 a_j，$j \in \{1, \cdots, m\}$的综合评价值为

$$E_j = \sum_{i=1}^{k} w_i \frac{c_i^j}{h_i} + \sum_{i=k+1}^{n} w_i \frac{l_i}{c_i^j}, \ j \in \{1, \cdots, m\} \tag{5}$$

由于 l_i，h_i，$i \in \{1, \cdots, n\}$ 不随方案集的变动而改变，所以方案集变动以后，不会影响原有方案的综合评价值，有效地消除了无关方案独立性和逆序。

3.2 保序方法2：规范化公式不随方案的增减而改变

逆序是由于规范化公式随方案集变动而引起的，方案集变动以后，保留原有方案的规范化公式不变，用原有的规范化公式计算新增方案的综合评价值。由于规范化公式保持不变，新增方案不会影响原有方案的排序，避免了无关方案独立性的违反和逆序的产生。

方案集变动前，记 $h_i' = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant m}\{c_i^j\}, j \in \{1, \cdots, m\}, i \in \{1, \cdots, k\}$；$l_i' = \min\limits_{1 \leqslant j \leqslant m}\{c_i^j\}, j \in \{1, \cdots m\}, i \in \{k+1, \cdots, n\}$，则规范化公式描述为

$$r_i^j = \frac{c_i^j}{h_i'}, \ j \in \{1, \cdots, m\}, \ i \in \{1, \cdots, k\} \tag{6}$$

$$r_i^j = \frac{l_i'}{c_i^j}, \ j \in \{1, \cdots, m\}, \ i \in \{k+1, \cdots, n\} \tag{7}$$

设 n 个属性$(c_1, \cdots, c_n)$的权重向量为$(w_1 \ \cdots \ w_n)$，利用WAA算子计算方案 a_j，$j \in \{1, \cdots, m\}$ 的综合评价值为

$$E_j = \sum_{i=1}^{k} w_i \frac{c_i^j}{h_i'} + \sum_{i=k+1}^{n} w_i \frac{l_i'}{c_i^j}, \ j \in \{1, \cdots, m\} \tag{8}$$

由于 h_i'，l_i'，$i \in \{1, \cdots, n\}$ 不随方案集的变动而改变，从而抑制了规范化公式随着方案集的变化而改变，有效地消除了逆序。

以下用实例证明上述方法的有效性和合理性。

4 算例

用文献[12]中的实例验证上述保序方法的合理性和有效性。例中 MCDM 的决策矩阵含有 5 个决策属性，其中 u_2 和 u_5 为成本属性，其他均为效益属性。5 个属性所对应的权重向量为 $(w_1 \quad w_2 \quad w_3 \quad w_4 \quad w_5) = (0.64 \quad 0.16 \quad 0.16 \quad 0.16 \quad 0.16)$。初始决策矩阵为 $\boldsymbol{D}$。

4.1 验证保序方法 1

对 3.1 中提出的保序方法进行验证。根据实际情况，假设这 5 个属性的取值区间分别为[7 000, 22 000]，[1 000, 8 001]，[5 000, 20 000]，[0.59, 1]和[0.05, 1]。

利用 3.1 中提出的方法进行规范化，得到规范化矩阵为 $\boldsymbol{D}'$。

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 8\,350 & 5\,300 & 6\,135 & 0.82 & 0.17 \\ 7\,455 & 4\,952 & 6\,527 & 0.65 & 0.13 \\ 11\,000 & 8\,001 & 9\,008 & 0.59 & 0.15 \\ 9\,624 & 5\,000 & 8\,892 & 0.74 & 0.28 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{D}' = \begin{bmatrix} 0.380 & 0.189 & 0.307 & 0.820 & 0.294 \\ 0.339 & 0.202 & 0.326 & 0.650 & 0.385 \\ 0.500 & 0.125 & 0.450 & 0.590 & 0.333 \\ 0.437 & 0.200 & 0.445 & 0.740 & 0.197 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} 8\,350 & 5\,300 & 6\,135 & 0.82 & 0.17 \\ 7\,455 & 4\,952 & 6\,527 & 0.65 & 0.13 \\ 11\,000 & 8\,001 & 9\,008 & 0.59 & 0.15 \\ 9\,624 & 5\,000 & 8\,892 & 0.74 & 0.28 \\ 20\,000 & 2\,000 & 20\,000 & 1 & 0.1 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{N}' = \begin{bmatrix} 0.380 & 0.189 & 0.307 & 0.820 & 0.294 \\ 0.339 & 0.202 & 0.326 & 0.650 & 0.385 \\ 0.500 & 0.125 & 0.450 & 0.590 & 0.333 \\ 0.437 & 0.200 & 0.445 & 0.740 & 0.197 \\ 0.909 & 0.500 & 1.000 & 1.000 & 1.000 \end{bmatrix}。$$

利用 WAA 方法计算 $\boldsymbol{D}'$ 中方案 1，2，3 和 4 的综合评价值分别为 0.394，0.372，0.420 和 0.408，方案排序为 3→4→1→2。

现在决策矩阵 $\boldsymbol{D}$ 基础上增加方案 5，其对应 5 个目标的取值分别为(20 000，2 000，20 000，1，0.1)，得到新的决策矩阵 $\boldsymbol{N}$；再次利用固定的规范化公式对 $\boldsymbol{N}$ 进行规范化，得到规范化矩阵 $\boldsymbol{N}'$，用 WAA 算子进行决策，得出 1—5 各个方案的综合评价值为 0.394，0.372，0.420，0.408 和 0.807，则方案的排序为 5→3→4→1→2。

比较方案 5 增加前后的规范化矩阵。得出 $\boldsymbol{N}'$ 中对应的 $\boldsymbol{D}'$ 部分没有发生改变，故计算方案集改变后的规范化矩阵时，只需计算新增的方案所对应的规范化向量，减少了计算量。比较方案 5 增加前后各个方案的综合评价值。得出方案集变化以后，原有方案的综合评价值没有发生改变，故只需计算新增方案的综合评价值。

比较方案 5 增加前后方案排序结果。得出方案集变化以后，原有方案的排序结果没有发生任何变化，有效地避免了逆序的产生。

保序方法 1 虽然能有效消除规范化公式带来的无关方案独立性的违反和逆序的产生，但从某种角度上讲，增加了决策者的负担，因为他们必须综合考虑各种情况给出各个目标的取值区间。

4.2 验证保序方法 2

采用保序方法 2 中所提出的规范化方法处理初始决策矩阵，规范矩阵为 $\boldsymbol{D}''$。加入方案 5 以后仍然用原有决策矩阵的规范化公式对决策矩阵 $\boldsymbol{N}$ 进行规范化，得到规范化矩阵 $\boldsymbol{N}''$。

$$\boldsymbol{D}'' = \begin{bmatrix} 0.759 & 0.934 & 0.681 & 1.000 & 0.765 \\ 0.678 & 1.000 & 0.725 & 0.793 & 1.000 \\ 1.000 & 0.619 & 1.000 & 0.720 & 0.867 \\ 0.875 & 0.990 & 0.987 & 0.902 & 0.464 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{N}'' = \begin{bmatrix} 0.759 & 0.934 & 0.681 & 1.000 & 0.765 \\ 0.678 & 1.000 & 0.725 & 0.793 & 1.000 \\ 1.000 & 0.619 & 1.000 & 0.720 & 0.867 \\ 0.875 & 0.990 & 0.987 & 0.902 & 0.464 \\ 1.818 & 2.476 & 2.220 & 1.220 & 1.300 \end{bmatrix}。$$

利用 WAA 方法计算 $\boldsymbol{N}''$ 中方案 1，2，3，4，5 的综合评价值分别为 0.814，0.807，0.873，0.850 和 1.809，方案排序为 5→3→4→1→2。

比较方案 5 增加前后的规范化矩阵、各方案的综合评价值以及方案排序结果，可以得出与保序方法 1 类似的结论，即：方案集变动以后，只需计算新增的方案所对应的规范化向量、新增方案的综合评价值，原有方案不会发生逆序。但保序方法 2 从某种角度上破坏了规范化矩阵元素取值区间[0，1]。

5 结论

文献[10]定量描述了规范化公式导致违反无关方案独立性与产生逆序。笔者在文献[10]的基础

上，指出由于规范化公式的应用使得方案集变动后，决策者判断发生了变化，从而导致前后判断的不一致，产生了逆序，并给出两种修正规范化公式消除逆序的方法。这两种方法尽管可以从某种角度消除规范化公式对方案之间独立性的破坏，但可能会增加决策者的负担，破坏规划化决策矩阵的取值区间。笔者仅以效益型规范化公式和成本型规范化公式为例，通过 WAA 算子进行说明验证。所提出的保序方法和结论可以推广到其他类型的规范化公式和其他多目标决策算子中，例如有序加权算术平均（OWA）算子、组合加权算术平均（CWAA）算子、有序加权几何平均（OWGA）算子以及组合加权几何平均（CWGA）算子等。

参考文献

[1] Zanakis S H, Solomon A, Wishart N, et al. Multi-attribute decision making: a simulation comparison of select methods [J]. European Journal of Operational Research, 1998, 107 (3): 507 ~ 529

[2] Pan J P, Rahman S. Multiattribute utility analysis with imprecise information: an enhanced decision support technique for the evaluation of electric generation expansion strategies [J]. Electric Power Systems Research, 1998, 46 (2): 101 ~ 109

[3] Fernandez E, Leyva J C. A method based on multiobjective optimization for deriving a ranking from a fuzzy preference relation [J]. European Journal of Operational Research, 2004, 154(1): 110 ~ 124

[4] Ramanathan R. Data envelopment analysis for weight derivation and aggregation in the analytic hierarchy process [J]. Computers & Operations Research, 2006, (5): 1289 ~ 1307

[5] Jerome R, Diederich B A. Survey of decision field theory [J]. Mathematical Social Sciences, 2002, 43(3): 345 ~ 370

[6] Ehlers L. Independence axioms for the provision of multiple public goods as options [J]. Mathematical Social Sciences, 2001, 41(2): 239 ~ 250

[7] Gensch D H, Ghose S. Differences in independence of irrelevant alternatives at individual vs aggregate levels, and at single pair vs full choice set [J]. Omega, 1997, 25 (2): 201 ~ 214

[8] Dennis H, Ghose G S. Improving PRETREE's predictive capabilities [J]. European Journal of Operational Research, 1997, 97(3): 465 ~ 479

[9] Fry T L, Mark N H. A monte carlo study of tests for the independence of irrelevant alternatives property [J]. Transportation Research Part B: Methodological, 1996, 30 (1): 19 ~ 30

[10] 章 玲，周德群. 规范化公式对无关方案独立性的影响[J]. 系统工程, 2005, (5): 124 ~ 126

[11] 张运峰. AHP 逆序的新探索[J]. 系统工程理论与实践, 1997, (6): 62 ~ 67

[12] 徐泽水. 不确定多目标决策方法及应用[M]. 北京：清华大学出版社, 2004

Study on Rank Preservation of the MCDM With Normalizing Formula

Zhang Ling, Zhou Dequn, Li Hongwei, Zhu Peifeng

(*College of Economics and Management*, *Nanjing University of Aeronautics and Astronautics*, *Nanjing* 210016, *China*)

[Abstract] The application of the normalizing formula will result in violations of independence from irrelevant alternatives and lead to rank reversal. In the paper, the two methods that improve the original normalizing formula to erase the rank reversal are proposed; and a MCDM example based on the WAA operator is deduced to validate the conclusion using specific data at last. The methods mentioned can also be applied into other decision operators. The application of these methods can remove the influence of the normalizing formula to the independence from irrelevant alternatives and make the decision making more reasonable and scientific.

[Key words] MCDM decision; normalizing; violations of independence from irrelevant alternatives; rank preservation; rank reversal