学 术 论 文

压杆稳定可靠性优化设计

贺向东[1]，张义民[1]，薛玉春[2]，闻邦椿[1]
（1.东北大学机械工程与自动化学院，沈阳 110004；2.吉林大学机械科学与工程学院，长春 130025）

［摘要］ 在稳定可靠性设计理论和优化设计方法的基础上，讨论了压杆稳定可靠性优化设计问题，提出了压杆稳定可靠性优化设计的计算方法。在基本随机参数的前两阶矩已知的情况下，通过计算机程序可以实现压杆稳定可靠性优化设计，迅速准确地得到压杆稳定可靠性优化设计信息。

［关键词］ 压杆；随机摄动法；稳定可靠性；优化设计
［中图分类号］ TU318；TB114.3 ［文献标识码］ A ［文章编号］ 1009－1742（2007）05－0033－03

1 引言

可靠性技术现已广泛深入到结构设计、机械零部件强度设计和选材以及失效分析之中。这些研究不仅为可靠性设计提供了基础，而且标志着可靠性设计已进入了实用阶段[1~5]。可靠性优化设计是在可靠性基础上进行优化设计，即在设计中应保证结构的经济效益和运行的安全可靠。开展可靠性优化设计方法的研究，能使结构具有更先进、更实用的设计特点，使结构的预测工作性能与实际工作性能更加符合，得到既有足够的安全可靠性，又有适当经济性的优化产品。

目前，结构强度可靠性优化设计方法已有了较大的发展[6~10]，有一些工程结构虽具有足够的强度和刚度，却不一定能安全可靠地工作，稳定破坏是其主要失效模式。因此，将稳定可靠性理论和优化设计方法相结合，对稳定可靠性优化设计方法进行深入研究和探讨，不仅具有重要的理论价值，而且也具有十分重要的工程实际意义。笔者提出了压杆稳定可靠性优化设计方法，建立了压杆稳定可靠性优化设计方法的计算模型，发展了可靠性优化设计理论。

2 压杆的力学模型

圆形截面压杆一般由稳定性决定它的承载力。当长度比 L/d 非常大时，压杆的稳定性是其主要失效模式。不使压杆失稳的临界力为

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu L)^2} = \frac{\pi^2 E}{(\mu L)^2}\left(\frac{\pi d^4}{64}\right) \tag{1}$$

式中 μ 为长度系数，根据压杆不同的支撑情况取值；I 为圆形截面压杆的惯性矩，L 为压杆长度，d 为压杆截面直径。

根据可靠性的干涉理论，压杆稳定可靠性分析中的状态函数 $g(\boldsymbol{X})$ 方程可以写成

$$g(\boldsymbol{X}) = F_{cr} - F \tag{2}$$

式中 F 为压杆的轴向载荷，基本随机变量向量 $\boldsymbol{X} = [E \quad d \quad L \quad F]^{T}$。基本随机变量向量 $\boldsymbol{X}$ 的均值 $E(\boldsymbol{X})$ 和方差 $\mathrm{Var}(\boldsymbol{X})$ 是已知的，并且可以认为这些随机变量是服从正态分布和相互独立的。

［收稿日期］ 2006－03－28；修回日期 2006－06－28
［基金项目］ 国家自然科学基金资助项目（50535010），中国博士后基金资助项目（2005038593），辽宁省自然科学基金资助项目（20052034）
［作者简介］ 贺向东（1971－），男，吉林松原市人，东北大学博士后研究人员；
张义民（1958－），男，吉林长春市人，“长江学者”特聘教授，东北大学教授，博士生导师；
闻邦椿（1930－），男，浙江温岭市人，中国科学院院士，东北大学教授，博士生导师

3 随机摄动法

可靠性设计的一个目标是计算可靠度：

$$R=\int_{g(X)>0} f_X(\boldsymbol{X})\mathrm{d}\boldsymbol{X} \tag{3}$$

式中$f_X(\boldsymbol{X})$为基本随机参数向量 $\boldsymbol{X}=(X_1 \quad X_2 \quad \cdots \quad X_n)^{\mathrm{T}}$ 的联合概率密度，这些随机参数代表载荷、零部件的特性等；$g(\boldsymbol{X})$为状态函数，可表示零部件的两种状态：

$$\left.\begin{aligned} g(\boldsymbol{X})\leqslant 0 \quad 为失败状态 \\ g(\boldsymbol{X})>0 \quad 为安全状态\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

当 $g(\boldsymbol{X})=0$,则是一个 n 维曲面，称为极限状态面或失败面。

把随机参数向量 $\boldsymbol{X}$ 和状态函数$g(\boldsymbol{X})$表示为

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}_{\mathrm{d}}+\varepsilon\boldsymbol{X}_{\mathrm{p}} \tag{5}$$

$$g(\boldsymbol{X})=g_{\mathrm{d}}(\boldsymbol{X})+\varepsilon g_{\mathrm{p}}(\boldsymbol{X}) \tag{6}$$

式中 ε 为一小参数，下标为 d 的部分表示随机参数中的确定部分，下标为 p 的部分表示随机参数中的随机部分，且具有零均值。显然要求随机部分比确定部分小得多。对式（5）、式（6）取数学期望值：

$$\mu_X=\mathrm{E}(\boldsymbol{X}_{\mathrm{d}})+\varepsilon\mathrm{E}(\boldsymbol{X}_{\mathrm{p}})=\boldsymbol{X}_{\mathrm{d}} \tag{7}$$

$$\mu_{\mathrm{g}}=\mathrm{E}[g_{\mathrm{d}}(\boldsymbol{X})]+\varepsilon\mathrm{E}[g_{\mathrm{p}}(\boldsymbol{X})]=g_{\mathrm{d}}(\boldsymbol{X}) \tag{8}$$

同理，对其取方差，根据 Kronecker 代数及相应的随机分析理论，有

$$\sigma_X^2=\mathrm{E}[(\boldsymbol{X}-\mathrm{E}(\boldsymbol{X})^{[2]}]=\varepsilon^2[\boldsymbol{X}_{\mathrm{p}}^{[2]}] \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathrm{g}}^2&=\mathrm{E}[(g(\boldsymbol{X})-\mathrm{E}(g(\boldsymbol{X})))^{[2]}]= \\ &\varepsilon^2\mathrm{E}[(g_{\mathrm{p}}(\boldsymbol{X}))^{[2]}]\end{aligned} \tag{10}$$

$\boldsymbol{A}^{[2]}=\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{A}$，$\otimes$代表 Kronecker 积。

根据向量值和矩阵值函数的 Taylor 展开式，当随机参数的随机部分比其确定部分小得多时，可以把 $g_{\mathrm{p}}(\boldsymbol{X})$在 $\mathrm{E}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}_{\mathrm{d}}$ 附近展开到一阶为止，即

$$\mathrm{g}_p(\boldsymbol{X})=\frac{\partial g_{\mathrm{d}}(\boldsymbol{X})}{\partial\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{X}_{\mathrm{p}} \tag{11}$$

代入式（10）得

$$\begin{aligned}\sigma_g^2&=\varepsilon^2\mathrm{E}\left[\left(\frac{\partial \mathrm{g}_d(\boldsymbol{X})}{\partial\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}}\right)^{[2]}\boldsymbol{X}_{\mathrm{p}}^{[2]}\right] \\ &=\left(\frac{\partial g_{\mathrm{d}}(\boldsymbol{X})}{\partial\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}}\right)^{[2]}\mathrm{Var}(\boldsymbol{X})\end{aligned} \tag{12}$$

式中$\mathrm{Var}(\boldsymbol{X})$为随机参数的方差矩阵，包含所有的方差和协方差。

可靠性指标定义为

$$\beta=\frac{\mu_{\mathrm{g}}}{\sigma_{\mathrm{g}}}=\frac{\mathrm{E}[g(\boldsymbol{X})]}{\sqrt{\mathrm{Var}[g(\boldsymbol{X})]}} \tag{13}$$

这样一方面可以利用可靠性指标直接衡量零部件的可靠性，另一方面在基本随机参数向量 $\boldsymbol{X}$ 服从正态分布时，可以用失败点处状态表面的切平面近似地模拟极限状态表面，获得可靠度的一阶估计量

$$R=\Phi(\beta) \tag{14}$$

式中$\Phi(\cdot)$为标准正态分布函数。

4 稳定可靠性优化设计

稳定可靠性优化设计模型可以用如下的确定型模型来求解，即

$$\left.\begin{aligned} &\text{minimize} \quad f(\boldsymbol{X})=\mathrm{E}\{f(\boldsymbol{X})\}=f(\boldsymbol{X}) \\ &\text{subject to} \quad \mu_{\mathrm{g}}-\Phi^{-1}(R_0)\sigma_{\mathrm{g}}\geqslant 0 \\ &\qquad q_i(\boldsymbol{X})\geqslant 0,(i=1,\cdots,l) \\ &\qquad h_i(\boldsymbol{X})=0,(j=1,\cdots,m)\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

式中 R_0 为给定应满足要求的可靠度，$q_i(\boldsymbol{X})$和 $h_j(\boldsymbol{X})$为不等式约束和等式约束。

5 数值算例

图 1 为一端固定一端自由的圆形截面压杆承受载荷的计算简图。基本随机变量向量 $\boldsymbol{X}=[E \quad d \quad L \quad F]^{\mathrm{T}}$，$E$，$d$，$F$，$L$ 分别表示弹性模量、压杆截面直径、载荷力和压杆长度，均服从正态分布，其均值和标准差分别为 $E=(203\ 000，5\ 860)$ MPa，$L=(2\ 500，12.5)$ mm，$F=(4\ 500，450)$ N。设要求的可靠度 $R_0=0.999$，试用稳定可靠性优化设计方法设计此压杆的截面直径 d。

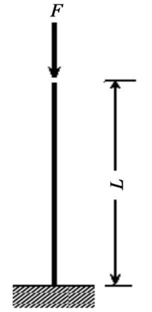

图 **1** 压杆

Fig.1 Compressive bar

首先，建立目标函数：要求压杆的质量最小，即截面 A 的面积为最小：

$$f_x(x)=\frac{\pi}{4}x_1^2 \tag{16}$$

取设计变量 $x = x_1 = d$，d 为压杆直径。

第二，建立约束条件：

$$\mu_g - \Phi^{-1}(R_0)\sigma_g \geqslant 0 \tag{17}$$

第三，优化求解：选取初值 $d = 36$ mm，求得压杆设计处截面的最小尺寸 $d = 35.2149$ mm。

6　结论

笔者在稳定可靠性理论和优化设计方法的基础上，提出了一种计算压杆稳定可靠性优化设计的数值方法。该方法在随机参数前两阶矩已知的情况下，放松了对随机参数分布概型的限制，使之更接近于工程实际中的结构可靠性问题，数值算例表明，该方法是解决压杆稳定可靠性优化设计问题的一种实用有效的数值方法。

参考文献

[1] 张义民．汽车零部件可靠性设计[M]．北京：北京理工大学出版社，2000

[2] 豪根 E B．机械概率设计[M]．汪一麟，等译．北京：机械工业出版社，1985

[3] 牟致忠．可靠性设计[M]．北京：机械工业出版社，1993

[4] 张义民，贺向东，刘巧伶，等．汽车零部件的可靠性稳健优化设计：理论部分[J]．中国工程科学，2004，6(3)：75～79

[5] Zhang Y M，He X D，Liu Q L，et al．Robust reliability design of banjo flange with arbitrary distribution parameters [J]．ASME Journal of Pressure Vessel Technology，2005，127(4)：408～413

[6] 张义民，贺向东，闻邦椿．螺旋管簧的可靠性优化设计[J]．中国工程科学，2002，4(5)：71～74

[7] Kaymaz I，McMahon C A．A probabilistic design system for reliability-based design optimization [J]．Struct Multidiscip Opt，2004，28(6)：416～426

[8] Youn B D，Choi K K．Selecting probabilistic approaches for reliability-based design optimization [J]．AIAA J，2004，42(1)：124～131

[9] 贺向东，张义民，刘巧伶，等．非正态分布参数的扭杆的可靠性优化设计[J]．中国机械工程，2004，15(10)：849～851，891

[10] Zhang Y M，He X D，Liu Q L，et al．Reliability-based optimization of automobile components [J]．International Journal of Vehicle Safety，2005，1(1/2/3)：52～63

Stable Reliability—Based Optimization Design of Compressive Bar

He Xiangdong[1]，Zhang Yimin[1]，Xue Yuchun[2]，Wen Bangchun[1]

（1．*College of Mechanical Engineering and Automation*，*Northeastern University*，*Shenyang*　110004，*China*；
2．*College of Mechanical Science and Engineering*，*Jilin University*，*Changchun*　130025，*China*）

［**Abstract**］　Based on the stable reliability design theory and the optimization design method，the stable reliability-based optimization of compressive bar is extensively discussed and a numerical method for stable reliability-based optimization is proposed．On the condition of known first two moments of basic random variables，the respective program can be used to obtain the stable reliability-based optimization information of compressive bar accurately and quickly．

［**Key words**］　compressive bar；probabilistic perturbation method；stable reliability；optimization design