学术论文

用考虑置信区间长度影响的最小二乘法拟合 S－N 曲线

杨晓华[1]，金　平[1]，姚卫星[2]
（1. 海军航空工程学院青岛分院，青岛　266041；2. 南京航空航天大学，南京　210016）

［摘要］　S－N 曲线是用名义应力法预测结构疲劳寿命的基础。基于试验疲劳寿命分散的物理机制，提出了一个 S－N 曲线试验数据处理的加权最小二乘法，此方法中每组数据的权重与该组数据的置信区间成反比。计算结果表明用考虑置信区间长度影响的最小二乘法拟合得到的 S－N 曲线比用一般最小二乘法得到的 S－N 曲线具有更高的可靠度，给出的寿命预测结果也更安全。

［关键词］　置信区间；疲劳寿命；最小二乘法；S－N 曲线
［中图分类号］ V215.2　　［文献标识码］ A　　［文章编号］ 1009－1742（2004）04－0041－03

1　引言

在疲劳研究的100多年历史中，尽管已发展了多种疲劳寿命研究方法，但在工程实践中，各种各样的修改的名义应力法仍然得到了广泛应用，而 S－N 曲线是用名义应力法估算疲劳寿命的基础。在疲劳可靠性设计和疲劳性能测试中，常用的 S－N 曲线表达式有双参数幂函数表达式、指数函数表达式和三参数幂函数表达式[1]。需要指出，上述所有的 S－N 曲线均是对实验数据的拟合曲线，拟合的方法一般为对一组疲劳试验数据的均值进行最小二乘拟合。

大量的实验数据表明，疲劳寿命一般服从对数正态分布。文献[1]中正态母体疲劳寿命均值的区间估计为

$$\bar{x} - t_\gamma s/n^{1/2} < \mu < \bar{x} + t_\gamma s/n^{1/2} \qquad (1)$$

式中 μ 为正态母体均值，$\bar{x}$ 为样本均值，s 为样本标准差，γ 为置信度，n 为试件个数。式(1)表明以 γ 的置信度，因此置信区间 $\bar{x} - t_\gamma s/n^{1/2}$，$\bar{x} + t_\gamma s/n^{1/2}$ 包含 μ 值。置信区间越小，当拟合 S－N 曲线时，样本均值 $\bar{x}$ 作为拟合点的可靠度越高，反之则越低。

但在常规的最小二乘法拟合 S－N 曲线时，却没有考虑置信区间长度的影响。图1中×表示实验数据的样本均值点，横线段表示置信度 γ 下实验数据均值的置信区间长度。

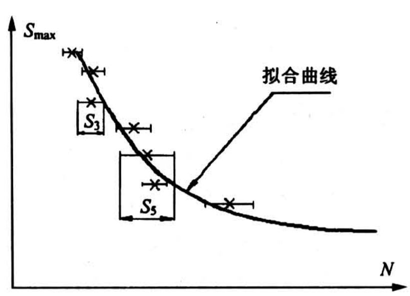

图1　最小二乘法拟合实验数据示意图

Fig.1　The least square fit of test data

由图1可见，尽管 $S_3 < S_5$，拟合曲线却更靠近5点，但在曲线拟合时总希望拟合曲线靠近置信区间短的点。

［收稿日期］　2003－06－02；修回日期　2003－10－07
［基金项目］　航空基础科学基金（00b52015）
［作者简介］　杨晓华（1964－），男，江苏启东市人，海军航空工程学院青岛分院教授

2 用加权最小二乘法拟合实验数据的一般方法

已知实验数据组 (x_i, y_i) $(i = 1, 2, 3, \cdots, n)$,现有函数 $f(x)$ 使得

$$\|(y_i - f(x_i))\|_2 = \left[\sum_{i=1}^{n}(y_i - f(x_i))^2\right]^{1/2} = \min \tag{2}$$

式(2) 可改写为

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - f(x_i))^2 = \min \tag{3}$$

令

$$Q = \sum_{i=1}^{n}[y_i - f(x_i)]^2 \tag{4}$$

设函数 $f(x)$ 中含有 k 个待定系数 $a_k(k < n)$ 则

$$\frac{\partial Q}{\partial a_j} = \sum_{i=1}^{n}[y_i - f(x_i)]\frac{\partial f(x)}{\partial a_j}\bigg|_{x=x_i} = 0$$

$$(j = 1, 2, \cdots, k) \tag{5}$$

解上述正规方程组，便可确定 k 个待定系数 a_k。

不难看出上述最小二乘拟合问题也是求解关于 $a_k(k < n)$ 的超定方程组

$$f(x_i) = y_i \quad (i = 1, 2, 3, \cdots) \tag{6}$$

的最小二乘解问题。

如果采用多项式拟合，即

$$f(x_i) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i \tag{7}$$

则方程组的矩阵计法为

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b} \tag{8}$$

其中:

$$\boldsymbol{b} = [y_0, y_1, \cdots, y_n]^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{X} = [a_0, a_1, \cdots, a_n]^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^m \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^m \end{bmatrix},$$

由矩阵理论可知,不相容方程组式(8) 的一般最小二乘解为

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}_l^{-1}\boldsymbol{b} \tag{9}$$

其中广义逆 $\boldsymbol{A}_l^{-1}$ 为

$$\boldsymbol{A}_l^{-1} = (\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^*,$$

而加权最小二乘解为

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}_{l\mathrm{w}}^{-1}\boldsymbol{b} \tag{10}$$

式中 $\boldsymbol{A}_{l\mathrm{w}}^{-1}$ 为加权的最小二乘广义逆

$$\boldsymbol{A}_{l\mathrm{w}}^{-1} = (\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{WA})^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{W} \tag{11}$$

式中 $\boldsymbol{W}$ 为对称正定矩阵，在实际问题中也可称为加权矩阵。

3 考虑置信区间长度影响的 $S-N$ 曲线拟合

3.1 权重 w_i

引入权重

$$w_i = w/d_i^p \tag{12}$$

式中 d_i 为第 i 个应力水平下的试验值的置信区间的长度，按式(1)计算；p 为敏感指数，不妨取 1；w 为常数，由归一化方程确定。

$$d_i = 2t_\gamma S_i/n_i^{1/2} \tag{13}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{w}{d_i} = 1 \tag{14}$$

于是权重为

$$w_i = 1\Big/d_i^p \cdot \sum_{i=1}^{n}1/d_i \tag{15}$$

因此，加权矩阵 $\boldsymbol{W}$ 为

$$\boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} w_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & w_n \end{bmatrix} \tag{16}$$

式中 w_i 由公式(14) 确定。

如果 $S-N$ 曲线用幂函数的形式表示:

$$S_a^m N = C \tag{17}$$

对式(17) 两边取对数得

$$M \lg S_a + \lg N = \lg C \tag{18}$$

上式可改写成

$$\lg N \times x_1 + x_2 = \lg S_a \tag{19}$$

对于 n 个试验数据点(S_a^i, N^i),式(19) 为超定方程组,用矩阵形式表示为

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b} \tag{20}$$

式中

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \lg N_1 & 1 \\ \lg N_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \lg N_n & 1 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

$$
\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}\lg(S_a^{(1)})\\ \lg(S_a^{(2)})\\ \vdots\\ \lg(S_a^{(n)})\end{bmatrix}。
$$

于是，考虑置信区间长度影响的加权最小二乘解便可用式(11)表示。

3.2 算例

LY12CZ 铝合金包铝板材（轴向加载）试验原始数据如表 1 所示[2]。

表 1　试验原始数据

Table 1　The original test data

	S_{max} /Mpa	对数均值 $\bar{x}$	标准差 s	区间长度*
$K_t=1$ $S_m=90$ MPa $S_0=163$ Mpa	240	5.0512	0.0579	0.0862
	210	5.3106	0.1259	0.1876
	190	5.7366	0.1373	0.2046
	180	6.1885	0.2406	0.3585
$K_t=2.5$ $S_m=90$ MPa $S_0=126$ Mpa	210	4.7013	0.139	0.2072
	190	4.9614	0.078	0.1162
	170	5.1866	0.0476	0.0710
	150	5.6536	0.1696	0.2528
	140	5.2111	0.3363	0.5012

* 95 %置信度下的置信区间长度

对表 1 中的数据分别进行最小二乘拟合与加权的最小二乘拟合，结果如图 2 和图 3 所示。

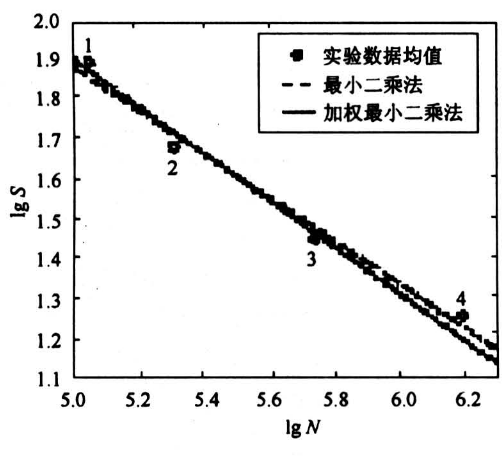

图 2　$K_t=1$ 时 $S-N$ 曲线

Fig.2　The least square fit of $S-N$ curve

4　结果讨论

1) 图 2 中，置信区间的长度随着疲劳次数的增加而增加，一般最小二乘法拟合的结果和期望的正好相反。如图 2 中 4 点的置信区间长度最大（分散性最大）却离所拟合的直线最近，1 点的置信区间长度最短却离所拟合的直线最远，而考虑置信区间长度影响的最小二乘法所拟合的直线基本符合期望：1 点的置信区间长度最短离所拟合的直线最近，4 点的置信区间长度最远，离所拟合的直线也最远。因此，考虑置信区间长度影响的最小二乘法得到的 $S-N$ 曲线比一般最小二乘法得到的 $S-N$ 曲线有更高的可靠度。

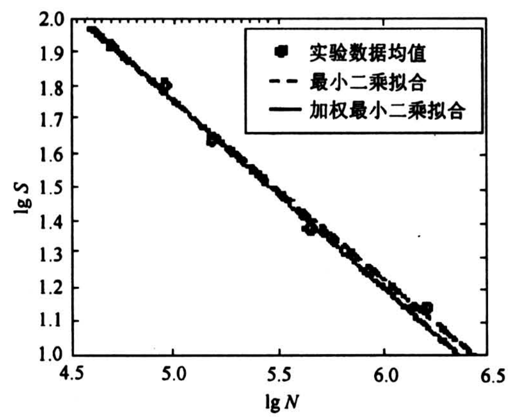

图 3　$K_t=2.5$ 时 $S-N$ 曲线

Fig.3　The least square fit of $S-N$ curve

2) 在用名义应力法估算结构寿命时，$S-N$ 曲线的形状严重地影响寿命估算的结果。疲劳寿命的分散性一般随着疲劳寿命的增加而增加，由图 2、图 3 可知，用一般最小二乘法得到的 $S-N$ 曲线比用考虑置信区间长度影响的最小二乘法得到的 $S-N$ 曲线更趋近于寿命长的实验数据点，造成预测寿命偏于危险，而用考虑置信区间长度影响的最小二乘法得到的 $S-N$ 曲线进行寿命预测则偏于安全。

参考文献

[1]　高镇同. 疲劳可靠性 [M]. 北京:北京航空航天大学出版社, 2002

[2]　高镇同,蒋新桐,熊峻江. 疲劳性能试验设计和数据处理——直升机金属材料疲劳性可靠性手册 [M]. 北京:北京航空航天大学出版社,1999

(下转第 50 页)

[7] Rudin W. Principles of Mathematical Analysis [M]. New York McGRAW-HILL Book Company, 1976. 159～165

[8] 李永敏. 根据粗糙集理论进行 BP 网络设计的研究 [J]. 系统工程理论与实践, 1999, 19(4): 62～69

A Method of Constructing Fuzzy Neural Network Based on Rough Set Theory

Huang Xianming, Yi Jikai

(*Electronic Information and Control Engineering College, Beijing University of Technology, Beijing* 100022, *China*)

[**Abstract**] A new method of constructing fuzzy neural network is presented and Rough set theory is applied to this method. Since Rough set theory has strong numeric analyzing ability and fuzzy neural network has exact function approaching ability, their combination can produce a neural network model with good intelligibility and fast convergence. First, some rules are acquired from given data set by rough set theory. Then, these rules are applied to constructing neural cell numbers and relative parameters in fuzzy neural network. Finally the initial network is trained by BP arithmetic and the whole network design is finished. Also in this paper, an example of nonlinear function approaching is discussed and the feasibility of this method is proved.

[**Key words**] fuzzy neural network; rough set; acquire rule; function approaching

(cont. from p.43)

The $S-N$ Curve Fitted by the Least Square Method Considering the Effect of Length of the Confidence Interval

Yang Xiaohua[1], Jin Ping[1], Yao Weixing[2]

(1. *Naval Aeronautical Engineering Institute Qingdao Branch, Qingdao, Shandong* 266041, *China*; 2. *Nanjing Aeronautical University, Nanjing* 210016, *China*)

[**Abstract**] The $S-N$ curve is the base of calculating fatigue structural life. Founding on physical mechanism, this paper presents a weighted least square method in which the weigh of a group of test data is inversely proportional to the length of the confidence interval. The calculating results show that the $S-N$ curve which is gained by the least square method considering the effect of length of the confidence interval is more reliable and secure than the $S-N$ curve which is gained by general least square method.

[**Key words**] confidence interval; fatigue life; least square method; $S-N$ curve