学术论文

统一集论与人工智能

张　江，林　华，贺仲雄
（北方交通大学，北京　100044）

［摘要］　通过综合经典集合、模糊集合、可拓集合、Vague 集合、粗糙集合、集对分析、FHW（模糊灰色物元空间）、FEEC（模糊可拓经济控制）等多种理论，提出了统一集概念，并详细讨论统一集的各种运算以及相关性质。从分析集合理论和人类思维形式之间的关系入手，把统一集理论初步应用到模式识别、聚类分析、逻辑推理、机器学习、智能决策等多种人工智能领域，指出了集合论及其运算系统与逻辑推理系统的等价关系。统一集能对现有的理论进行总结、统一，还为开辟崭新的集合论、逻辑推理方法提供很好的理论基础。

［关键词］　统一集；人工智能；集合；运算；逻辑推理
［中图分类号］　V475；V476　［文献标识码］　A　［文章编号］　1009-1742（2002）03-0040-08

1　引言

人工智能是诞生于 20 世纪 50 年代的新兴学科，经历了 50 多年的时间，已显示出其蓬勃的发展能力和广阔的应用前景。人工智能研究的目的是用机器模拟人脑的思维。目前大致可分为三个学派：符号学派、联结学派和行为学派，各自通过不同的途径来实现机器的智能。人类的思维是多样性的，很多思维现象体现为对确定性信息的处理，而更多的现象却体现了各种各样的不确定性。这些不确定性包括模糊性、不精确性、不完整性、可变化性等等。因此，人工智能系统应能很好反映人脑思维的不确定性，并对各种不确定性信息进行处理。

集合论是诞生于 19 世纪末的一门学科，发展到今天，它一方面奠定了数学大厦的基础，另一方面也有了很大的扩展，产生了包括模糊集、可拓集、粗糙集、Vague 集合、集对分析、FHW（模糊灰色物元空间）、FEEC（模糊可拓经济控制）等多种新型的集合论。每一种新集合论的产生都为人类思维的一种不确定性的描述提供了很好的手段，并为人工智能处理一类不确定性信息提供了很好的方法。例如，模糊集描述了思维的模糊性；可拓集描述了思维的可拓性；粗糙集描述了思维的不精确性等等。而经典集合恰恰描述了人们确定性思维。可以说，一种集合论对应着人类的一种思维方法。

人类思维的基础体现在对一个事物的认识上，这种认识又体现在对任意一个事物的隶属上，而隶属这个概念正是各种集合论所研究的核心问题。综合各种集合论思想，不难发现一些共同的性质。因此，有必要站在历史的高度综合研究各种集合论，从而诞生了初步的统一集论。

2　统一集以及相关的概念

2.1　统一集及其表示

人类思维认识的本质体现在事物与概念之间的隶属上。为了描述这种隶属关系，首先，需要确定一个讨论的范围；其次，对讨论范围内的任何一个事物都定义一个很好的描述，描述的全体一般构成了概念的集合；第三，这些描述可能还要受到一些限制。因此，统一集定义为

$$S=(A,B,F,J),\tag{1}$$

其中：S 是一个统一集；A 是一个非空的经典集合，定义所要讨论的事物范围；B 是一个非空的经典集合，对 A 中所有元素的描述构成集合；F

［收稿日期］　2001-10-25；修回日期　2001-11-12
［基金项目］　“八六三”高科技发展计划资助项目（863-306 ZD06-03-6）
［作者简介］　.张　江（1972-），男，北京市人，北方交通大学硕士研究生

是一个 A 到 B 的映射，它给 A 中所有的元素都定义了描述；J 是一个对 F 构成约束的界壳[1]，它可以是一个集合、一个不等式、一个等式或若干谓词的组合。界壳论是我国学者曹鸿兴提出的一门新兴的系统工程理论，是关于系统周界的一般性理论。界壳抽象出系统边界的普遍共性，它适合描述很多系统，包括经济系统、数学系统、自然系统等等。

在这个模型中，为了对集合 A 中的元素进行描述，选择了另一个集合 B。一般情况下，B 选择的都是性质较熟悉的集合。F 构成了对 A 的描述，虽然对 F 的约束可以写到映射 F 中，但这里把约束独立出来作为统一集的一个要素 J。

在统一集中，一个元素和它的描述是分不开的。因此，A 中的任意一个元素 a 都可以表示成二元组的形式：

$$(a, F(a)), a \in A, F(a) \in B。\tag{2}$$

这里，$F(a)$ 被认为是一种广义的隶属度；F 被看成一种广义的隶属函数。A 中的所有元素都可以用上面的二元组表示。因此，统一集 S 还可以表示为

$$S = \{(a, F(a)) \mid a \in A, F(a) \in B, F(a) \text{ 满足约束 } J\}。\tag{3}$$

2.2　统一集的扩展

在式 (2) 中，a 表示为 A 中的一个元素，它可以是一个数、一个事物，也可以是一个集合，同样，a 也可以是一个统一集或若干统一集的组合。同理，$F(a)$ 也可以是一个统一集或若干统一集的组合。当元素 a 或 $F(a)$ 是统一集或组合时称 S 为一个被扩展的统一集。有了扩展，使统一集模型的表达能力更加丰富。统一集 S_1 中的任意一个元素 S_2 也可以是统一集，而 S_2 中的元素 S_3 又可以是一个统一集……。这样就有了统一集的嵌套，把嵌套的深度定义为统一集的阶。

一阶统一集的具体例子：

$$S_1 = \{a, F_1(a) \mid a \in A_1, F_1(a) \in B_1\},\tag{4}$$

其中 $a = (A_2, B_2, F_2, J_2)$ 是一个统一集。

如果用约束界壳 J 表示集合，那么这个集合可以是经典集合或模糊集合等等，也可以用统一集的形式来表示，但是，统一集的阶与 J 无关。

2.3　统一集与各种集合论

有了统一集的模型，可以用一种统一的形式来表达其他各种各样的集合，并包容多种理论。

2.3.1　普通统一集　0 阶扩展统一集称为普通统一集。在普通统一集中，集合中的元素是基本的，经典集合、模糊集合、可拓集合、Vague 集合、FHW、FEEC 等都可以认为是普通的统一集。

1) 经典集合[2]

$$S_{\text{crisp}} = (U, \{0,1\}, C(x), \varnothing),\tag{5}$$

其中 $A = U$ 为经典集合的论域，$C(x)$ 为特征函数，B 是 $\{0, 1\}$，约束为空集 $\varnothing$。

2) 模糊集合[3]

$$S_{\text{fuzzy}} = (U, \{0,1\}, \mu(x), \varnothing),\tag{6}$$

其中 $A = U$ 是模糊集合的论域，$\mu(x)$ 是隶属函数，它描述 U 中任意一个元素隶属于一个模糊概念的程度，B 为 $[0, 1]$，约束为空集 $\varnothing$。

3) 可拓集合[4]　是为了描述人类思维中的可拓性也就是可变化性、可拓展性的集合论。综合物元分析可拓论有望模拟人类的创造性思维。

$$S_{\text{extension}} = (U, (-\infty, +\infty), k(x), \varnothing),\tag{7}$$

其中：$A = U$ 是可拓集合的论域，$k(x)$ 是关联函数，它描述 U 中的任意一个元素的可拓程度，B 为实数域，约束为空集 $\varnothing$。

4) Vague 集合[5]　Vague 集合是从 Fuzzy 集合中直接扩展出来的，它弥补了传统 Fuzzy 集合的只能描述事物正隶属度的不足，而是从隶属于一个概念的真假两个方面来考虑。用统一集可以把 Vague 集合表示为

$$S_{\text{vague}} = (U, [0,1]^2, (t(x), f(x)), t(x) + f(x) \leqslant 1),\tag{8}$$

其中：U 是 Vague 集合的论域，B 是单位正方形，F 是由 $t(x)$ 和 $f(x)$ 表示的一个对子，$t(x)$ 表示真隶属度，$f(x)$ 表示假隶属度，$t(x)$ 和 $f(x)$ 满足约束 $t(x) + f(x) = 1$，这个约束写入界壳 J 中。

5) 模糊灰色物元空间 (FHW)[6]　FHW 是一套用于宏观复杂大系统的决策支持系统，它融合了模糊数学、可拓学、灰色系统、思维科学等多种学科，曾在长江三峡的决策中产生了很好的实际应用效果。在 FHW 对方案进行评比选优时，每一个方案都可以用一组模糊集合来对这个方案从当前、潜在、优劣度等多个方面进行评价。一个 FHW 空间用统一集的形式表示为

$$S_{\text{FHW}} = (U, [0,1]^5, (\mu, p, a, q, b), J),\tag{9}$$

其中：$A = U$ 是论域包含了所有的待评价的方案，F 是一个五元组，其中任何一个元素都是 U 上的函数，B 是一个五维的单位超立方体，$(\mu, p, a, q, b,)$ 分别表示 U 中元素的总体评价、当前的优

度、潜在的优度、当前的劣度、潜在的劣度，这些参数既反映了评价方案的当前的优劣度又反映了潜在的、未来的优劣，因而它对方案的评价更加科学；决策问题受到的约束为 J。映射中的每一个参数都是一个模糊隶属度，这些参数的获得都是综合了 Delphi 决策方法，由若干个专家打分并进行最后综合而得来。

6) 模糊可拓经济控制（FEEC）[7] FEEC 是一种模糊可拓经济控制的方法，它结合了可拓学、模糊控制技术、集对分析和其他一些最新系统科学理论，将经济系统看作一个开放的宏观复杂大系统，运用从定性到定量综合集成法进行经济分析和控制研究。进行系统分析时，首先要建立一个模糊可拓经济空间（FEES），它用统一集的形式表示为

$$S_{\mathrm{FEEC}} = (W \times V, W \times V, T, J), \tag{10}$$

其中 W 和 V 分别表示实力集和虚力集[4]，$\times$ 表示经典集合的直积运算，T 是转换桥[4]，它是一个虚、实空间中的变换。J 是经济约束条件，包括时间、人力、物力、工具、技术等。

任何一个经济实体都可以用它的实力状态和虚力状态表示，要研究的是在约束 J 下对实力和虚力进行转换。FEEC 研究经济系统的特点是利用模糊数学、可拓学、集对分析、混沌学、灰色系统以及基于 Fuzzy 方法的软科学决策支持系统等最先进的理论，建立一种定性与定量综合的控制方法。

2.3.2 一阶统一集 在一阶统一集中，任何一个统一集的元素仍然都是一个统一集。

1) 集对分析[8]。集对分析是通过比较两个集合所构成集对的同、异、反三个方面，为集对进行定性与定量相结合的描述。如果考虑两个论域中所有可能的集对，可以用统一集来描述这些集对类：

$$S_{\mathrm{SPA}} = (P \times Q, [0,1]^3, (a,b,c), a+b+c=1), \tag{11}$$

其中：P 是论域 U_1 上的幂集，Q 是论域 U_2 上的幂集，$P \times Q$ 的任意一个元素构成了一个集对，这个集对都被 $B = [0,1]^3$ 中的一个元素描述，F 是一个三元组，分别反映了集对的同异反，约束是 $a+b+c=1$。

S_{SPA} 中的任意一个元素可以表示为：$r = ((S_1, S_2), (a, b, c))$，其中 (S_1, S_2) 是一个集对，(a, b, c) 是这个集对的同一度、差异度、对立度。S_1 和 S_2 都是经典集合，用统一集表示为

$$S_1 = (U_1, \{0,1\}, C_1(x), \varnothing),$$

$$S_2 = (U_2, \{0,1\}, C_2(x), \varnothing)。 \tag{12}$$

集对的统一集表示法反映了这样的思想：任意给定讨论范围内的一个集对，都用一组 a，b，c 的值与其对应，分别反映集对中两个集合的统一、差异和对立的程度。

2) 粗糙集合类[12]。

$$S_{\mathrm{rough}} = (P, P \times P, (F_1 : P \to P, F_2 : P \to P), R), \tag{13}$$

其中 P 是论域 U 的幂集，$P \times P$ 的元素是一对 U 上的子集合，分别表示 P 中元素的上下近似集。$F_1(X) = \bigcup_{[W_i] \cap A \neq \varnothing} [W_i]$，其中 $[W_i]$ 表示由等价关系 R 在 U 上形成的等价类。这个函数的作用是把 U 中的任何一个子集 X 映射到 U 上的另一个子集 $\bigcup_{[W_i] \cap A \neq \varnothing} [W_i]$ 作为 X 的上近似集合，同理，$F_2(X) = \bigcup_{[W_i] \subseteq A} [W_i]$ 作为 X 的下近似集合，约束 J 这里为等价关系 R。

值得一提的是，上面表达的仅仅是粗糙集合类，而传统意义上的粗糙集[9]恰恰是 S_{rough} 中的一个元素，它可以表示为

$$r = (x, (R^-(X), R_-(X))), \tag{14}$$

其中 X，$R^-(X)$ 和 $R_-(X)$ 都是经典集合，分别表示为统一集形式：

$$X = (U, \{0,1\}, C_1(x), \varnothing),$$

$$R^-(X) = (U, \{0,1\}, C_2(x), \varnothing),$$

$$R_-(X) = (U, \{0,1\}, C_2(x), \varnothing)。 \tag{15}$$

3) 模糊粗集[10,11]和广义粗集[12]。如果式（15）中的 X，$R^-(X)$ 和 $R_-(X)$ 都是模糊集合，那么，r 就是一个粗糙模糊集。其中，X，$R^-(X)$ 和 $R_-(X)$ 表示为统一集的形式：

$$X = (U, \{0,1\}, \mu_1(x), \varnothing),$$

$$R^-(X) = (U, \{0,1\}, \mu_2(x), \varnothing),$$

$$R_-(X) = (U, \{0,1\}, \mu_3(x), \varnothing)。 \tag{16}$$

式（13）相应地变成粗糙集合类，可以表示为

$$S_{\mathrm{rough}} = (F, F \times F, (F_1 : F \to F, F_2 : F \to F), J)。 \tag{17}$$

F 为论域 U 上的所有的模糊集合，映射 F_1 和 F_2 也要变换成相应的模糊粗集定义的形式。并且约束中 R 也成为模糊的划分关系。

在式（13）的定义中，如果对约束关系 R 不进行限制，并修改相应的映射形式 F_1，F_2，那么，S_{rough} 中的任何一个元素就是一个广义的粗集。

2.4 统一集上的运算

在一般的集合论中，都有关于集合与集合之间的运算，例如，集合的交、并、补。无论什么样的运算，都是把一个或若干个集合映射到另一个集合。因此，把集合的运算看成是这个集合所在论域上的幂集代数运算。在此，给出统一集的同类集合、幂集等相关概念的定义。

定义1（同类集合）　给定2个统一集：$S_1=(A_1, B_1, F_1, J_1)$，$S_2=(A_2, B_2, F_2, J_2)$。如果 $A_1=A_2=A$，并且 $B_1=B_2=B$，$J_1=J_2=J$，那么称 S_1 与 S_2 是定义在 A 上的同类集合。

定义2（幂集）　在 A 上与 $S=(A, B, F, J)$ 同类的所有集合的总和称为 S 的幂集，记为 $P(S)$。

不难看出 $P(S)$ 是一个经典集合，同样可以写作统一集的形式

$$S_{\mathrm{P(S)}} = (P(S), \{0,1\}, C(x)=1, \varnothing)。\tag{18}$$

定义3　设给定两个定义在 A 上的同类统一集 $S_1=(A, B, F_1, J)$，$S_2=(A, B, F_2, J)$，其幂集都是 $P(S)$，则 $P(S)$ 上的一个二元运算定义为 $P(S)$ 上的映射 σ：$P(S)\times P(S)\rightarrow P(S)$。该二元运算是两个统一集 S_1 和 S_2 的二元运算。仿照此定义，不难给出统一集的一元运算、n 元运算的定义。

普通集合的交、并、补等运算可以描述成统一集的运算形式

$$r_1 = (x_1, F_1(x_1)), r_2 = (x_2, F_2(x_2)),$$
$$x_i \in A, f_i(x_i) \in B, i = 1,2。\tag{19}$$

r_1 为 S_1 中的元素，r_2 为 S_2 中的元素。如果要求 $x_1=x_2=x$，则 σ 作用在这2个元素上产生的像：

$$r_u = \sigma(r_1, r_2) = (x, F(x)), x \in A, F(x) \in B。\tag{20}$$

由此可见，映射 σ 实际上仅仅作用在 A 中的元素描述上，也就是：

$$\sigma = \sigma_{\mathrm{B}}，其中\ \sigma_{\mathrm{B}}: B \times B \rightarrow B。\tag{21}$$

这样，可以通过研究 B 中运算的性质来研究集合的运算。

如上所述，统一集的运算可以看成统一集幂集上的代数运算，而 n 阶统一集的幂集是 $n+1$ 阶的统一集，也就是说 n 阶统一集的运算可以看成 $n+1$ 集合上的代数运算。因此，对于一般的统一集，可定义该集合上的代数运算。

定义4（统一集的直积）　设两个统一集：S_1 和 S_2，r_1 和 r_2 分别是 S_1 和 S_2 中的任意两个元素，则 $S_1\times S_2=\{< r_1, r_2>|\ r_1$ 是 S_1 中的元素，r_2 是 S_2 中的元素$\}$，称为 S_1 与 S_2 的直积，其中 $<,>$ 表示一个有序对。$S_1\times S_2$ 是一个经典集合。

定义5（统一集上的二元运算）　设 $S=(A, B, F, J)$ 为一个统一集，其上的任意两个元素为 $r_1=(x_1, F(x_1))$ 和 $r_2=(x_2, F(x_2))$，S 上的二元运算定义为 σ：$S\times S\rightarrow S$，也可写成

$$\sigma(r_1, r_2) = r_\sigma = (x_\sigma, F(x_\sigma)) = (\sigma_{\mathrm{A}}(x_1, x_2),$$
$$\sigma_{\mathrm{B}}(F(x_1), F(x_2))),\tag{22}$$

式中 $x_\omega\sigma\in A$，$F(x_\sigma)\in B$。由此可见，σ 是由两部分构成的，即

$$\sigma = (\sigma_{\mathrm{A}}, \sigma_{\mathrm{B}}), \sigma_{\mathrm{A}}: A \times A \rightarrow A, \sigma_{\mathrm{B}}: B \times B \rightarrow B。\tag{23}$$

如果 S 是一个一阶以上的统一集，那么，σ_{A} 就是统一集运算。一元运算、n 元运算都可仿照上面的方法给出定义。

2.5 关于界壳 J 的讨论

前面提到，J 是一个界壳[1]。而界壳构成了对一般系统的约束，这个约束又可写成集合、等式、不等式、谓词以及谓词组合的形式。界壳抽象出了这些约束的一般性质，并且作为一个独立的研究对象来讨论它的一些性质。

设 S_0 为 n 维欧几里得空间 R^n 中的一个超球面，其半径为1，在 S_0 上存在有限个界门 G_m，$m<\infty$，则称 S_0 构成了一个标准界壳

$$J = \{S_0, 1, G_m\}。\tag{24}$$

称由任一界壳 B 到 J 的一个映射 W 为壳函数。界壳有一个很重要的称为界壳套[1]的概念，也就是界壳之间的蕴含或包含关系。为了说明界壳套的应用，以讨论经典集合的代数系统为具体实例。

把经典集合 U 以及定义在 U 上的一个二元运算 σ 组成的代数系统，看成一个统一集，这个统一集可以写成

$$S = (U \times U, U, \sigma, J)\tag{25}$$

如果对 S 中的 J 给予不同的限制，那么就会构成不同的代数系统。设有第 i 种限制为 J_i，那么，相应的代数系统为 S_i。如果 J_i 如下面的形式：

J_1：$\varnothing$，则 S_1 为群胚。

J_2：$\forall a, b, c \in U$，有 $(a\sigma b)\sigma c = a\sigma(b\sigma c)$ 即结合律，则 S_2 为半群。

J_3：满足 J_2 的约束，并且，$\exists e$，$\forall a \in U$，有 $a\sigma e = e\sigma a$，那么 S_3 就是幺半群。

J_4：满足 J_2，J_3 的约束，且 $\forall a \in U$，$\exists a^{-1} \in U$，有 $a\sigma a^{-1} = a^{-1}\sigma a = e$，那么 S_4 就是群。

J_5：满足 J_2，J_3，J_4 中的约束，且 $\forall a$，$b \in U$，有 $a\sigma b = b\sigma a$，则 S_5 为交换群。

显然，$J_1 \subset J_2 \subset J_3 \subset J_4 \subset J_5$ 形成一个界壳套，而构成的代数系统也有这样的包含关系，$S_5 \subset S_4 \subset S_3 \subset S_2 \subset S_1$。因此，不同的界壳也可以导出不同的集合或运算系统。它在统一集的构成中起了关键的作用。

3 统一集在人工智能中的应用

统一集可以对人类的各种思维进行统一的表示，把它应用到人工智能中将会有广阔的前景[13]。当前，人工智能的研究领域主要包括模式识别、聚类分析、逻辑推理、机器学习、智能决策等。把统一集理论应用到这些领域，旨在抛砖引玉。

3.1 统一集与模式识别

模式是指存在于时间或空间中的事物所反映出来的信息，如果可以区别它们是否相同或是否相似，都可以称为模式[14]。模式识别体现在能否通过给定的信息判断出事物的分类或归属。因此，模式识别的关键是对事物所反映出来的隶属关系的判断。用计算机进行模式识别，首先对模式进行机器的内部表示，然后根据当前事物所反映出来的信息进行识别。统一集模型所反映的正是事物之间的隶属关系。对于任何一个统一集 $S = (A, B, F, J)$，为了对 A 中的概念进行描述，选择集合 B，并把每一个 A 中的元素 x 都赋予 B 中的一个描述 $F(x)$。因此，对任意一个 S 中的元素都可以表示成 $(x, F(x))$ 的形式，这里，$F(x)$ 可以看成是一种广义的隶属度。S 反映人脑的一种思维模式，在这种思维模式下的一个模式可表示成一个 S 统一集。要考察的 n 个概念往往都是在一个给定的论述范围内讨论的，因而可表示成 n 个统一集，这些统一集都是同类的，并具有下面形式：

$$S_i = (A, B, F_i(x), J), i \in [1, n]。 \quad (26)$$

3.1.1 直接识别[15] 设给出的一个模式是 A 中的元素 x，那么，对 x 的识别反应在这个 x 应该归为 n 类中的哪一个。首先，计算 x 在这 n 类中的广义隶属度，它们可以构成一个向量 $\boldsymbol{V} = (F_1(x), F_2(x), \cdots, F_n(x))$，反映 x 对于 n 种模式的隶属情况，而所关心的是要把它归为哪一个类。如果说 x 归于第 i 类，那么，可用一个布尔向量表示为 $\boldsymbol{U} = (0, 0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$，其中 1 是向量中的第 i 个元素。因此，下面要寻找的是一个映射 k，它把 $\boldsymbol{V}$ 变成 $\boldsymbol{U}$，映射 k 要视具体情况而定。例如，在模糊模式识别时，k 反映的是最大隶属原则，而在很多情况下，k 也可以是一个训练好的神经网络。

3.1.2 间接识别[15] 如果给定的待识别事物也用统一集 S_x 表示时（S_x 也是与 S_i 同类的统一集），这比上面叙述的方法复杂了，因此称其为间接识别。设 $S_x = (A, B, F_x, J)$，并设 A 中有 m 个元素，那么，A 中的任意一个元素 x_j 就会在 S_x 中有一个对应的广义隶属度 $F_x(x_j)$，这个元素在第 i 个已知模式的统一集中也有一个对应的广义隶属度 $F_i(x_j)$，这两个广义隶属度构成了一个对子 $(F_x(x_j), F_i(x_j))$。这样对 A 中的任意一个元素和所有的 n 个统一集，可构成一个矩阵 $[R]_{ij}$，$[R]_{ij}$ 中的每一个元素都是一个广义隶属度所组成的对子。所关心的结果依然是待识别的对象归于哪一类，也就是找到布尔向量 $\boldsymbol{U}$，这也可通过映射 k 来完成，k 可写成 $k([R]_{ij}) = \boldsymbol{U}$。模糊间接模式识别的方法是把 k 分成两步来完成，先把所有 R 中列向量映射成一个实数，从而构成一个行模糊向量，再把这个行模糊向量映射成布尔向量。

3.2 统一集与聚类分析

给出统一集的聚类分析方法[15]前，给出统一集关系的定义。

定义 6（统一关系） 设有两个经典集合 A_1、A_2，如果一个统一集 $S = (A, B, F, J)$ 中的 $A = A_1 \times A_2$，那么称 S 为 A_1 与 A_2 上的统一关系。其中 S 中的任意一个元素写成

$$r = ((a_1, a_2), F(a_1, a_2))。 \quad (27)$$

对经典集合 A 中的元素进行聚类分析是指找出一个对经典集合 A 的划分，这样可把 A 中的元素分成若干个组，每一组就是一个类。从经典集合论中知道，一个 A 上的划分和定义在 A 上的等价关系是一一对应的。而一个 A 上的等价关系可以用一个布尔划分矩阵 $\boldsymbol{R}$ 来表示。为了描述一个集合 A 上的任意两个元素之间的关系，可以运用不同的思维方式，而这些思维方式等同于一个 A 上的统一关系。也可为每一个统一关系定义一个统一关系矩阵，矩阵中的每一个元素都是一个广义隶属

度。因此，为了最终的聚类，找到最终的映射 k，把统一关系矩阵映射成 A 上的布尔划分矩阵。同样，映射 k 的确定可采用经典的一些运算方法，也可用神经元网络、遗传算法等方法来实现。

3.3　统一集与逻辑推理

众所周知，集合论与逻辑是分不开的。经典集合论导致了数理逻辑的产生，模糊集合论导致了模糊逻辑的产生……。因此，不难得出结论，一种特定的集合论对应一种特定的逻辑。逻辑是由命题和推理构成的，如果把命题类比为集合，把推理类比为集合之间的运算，就可把逻辑与集合论等价起来了。例如，经典集合以及由经典集合定义的交、并、补的运算系统与数理逻辑推理系统等价。集合对应着命题，而集合之间的交、并、补运算对应着命题之间的合取、析取、否定的运算，命题的真值可以被看成元素与集合之间的隶属。因此，在数理逻辑中，命题只有真、假两种值，这是因为经典集合中的元素只有属于和不属于两种概念。而模糊逻辑是一种无穷真值的逻辑，因为，每个模糊命题的真值都是一个 [0，1] 区间中的数，这也正是模糊集合所反映的隶属度范围。

在此不难得出结论，人脑的一类思维方法可以被看成一种形式的统一集，而一种统一集所反映出来的隶属关系和集合之间的运算则对应了一种形式的逻辑体系。给定一个统一集 S，并且在 S 上定义了若干个统一集的运算，则构成一个统一集的运算系统，可表示为

$$\Gamma = (P(S),\ u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_n), \tag{28}$$

其中 S 是 $P(S)$ 表示 S 的幂集，u_1，…，u_n 是定义在 $P(S)$ 上的运算。这个运算系统等价于一个逻辑推理系统，可写为

$$\Psi = (Z,\ l_1,\ l_2,\cdots,\ l_n), \tag{29}$$

其中：Z 为系统中所有的命题的集合，l_1，…，l_n 是逻辑命题的连接运算，与上面 u_1，…，u_n 是一一对应的。这样，所有逻辑推理都可以等价成集合与集合之间的运算。

值得讨论的是对于一类特殊的非普通统一集 $S = (A, B, F, J)$，其中 $B = A^n$，表示 B 是 A 的 n 重直积。因此，F 可分成 n 个分量 $(F_1,\ F_2,\ \cdots,\ F_n)$，其中每一个分量都是一个作用在 A 上的变换。而 A 中的任意一个元素 X 本身就是一个统一集。因此，根据上面的论述，这些 X 以及不同 X 之间的运算，可构成集合运算系统 Γ，并且等价于一种逻辑推理系统 Ψ。自然地可以把 F_i 作为一种变换加到 Γ 中，对应的也就是在逻辑系统 Ψ 中定义了一种新型的运算。

为此，可以将粗糙集合与模态逻辑的等价作为具体例子进行说明[16]。前面已经论述了可以将粗糙集合类看成统一集：

$$S_{\text{rough}} = (P, P\times P, (F_1 : P \to P, F_2 : P \to P), R), \tag{30}$$

其中：P 是论域 U 上的幂集，$P\times P$ 中的元素是一对 U 上的子集合，分别表示集合的上下近似集，J 为 U 上的等价关系 R。这里 $B = A^2$，也就是 $n = 2$，可以看到 F_1 和 F_2 都是 P 上的一个变换。P 中的任何一个元素都是一个经典集合，可以给这些集合定义运算，设为普通的交、并、补。那么，F_1、F_2 可以看成是 P 中的变换，把它加入普通集合的运算系统中。这样，定义了一个集合运算系统：$\Gamma = (P,\ \cap,\ \cup,\ \sim,\ F_1,\ F_2)$，这个集合运算系统等价于模态逻辑系统 S_5：$\Psi = (\varnothing,\ \wedge,\ \vee,\ \neg,\ \Diamond,\ \Box)$，见表 1。

表 1　Γ 和 Ψ 的比较

Table 1　Comparison of Γ and Ψ

$\Gamma = (P,\ \cap,\ \cup,\ \sim,\ F_1,\ F_2)$	$\Psi = (\varnothing,\ \wedge,\ \vee,\ \neg,\ \Diamond,\ \Box)$
子集 A，B，$\cdots \in P$	命题 p，q，$\cdots \in \varnothing$
$\cap$	$\wedge$
$\cup$	$\vee$
$\sim$	$\neg$
F_1	$\Diamond$（可能）
F_2	$\Box$（必然）

若按照统一集的形式定义一种新的集合，就相应地定义了一种新形式的逻辑。反之，给出一种形式的逻辑系统，可以找到与它对应的统一集形式运算系统。值得讨论的是统一集中的约束界壳 J，当把统一集运算系统等价为逻辑推理系统时，统一集的约束 J 等价于逻辑推理中的约束作用。因此，约束的逻辑也可在统一集中找到对应的概念。

3.4　统一集与机器学习

机器学习[13]是当前人工智能研究中的一个热门课题。统一集作为一种统一的对人类思维各种形式描述的模型，对于模拟人脑的学习的能力显然也是一个很有力的工具。统一集与机器学习的关系主要体现在两个方面：机器学习的目的是得到统一集模型，用统一集模型构造出机器学习的方法。

用统一集可以表示人类不同的思维方法，对一

个问题的描述就可用统一集的模型。一个统一集模型 $S=(A,B,F,J)$ 有四个元素，一般认为描述问题范围或论域的 A 是已知的，剩下的3个元素 B，F，J 都是不容易建立的。这里，可通过外部输入的专家经验，也可利用机器学习的方法，来确定各种要素 B，F，J。在一些传统的机器学习中，要学习的参数可能很少。比如用神经网络的方法学习模糊集合中的隶属度，要搜索的空间就是［0，1］区间。而这里由于统一集有更加广阔的形式，所以，待搜索的空间会更加广阔，对于问题的描述有了更加广泛灵活的形式。如对一个概念进行学习，传统的机器学习方法仅仅提供建立模糊集合的形式，而用统一集时，根据问题的具体情况，机器会自动学习采用什么样的问题描述域 B，以及采用什么样的映射形式 F 等等。由此，通过学习建立的模型将会有更好的应用效果以及推广范围。

另外，统一集理论还为创建新的学习算法提供了很好的途径。传统的粗糙集合的机器学习方法是利用对一个二维的条件决策表（CD表）进行化简，从而得到简单的规则而达到从给定的数据中得出知识的目的。文献［17］中讨论了一种基于模糊描述的CD表的学习方法，文献［18］介绍了一种包含Vague值的CD表的学习方法。不难看出，Rough集合、模糊集合、Vague集合都是统一集的特例。如果把CD表中的值扩展成任意描述，那么，也可以得到统一集下的CD表学习算法（略）。

3.5 统一集与智能决策

随着科技的进步，人们面临的将是越来越复杂的宏观复杂大系统[19]，统一集作为一种模拟人类各种思维方式的模型肯定会为智能决策提供新的方法。当分析宏观复杂大系统时，为了描述系统的各种性质、各个方面，可能要建立很多种统一集。FHW和FEEC都是这样的统一集的特例。因此，为了获得对宏观复杂大系统的描述，往往要用到多种类型的统一集，并且还能利用统一集的可嵌套性质组合各式各样的集合，这样也有可能诞生新的集合论。而根据集合运算系统与逻辑推理系统等价的性质，也会诞生出新的逻辑推理方法。

另外，在考虑复杂的智能系统时，约束 J 是需要考虑的一个重要的因素。根据界壳论[1]，也可对不同界壳的各种不同性质进行讨论。例如，利用界壳套的概念，可为对系统的约束定义不同的约束级别，从而为解决问题得出新的途径。再有利用界壳中存在界门的性质，也可为通过控制界门来实现对系统的内部控制[20]。

综合上面的讨论，统一集论应用到宏观复杂大系统时可以总结为图1所示。由图1不难看出，这套基于统一集的分析方法，适用于宏观系统的决策问题，也是利用统一集解决一般问题的方法。

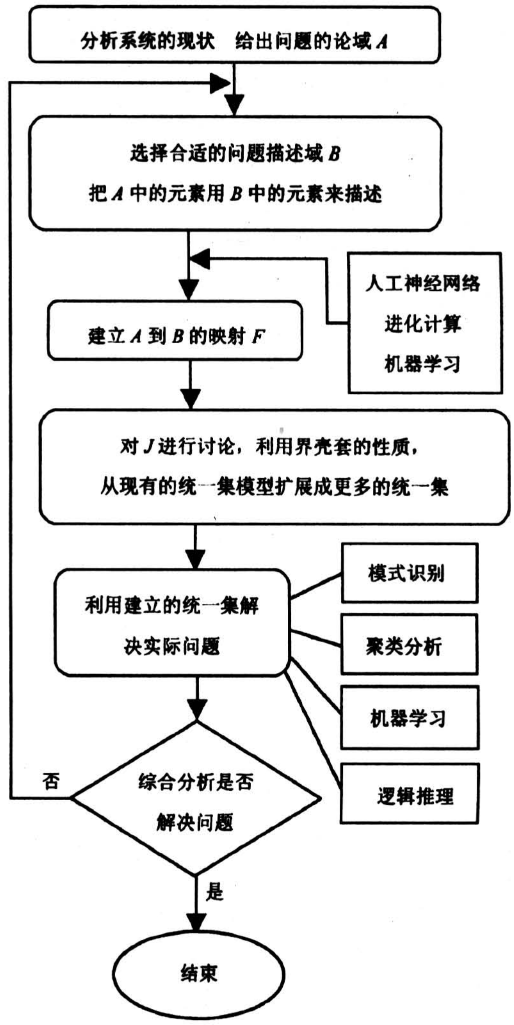

图1 统一集在宏观复杂系统中的应用

Fig.1 Application of all set in macro complex system

4 结语

通过本文的论述，可以清楚地看出，统一集给出了当前多种集合论的统一描述形式，对集合论所共有的一些运算性质进行了讨论，并结合在人工智能的几个方面的应用进行了初步探讨。然而一个理论仅仅能够包容现有的理论是不够的。有了统一集论的形式，不仅可对当前的各种集合论进行解释，

而且还可按照统一集论的方法给出新的集合类型的定义。如果把现有的多种集合论相互结合，也可提出更多的集合论形式。由于一种统一集对应人类的一种思维模式，所以为了使人工智能技术能够模拟人的思维，统一集是一个必不可少的工具。

参考文献

[1] 曹鸿兴．系统周界的一般理论——界壳论[M]．北京：气象出版社，1997
[2] 徐浩磐，惠永涛，宋方敏．离散数学及其在计算机中的应用[M]．北京：人民邮电出版社，1997
[3] Zadeh L A. Fuzzy sets, inform [J]. Control, 1965, (8): 338～353
[4] 蔡　文．物元模型及其应用[M]．北京：科学技术文献出版社，1994
[5] Gau Wenlung, Buehrer D J. Vague sets [J]. IEEE Transaction on System, Man and cybernetic, 1993, 23 (2): 610～615
[6] 贺仲雄，隋志强．模糊灰色物元空间决策系统 [J]．系统工程与电子技术，1986，(7)：1～11
[7] 贺仲雄，魏小涛．模糊可拓经济控制 [J]．北方交通大学学报，1996，(3)：657～661
[8] 赵克勤．集对分析及其应用 [M]．杭州：浙江科学技术出版社，2000
[9] Pawlak Z. Rough set [J]. Intl J of Information and Computer Science, 1982, (11): 341～365
[10] Banerjee M. Roughness of a fuzzy set [J]. Information Sciences, 1996, 93(1): 23～29
[11] 曾黄麟．粗集理论及其应用——关于数据推理的新方法 [M]．重庆：重庆大学出版社，1996
[12] 张文修，吴伟志，梁吉业，等．粗糙集合理论与方法 [M]．北京：科学出版社，2001
[13] 史忠植．高级人工智能 [M]．北京：科学出版社，1998
[14] 边肇祺，张学工．模式识别 [M]．北京：清华大学出版社，2001
[15] 贺仲雄．模糊数学及其应用 [M]．天津：天津出版社，1983
[16] 陆汝钤．世纪之交的知识工程与知识科学 [M]．北京：清华大学出版社，2001．289～291
[17] Slavka, Bodjanova. Approximation of fuzzy concepts in decision making [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1997, 85: 23～29
[18] 马志峰，邢汉承，郑晓妹．不完整 Vague 决策表中的近似集合学习方法 [J]．计算机研究与进展，2000，(9)：1050～1057
[19] Zhang Wanjun, Wang Zhenyu, Zhao Yi, et al. On fuzzy extension decision system of the large-scale system [A]. WCICA2000 Proceedings of the 3rd World Congress on Intelligent Control and Automation [C], 2000
[20] 李　华，刘　峰，贺仲雄．多维界壳约束下的模糊可拓经济控制 [J]．中国工程科学，2001，3(8)：52～57

All Set and Artificial Intelligence

Zhang Jiang, Lin Hua, He Zhongxiong
(*Northern Jiaotong University*, *Beijing* 100044, *China*)

[**Abstract**] This paper presents a brand new set theory, All Set theory, which is the united set form of the current set theories including crisp set, fuzzy set, extension set, vague set, rough set, set pair analysis, FHW (fuzzy gray matter - element), FEEC(fuzzy extension economic control) and so on. The operation of the all set is also discussed in detail. A kind of style of the human being's intelligence can be described by a kind of set form, thus all set is the united form. An all set is comprised of four parts, that is (A, B, F, J). A is the universe of the problem discussed. One of the elements in A can be described by an element of B. F is the map from A to B. And J restricts F. From this model, the concept of subjection that is the basic conception of human's intelligence can be simulated. Hence the wide application of all set theory in the field of artificial intelligence including pattern recognition, clustering, logic, machine learning, intelligent decision, etc., can be developed. Especially the relation among all set, logic and human intelligence style is illustrated in the paper. The theory of all set can not only unify and summarize the current theories but also provide the primary method for establishing new set theory and new logic.

[**Key words**] all set; artificial intelligence; set theory; operation; logic