

# 强度理论与实验现象

刘大斌<sup>1</sup>, 韩文坝<sup>2</sup>, 蔡冰清<sup>3</sup>, 韩晓东<sup>4</sup>

(1. 南京理工大学国家民爆检测中心, 南京 210094; 2 中国石化总公司扬子石油化工股份有限公司, 南京 210048;  
3. 哈尔滨工业大学材料科学与工程学院, 哈尔滨 150001; 4. 深圳岱宇实业有限公司, 广东深圳 518035)

[摘要] 用四大经典理论、莫尔强度理论和质点平衡强度理论的准则和强度条件,对单向拉压、二向拉压、纯扭转等已被认定的实验现象进行对比,对低、中碳钢重新做了纯扭转求最大屈服剪应力实验。发现质点平衡强度理论的符合率较高,13个实验中的有12个符合。尤其是拉伸—剪切使剪切破坏试验变得容易,压缩—剪切使剪切破坏试验变得困难的实验现象与质点平衡强度理论完全符合;莫尔强度理论也只有当拉伸和压缩极限强度不同时才能符合;其他强度理论都与此实验不符合。特别是当三向等应力拉伸(或压缩)时第三强度理论出现相当应力为零;三向等应力拉伸(或压缩)时第四强度理论出现相当应力也为零;即无论多么大的应力都不会使材料破坏的结论,这与实践完全不符。而质点平衡理论得出与第三、第四强度理论不同的结论,并且接近其实验结果。

[关键词] 强度理论;实验现象;屈服现象;应力状态

[中图分类号] O343;O341 [文献标识码] A [文章编号] 1009-1742(2007)12-0044-09

## 1 前言

强度理论是研究材料破坏原因的理论,以便建立材料的强度条件。各种强度理论都是建立在不同材料、不同应力作用下出现的实验现象的基础上。凡是与实验现象符合准确,又与各种实验现象符合多的强度理论就被广泛应用。笔者就是利用二三百年来,专家学者做过的,并且被认定的实验现象,对比各种经典强度理论和笔者新提出来的质点平衡应力强度理论<sup>[1]</sup>,对其准确性和广泛性进行了统计和评述。目的是对经典强度理论和新强度理论有全面而深刻的了解,以便在设计 and 校核中正确选择其应用哪种强度条件。以保证其工程的安全性。特别是不能用现行弹性理论设计、校核短梁和大型工程的今天(只能用有限元法,用计算机模拟近似计算),寻求新强度理论尤为重要。

## 2 材料在拉压扭时屈服与断裂现象<sup>[2]</sup>

材料在拉、压、扭实验时屈服与断裂现象如下:

实验1 脆性材料铸铁试件轴向拉伸时,在横截面上拉断,如图1所示。

实验2 铸铁试件在扭转时,与轴线成45°角方向上被拉断,如图2所示。

实验3 低碳钢扭转成垂直剪断,如图3所示。

实验4 脆性材料大理石轴向压缩时(夹板间摩擦较小时),在纵截面上裂断,如图4所示,是最大线应变产生的脆断。

实验5 铸铁压缩时,在与轴线约成45°角处断裂,是剪切破坏,如图5所示。

实验6 低碳钢拉伸时,在与轴线成45°角出现滑移线,是剪切破坏,如图6a所示;屈服后,再拉伸出现颈缩现象而拉断,如图6b所示。

实验7 铸铁二向等应力拉压实验<sup>[3]</sup>;接近第二强度理论, $\sigma = 0.8\sigma_b$ 时断裂,如图7所示。

实验8 实验结论:铸铁二向拉伸不比单向拉伸安全, $\sigma$ 接近 $\sigma_b$ 时断裂<sup>[3]</sup>,如图8所示。

实验9 实验结论:脆性材料二向压缩与单向压缩无明显差别,如图9所示。

[收稿日期] 2006-06-30; 修回日期 2007-01-28

[作者简介] 刘大斌(1963-),男,辽宁大连人,南京理工大学国家民用爆破器材质量监督检验中心研究员,博士后,博导

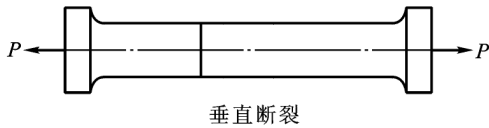


图1 铸铁单向拉伸横向拉断

Fig. 1 Cast iron under single-direction pulling

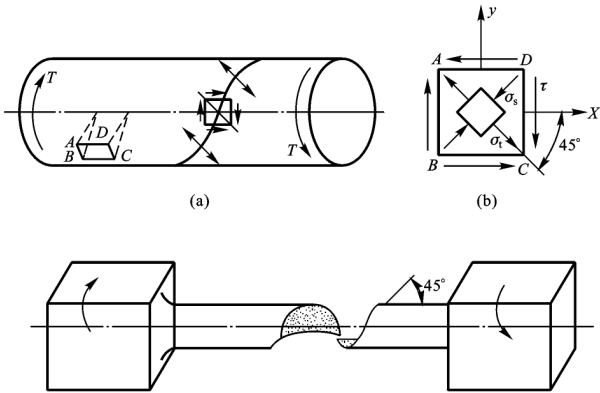


图2 铸铁扭转成45°角拉断

Fig. 2 The cast iron is destroyed when the torsion angle is 45°

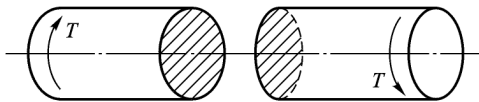


图3 低碳钢扭转与垂直剪断

Fig. 3 Low carbon steel torsion destruction and vertical destruction

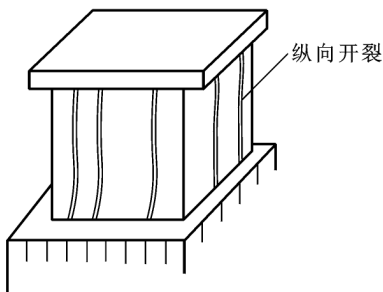


图4 大理石压缩纵向裂纹

Fig. 4 The longitudinal crack in the marble

实验10 实验证明,拉伸-剪切破坏比较容易。只有质点平衡强度条件和莫尔强度理论(当拉压强度极限不相等时)与此实验符合,其他强度理论都不符合,如图10所示。

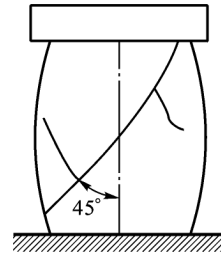


图5 铸铁压缩与轴线成45°角破坏

Fig. 5 The cast iron is destroyed under suppression in the angle of 45° with the axle

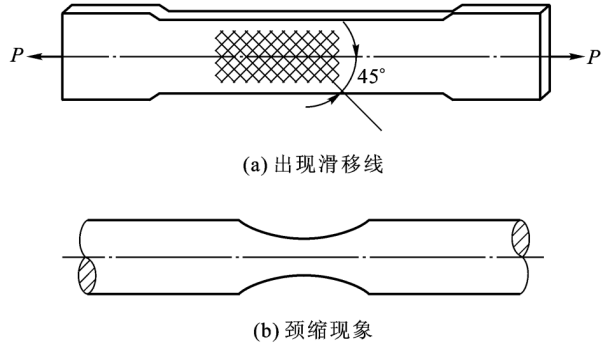


图6 低碳钢拉伸与轴线成45°角屈服

Fig. 6 Pulling of low-carbon steel (45° angle with the axle)

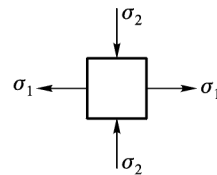


图7 铸铁二向拉压断裂实验

Fig. 7 Similar with 2nd intensity theory (broke when  $\sigma \leq 0.8\sigma_b$ )

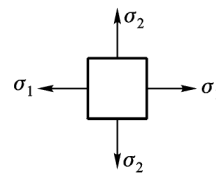


图8 二向拉伸不比单向拉伸安全

Fig. 8 Two-direction pulling is not safer than single-direction pulling

实验11 实验表明,压缩-剪切破坏比较困难,只有质点平衡强度条件及莫尔强度理论(当拉、压强度极限不等时)与实验符合,如图11所示。

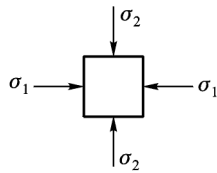


图9 脆性材料二向压缩与单向压缩无明显差别

Fig. 9 No difference between bi-direction suppression and one-direction suppression

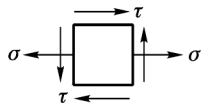


图10 拉伸-剪切比纯剪切容易

Fig. 10 Test of pure shear is coincident with balance particle intensity theory

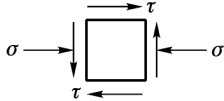


图11 压缩-剪切比纯剪切困难

Fig. 11 Stress state of pulling-shearing

实验12 纯剪切实验: 求出低、中碳钢的最大屈服剪应力, 与质点平衡强度条件相符合; 与第四强度理论及莫尔强度理论相接近; 与第三强度理论不符合, 如图12所示。

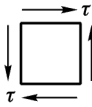


图12 纯剪切实验

Fig. 12 Pure shearing test is coincident with balance particle intensity theory

实验13 淬火钢球压在铸铁板上, 铸铁板出现屈服凹坑(屈服破坏), 三向压缩破坏, 见图13<sup>[3]</sup>。

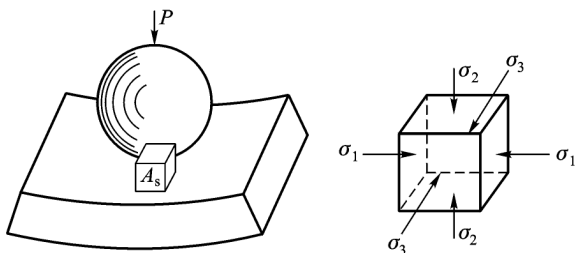


图13 三向压应力状态

Fig. 13 Yield destroy when three-direction stress state

### 3 第一强度理论(最大拉应力准则)

当主应力  $\sigma_1$  达到材料的强度极限  $\sigma_b$  时就断裂, 其断裂准则为

$$\sigma_1 = \sigma_b \quad (1)$$

其强度条件为

$$\sigma_1 \leq \sigma_b/n = [\sigma] \quad (2)$$

式中  $n$  为安全系数;  $[\sigma]$  为许用拉应力。

第一强度理论能解释实验现象1, 脆性材料拉伸时沿横截面断裂, 符合良好。又与二向等应力拉伸实验8相接近<sup>[3]</sup>。而对于脆性材料压缩时成45°角剪切断裂, 其理论与实验不符。对于塑性材料拉伸时出现与拉应力成45°角屈服破坏, 其理论与实验不符。

### 4 第二强度理论 最大伸长线应变准则

#### 4.1 准则与强度条件

最大伸长线应变准则, 即认为无论什么应力状态, 只要线应变最大值  $\epsilon_1$ , 达到材料拉断时伸长线应变的极值  $\epsilon_u$ , 材料就发生断裂, 其断裂准则为

$$\epsilon_1 = \epsilon_u = \sigma_b/E \quad (3)$$

则第二强度理论的强度条件为

$$\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma] \quad (4)$$

#### 4.2 讨论

1) 最大伸长线应变理论能解释实验4, 大理石受压试块沿垂直于压力方向裂开; 因为裂开的方向就是  $\epsilon_1$  的方向。

2) 铸铁的拉-压二向等应力状态试验7, 结果与此理论符合<sup>[3]</sup>。式(4)成为

$$\sigma_1 + \mu\sigma_2 \leq [\sigma] \quad (4a)$$

铸铁  $\mu = 0.23 \sim 0.27$ , 取  $\mu = 0.25$ , 且当  $|\sigma_1| = |-\sigma_2|$  时, 式(4a)成为

$$\begin{aligned} \sigma + 0.25\sigma &= \sigma_b, \\ \sigma &= \sigma_b/1.25 = 0.8\sigma_b \end{aligned} \quad (4b)$$

式(4b)说明, 二向等应力拉压时, 拉应力  $\sigma$  小于强度极限时就断裂, 符合实验7。

3) 当脆性材料二向受压时,  $\sigma_1 = 0, |-\sigma_3| = |-\sigma_2| = \sigma$ , 按式(4)断裂条件为

$$2\mu\sigma = \sigma_b.$$

对于铸铁,  $\mu = 0.25$  时,

$$\sigma = \sigma_b/2 \times 0.25 = 2\sigma_b \quad (4c)$$

可是实验结果并非如此, 而是和单向压缩无明显差别<sup>[3]</sup>, 见实验9。

4) 当二向等应力拉伸时,由式(4)可得  $\sigma \approx 1.33\sigma_b$ 。可见,比单向拉伸强度增加,实验8并非如此,而是不比单向拉伸安全。

5) 当  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$  时,  $\sigma_1 \leq [\sigma]$ , 与第一强度理论完全相同。

## 5 第三强度理论(最大剪应力准则)

### 5.1 准则与强度条件

最大剪应力准则,只要材料的最大剪应力达到简单拉伸屈服剪应力时,材料就屈服。

$$\tau_{\max} = \tau_u = \sigma_u/2 = \sigma_s/2 \quad (5)$$

三向应力状态下最大剪应力<sup>[4]</sup>为

$$\tau_{\max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2 \quad (6)$$

于是屈服准则为

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_s \quad (7)$$

强度条件为

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma] \quad (8)$$

### 5.2 讨论

1) 由式(5),塑性材料单向拉伸时最大剪应力为

$$\tau_{\max} = \sigma_s/2,$$

由单向拉伸时斜截面上剪应力的公式<sup>[3]</sup>

$$\tau_\alpha = (\sigma/2)\sin 2\alpha \quad (9)$$

屈服时,由式(5)和式(9)可得

$$\sin 2\alpha = 1, \alpha = 45^\circ,$$

与实验6低碳钢拉伸在与轴线45°角方向上出现滑移线完全相同。

2) 纯扭转时低碳钢被垂直剪断符合实验现象3,因为由(5)式  $\tau_{\max} = \sigma_s/2$ ,纯扭转时横截面上的  $\sigma_s$  最大,而塑性材料抗剪能力差,因此,轴被垂直剪断。而铸铁的抗剪能力强,抗拉能力差,被与剪应力成45°角的主应力拉断,符合实验现象2。

3) 当受三向等拉应力(或等压应力)时,  $\sigma_1 = \sigma_3$ , 则式(7)相当应力

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 = 0 \quad (\text{或 } \sigma_{r3} = -\sigma_1 + \sigma_3 = 0),$$

说明无论多大等拉应力,材料都不会破坏,这与实际相矛盾。三向等应力压缩都得出同样结果。且由式(6)最大剪应力  $\sigma_{\max} = 0$ ,与实验13不符合。

4) 当  $\sigma_2 = 0$ , 且  $\sigma_1 = 1 - \sigma_3$  时,即二向等应力拉-压,由式(7)得

$$\sigma_1 + \sigma_3 = \sigma_s,$$

$$\sigma_1 = \sigma_s/2.$$

说明第三强度理论下,二向等应力拉-压不比单向

拉伸或压缩安全,接近实验7,但是,比第二强度理论  $\sigma = 0.8\sigma_b$  有误差。

5) 由式(8)可知,三向应力状态与  $\sigma_2$  无关,不符合实际。

从另一角度看:三相拉伸时,若  $\sigma_1 = \sigma_3$ , 且  $\sigma_1$  和  $\sigma_3$  远小于  $\sigma_2$ , 即

$$\sigma_1 = \sigma_3 \ll \sigma_2,$$

故  $\sigma_1$  和  $\sigma_3$  在三向应力状态中可以忽略,近似于  $\sigma_2$  的单向拉伸。单向拉伸不会出现不破坏的情况。与讨论3相矛盾。

因此,出现双剪应力理论(用三个最大剪应力组成强度理论)来修正第三强度理论。

6) 二向等应力拉伸的结论

而当  $\sigma_3 = 0$ , 且  $\sigma_1 = \sigma_2$  时,是二向等应力拉伸,则式(7)成为

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 = \sigma_2,$$

说明二向等应力拉伸时,与单向拉伸相同,符合实验8。

## 6 第四强度理论 最大形状应变能准则

### 6.1 准则与强度条件

变形能准则:只要形状应变能  $u_f$  达到拉伸屈服时形状应变能  $u_{fu}$ , 材料就屈服了,

$$u_f = u_{fu}.$$

屈服准则为

$$\sigma_{r4} = [((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2)/2]^{1/2} = \sigma_s \quad (10)$$

第四强度理论条件为

$$\sigma_{r4} = [((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2)/2]^{1/2} \leq [\sigma_s] \quad (11)$$

式中  $\sigma_{r4}$  称为相当应力。

第四强度理论对于钢、铜、铝等塑性材料拉伸符合程度比第三强度理论好。

### 6.2 讨论

1) 当  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$  时,三向应力状态成为简单拉伸(或压缩)。

$$\sigma_{r4} = [((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2)/2]^{1/2} \leq [\sigma_s].$$

对于脆性材料  $\sigma_1 = \sigma_b$ , 与实验1相符合。成为第一强度理论。

2) 当  $\sigma_3 = 0$  时,且  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ , 即二向等应力拉伸。

$$\sigma_{r4} = [(0 + \sigma^2 + \sigma^2)/2]^{1/2} = \sigma = \sigma_s,$$

说明二向等应力拉伸与单向拉伸相同,接近第一强度理论,接近实验8(二向拉伸不比单向拉伸安全),但是,与实验8不完全符合。

3) 二向等压应力状态  $\sigma_3 = 0, |-\sigma_1| = |-\sigma_2| = \sigma,$

$\sigma_{r4} = [((-\sigma + \sigma)^2 + \sigma^2 + \sigma^2)/2]^{1/2} = \sigma = \sigma_s,$ 说明二向等压应力状态与单向压缩相同。与实验9完全相同。

4) 当  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$  时,  $\sigma_{r4} = 0,$ 说明三向等应力拉伸(或压缩)时,无论多大应力都不会破坏<sup>[3]</sup>! 与实际不符合(与实验13不符合)。

5) 第四强度理论得出塑性材料屈服时,滑移线不与正应力成45°角。

由该强度理论导出拉-剪组合强度公式为

$$\sigma_{r4} = (\sigma^2 + 3\tau^2)^{1/2} \leq [\sigma] \quad (11a)$$

当  $\sigma = 0$  时,成为纯剪切应力状态,式(11a)成为

$$\sigma_{r4} = 3^{1/2}\tau \leq [\sigma] = \sigma_s/n \quad (11b)$$

对于塑性材料,安全系数  $n = 1$  时,式(11b)成为

$$\tau = 3^{-1/2}\sigma_s \quad (11c)$$

表明第四强度理论下纯剪切屈服时最大剪应力与屈服应力  $\sigma_s$  间的关系。由此,可得出屈服时滑移线与  $\sigma_s$  间夹角。由简单拉伸屈服时最大剪应力<sup>[3]</sup>

$$\tau_{s,max} = (\sigma_s/2) \sin(2 \times 45^\circ) \quad (11d)$$

由式(11c)和式(11d)得

$$3^{-1/2}\sigma_s \sin 2\alpha = (\sigma_s/2) \sin(2 \times 45^\circ)$$

则  $\sin 2\alpha = 3^{1/2}/2,$

$$\alpha = 30^\circ \quad (11e)$$

式(11e)表明,最大剪应力  $\tau_{s,max}$  与拉应力  $\sigma$  间夹角  $\alpha = 30^\circ$ 。按第四强度理论,滑移线应出现在与正应力  $\sigma$  夹角为  $30^\circ$  方向上,而实际是  $45^\circ$  角方向上,说明第四强度理论与实验6不完全符合。

6) 由式(11b),当  $n = 1$  时,  $\tau = 3^{-1/2}\sigma_s,$ 纯扭转时,垂直横截面上的  $\sigma_s$  最大,又塑性材料抗剪能力差,因此,扭转时轴成垂直断裂,符合实验3。

## 7 莫尔的强度理论

### 7.1 准则与强度条件

考虑到材料抗拉和抗压强度不相等,提出应力圆包络线理论:即工作状态的应力圆,位于包络线内则安全,若相切则断裂。工程上把包络线简化成直线,作单轴拉伸和单轴压缩极限应力圆的公切线,把

此公切线作为包络线。按最大剪应力准则推导出莫尔的强度理论准则为

$$\sigma_{rm} = \sigma_1 - \sigma_3 \sigma_{tu} / \sigma_{cu} \quad (12)$$

强度条件为

$$\sigma_{rm} = \sigma_1 - \sigma_3 [\sigma_1] / [\sigma_c] \leq [\sigma_1] \quad (13)$$

式中  $\sigma_{rm}$  为相当应力,  $\sigma_1, \sigma_3$  为主应力,  $\sigma_{tu}, [\sigma_1]$  为材料拉伸极限强度和许用应力,  $\sigma_{cu}, [\sigma_c]$  为材料压缩极限强度和许用应力。

### 7.2 讨论

1) 对于压缩时不破坏的塑性材料,如低碳钢可认为抗压强度极限  $\sigma_c$  为无限大,则式(13)成为

$$\sigma_{rm} = \sigma_1 \leq [\sigma_1],$$

即对于塑性材料莫尔强度理论化成第一强度理论。因此,莫尔理论对塑性材料不太适用。

2) 对于  $\sigma_1 = \sigma_c$  的材料,莫尔的理论又化为最大剪应力理论,式(13)成为

$$\sigma_{rm} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma_1].$$

当  $\sigma_1 = \sigma_3$  时仍然出现  $\sigma_{rm} = 0$ 。材料不被破坏。

3) 莫尔理论适用于拉、压强度性能不等的脆性材料,如铸铁、球墨铸铁、高合金钢等。

铸铁的抗压强度极限比抗拉强度极限高出4—5倍<sup>[3]</sup>,取  $\sigma_{ci} = 4\sigma_{tu}$ ,代入式(12),得

$$\sigma_{rm} = \sigma_1 - \sigma_3 \sigma_{tu} / 4\sigma_{tu} = \sigma_1 - \sigma_3 / 4 \quad (14)$$

当  $\sigma_1 = \sigma_3 = \sigma$  即三向等应力拉伸时

$$\sigma_{rm} = 3\sigma / 4 = 0.75\sigma \quad (14a)$$

相当应力不为零,这比第三强度理论接近了实际,不是多大应力都不破坏。

由莫尔强度准则,式(14a)为

$$\sigma_{rm} = 3\sigma / 4 = \sigma_s,$$

$$\sigma = 4\sigma_s / 3 \approx 1.33\sigma_s \quad (14b)$$

式(14b)为三向等应力拉伸的结论,即比单向拉伸安全。这与实验8的结论相反(不比单向拉伸安全)。即莫尔强度理论与实验8不符合。

4) 当  $\sigma_3$  为压应力时,对于铸铁式(14)成为

$$\sigma_{rm} = \sigma_1 + \sigma_3 / 4。$$

当  $\sigma_1 = \sigma_3 = \sigma$  时,

$$\sigma_{rm} = 5\sigma / 4 = \sigma_s \quad (14c)$$

$$\sigma = 4\sigma_s / 5 = 0.8\sigma_s,$$

与二向拉压实验7完全符合。

5) 铸铁二向压缩时,  $\sigma_1 = 0, |-\sigma_2| = |-\sigma_3| = \sigma,$ 则式(14)成为

$$\sigma_{rm} = 0 + \sigma_3 / 4 = \sigma / 4 = \sigma_s$$

则  $\sigma = 4\sigma_s,$ 说明二向压缩比单向安全;不符合

实验 9。

6) 莫尔强度理论得出拉 - 剪比纯剪切容易。

把式(6)代入式(12), 得

$$\sigma_{rm} = 2 \tau_{max} + \sigma_3 (1 - \sigma_{tu}/\sigma_{cu}) \quad (15a)$$

对于  $\sigma_{tu} \neq \sigma_{cu}$  的材料, 则

$$1 - \sigma_{tu}/\sigma_{cu} \neq 0,$$

则  $\sigma_3$  为拉应力时,  $\sigma_{rm} > 2 \tau_{max}$ , 即拉应力使剪切变得容易。当  $\sigma_3$  为压应力时,  $\sigma_3$  为负值, 则  $\sigma_{rm} < 2 \tau_{max}$ , 说明压缩使剪切变得困难。即莫尔强度理论符合实验 10 和实验 11。

当  $\sigma_{tu} = \sigma_{cu}$  时,  $1 - \sigma_{tu}/\sigma_{cu} = 0$ , 得不出上述结论。说明莫尔强度理论只适用于拉压性能不同的材料。

7) 当  $\sigma_{tu} = \sigma_{cu}$  时, 式(13)成为第三强度理论:

$$\sigma_{rm} = \sigma_1 - \sigma_3, \tau_{max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2。$$

8) 当  $\sigma_{tu} \neq \sigma_{cu}$  时, 最大剪应力为

$$\tau_{maxrm} = [\sigma_1 - \sigma_3 (\sigma_{tu}/\sigma_{cu})]/2 \quad (15b)$$

式(15b)与式(6)对比, 由于  $\sigma_{tu} < \sigma_{cu}$ , 则有

$$[\sigma_1 - \sigma_3 (\sigma_{tu}/\sigma_{cu})]/2 > (\sigma_1 - \sigma_3)/2,$$

即  $\tau_{maxrm} > \tau_{maxr3}$ 。

这表明莫尔强度理论的剪应力比第三强度理论的剪应力要大, 说明与实验 12 值接近(使表 1 中第三强度理论中的剪应力  $\tau_{max}$  增大)。

## 8 二向应力状态下质点平衡应力的强度理论<sup>[1]</sup>

### 8.1 准则与强度条件

文献[1]提出了二向应力状态的质点平衡强度理论:

1) 最大拉应力准则(适用于脆性材料)

$$\sigma'_\alpha = [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2 \tau^2 + 2(2)^{1/2} \tau (\sigma_x^2 + \sigma_y^2)^{1/2} \sin(\alpha + 45^\circ)]^{1/2} = \sigma_b, \quad (16)$$

强度条件为

$$[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2 \tau^2 + 2(2)^{1/2} \tau (\sigma_x^2 + \sigma_y^2)^{1/2} \sin(\alpha + 45^\circ)]^{1/2} \leq [\sigma_b] \quad (17)$$

式中

$$\alpha = \arctan |\sigma_y/\sigma_x| \quad (18)$$

当  $\tau = 0$  时, 为二向拉伸应力状态, 式(17)成为

$$\sigma'_\alpha = [\sigma_x^2 + \sigma_y^2]^{1/2} \leq [\sigma_b] \quad (19)$$

用主应力表示时,

$$\sigma'_\alpha = [\sigma_1^2 + \sigma_2^2]^{1/2} \leq [\sigma_b] \quad (20')$$

当  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ , 安全系数  $n = 1$  时,

$$\sigma'_\alpha = 2^{1/2} \sigma = \sigma_b \quad (20a)$$

由式(20a)可得

$$\sigma = 2^{-1/2} \sigma_b \approx 0.71 \sigma_b \quad (20b)$$

2) 屈服准则(适用于塑性材料)

按屈服准则, 式(16)应写成

$$\sigma'_\alpha = [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2 \tau^2 + 8^{1/2} \tau (\sigma_x^2 + \sigma_y^2)^{1/2} \sin(\alpha + 45^\circ)]^{1/2} = \sigma_s \quad (21)$$

则强度条件为

$$\sigma'_\alpha = [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2 \tau^2 + 8^{1/2} \tau (\sigma_x^2 + \sigma_y^2)^{1/2} \sin(\alpha + 45^\circ)]^{1/2} \leq [\sigma_s] \quad (22)$$

### 8.2 讨论

1) 二向等应力拉伸时, 由式(20b)

$$\sigma = 2^{-1/2} \sigma_b \approx 0.71 \sigma_b,$$

说明二向等应力拉伸, 最大拉应力小于单向拉伸。符合实验 8: 不比单向拉伸安全。

2) 由式(20), 当  $\sigma_2 = 0$  时, 得  $\sigma'_\alpha = \sigma \leq \sigma_b$ , 为单向拉伸或压缩, 同第一强度理论, 符合实验 1。

3) 当  $\sigma_3 = 0$ , 且  $|\sigma_1| = |\sigma_2|$  时, 式(20)为二向等应力压缩状态

$\sigma'_\alpha = 2^{1/2} \sigma_1 = \sigma_b$ , 则

$$\sigma'_\alpha = 2^{-1/2} \sigma_b \approx 0.71 \sigma_b,$$

接近符合实验 9。

4) 当  $\sigma_3 = 0, \sigma_1 = |\sigma_2| = \sigma$  时, 为二向等应力拉 - 压应力状态, 得出

$$\sigma = 2^{-1/2} \sigma_b \approx 0.71 \sigma_b,$$

符合实验 7。

5) 当  $\sigma_x = \sigma_y = 0$  时, 成为纯剪切应力状态, 式(21)成为

$$\sigma'_\alpha = [2 \tau^2]^{1/2} = \sigma_s,$$

$$\sigma'_\alpha = 2^{1/2} \tau = \sigma_s,$$

$$\tau_{max} = 2^{-1/2} \sigma_s = \sigma_s \cos 45^\circ。$$

上式说明最大剪应力发生在与主应力(对角线)成  $45^\circ$  角方向上, 与实验 6 符合(质点平衡应力  $\tau_\alpha = \sigma \cos \alpha$ , 而单向拉伸剪应力为  $\tau_\alpha = 6 \cos \alpha \cdot \sin \alpha$ )。

6) 拉伸(弯曲) - 剪切(扭转)准则与强度条件

当  $\sigma_y = 0$  时,  $\alpha = \arctg |\sigma_y/\sigma_x| = 0$ , 式(16)及式(21)成为拉伸(弯曲) - 剪切(扭转)应力状态(见图 10 所示)。

对脆性材料其断裂准则为

$$\sigma'_\alpha = [\sigma^2 + 2 \tau^2 + 2 \tau \sigma]^{1/2} = \sigma_b \quad (23)$$

塑性材料的准则为

$$\sigma'_\alpha = [\sigma^2 + 2 \tau^2 + 2 \tau \sigma]^{1/2} = \sigma_s \quad (23')$$

其强度条件为

$$\sigma'_\alpha = [\sigma^2 + 2\tau^2 + 2\tau\sigma]^{1/2} \leq [\sigma] \quad (24)$$

当为压 - 剪二向应力状态时 (见图 11), 式 (23') 成为

$$\sigma''_\alpha = [\sigma^2 + 2\tau^2 - 2\tau\sigma]^{1/2} = \sigma_s \quad (25)$$

对比式 (23') 与式 (25), 显然,  $\sigma'_\alpha > \sigma''_\alpha$ , 说明拉 - 剪比压 - 剪容易破坏。符合实验 10 和实验 11。这是由于式 (23') 中的  $2\tau\sigma$  为非平方项, 才出现  $\sigma$  为负值时和  $\sigma$  为正值时有不同结论。

7) 第三、第四及质点平衡应力的强度理论拉 (弯) - 剪 (扭) 公式对比。

第三强度拉 - 剪条件<sup>[3]</sup>为

$$\sigma_{r3} = (\sigma^2 + 4\tau^2)^{1/2} \leq [\sigma] \quad (26)$$

第四强度拉 - 剪条件<sup>[3]</sup>为式 (11a), 即

$$\sigma_{r4} = (\sigma^2 + 3\tau^2)^{1/2} \leq [\sigma]。$$

质点平衡应力强度条件为式 (24), 即

$$\sigma'_\alpha = [\sigma^2 + 2\tau^2 + 2\tau\sigma]^{1/2} \leq [\sigma]。$$

当  $\sigma = 0$  时, 成为纯剪切应力状态, 则式 (24)、

式 (26) 和式 (11a) 成为

$$\sigma'_\alpha = 2^{-1/2}\tau \leq [\sigma] \quad (27)$$

$$\sigma_{r3} = 2\tau \leq [\sigma] \quad (28)$$

$$\sigma_{r4} = 3^{1/2}\tau \leq [\sigma] \quad (29)$$

当安全系数取 1 时, 对于塑性材料, 许用拉应力为屈服拉应力,  $[\sigma] = \sigma_s$ , 剪应力为屈服剪应力, 为最大剪应力, 则式 (27)、式 (28)、式 (29) 成为

$$\tau_{\max} = \tau_s = 2^{-1/2}\sigma_s = 0.71\sigma_s \quad (27')$$

$$\tau_{\max} = \tau_s = \sigma_s/2 = 0.5\sigma_s \quad (28')$$

$$\tau_{\max} = \tau_s = 3^{-1/2}\sigma_s = 0.58\sigma_s \quad (29')$$

8) 下面用扭转实验来检验式 (27')、式 (28') 和式 (29') 符合和准确程度。

碳素钢扭转实验求最大屈服剪应力。材料为低碳钢 Q235 和中碳钢 45 号, 其实验值及其与理论值对比见表 1。

表 1 最大屈服剪应力的实验值与其理论值比较表

Comparison between test results and theoretical value of the maximum yield shear stress

钢种	试件 直径/mm	屈服时所加 最大载荷 $M$ /N·m	抗扭截面模量/ $m^3$ $W_p = \pi d^3/16$	最大屈服剪 应力/ $N \cdot m^{-2}$ $\tau_{s \max} = M/W_p$	不同强度准则得出的最大屈服剪应力/ $N \cdot m^{-2}$ (理论值与实验值误差百分比 $i$ %)		
					质点平衡强度理论 $\tau_{s \max} \approx 0.71\sigma_s$	第三强度理论 $\tau_{s \max} = 0.5\sigma_s$	第四强度理论 $\tau_{s \max} \approx 0.58\sigma_s$
Q235	10	35	$0.196 \times 10^{-6}$	$179 \times 10^6$	$167 \times 10^6$ (6.7)	$118 \times 10^6$ (34)	$136 \times 10^6$ (24)
45 钢 ( $\sigma_s = 355 \text{ MN/m}^2$ )	10	45	$0.196 \times 10^{-6}$	$230 \times 10^6$	$252 \times 10^6$ (9.5)	$178 \times 10^6$ (22.6)	$206 \times 10^6$ (10.5)
结论					误差最小	误差最大	误差较大

说明:

1) 扭转剪应力公式

$$\tau_{\max} = M/W_p \quad (30)$$

式中  $\tau_{\max}$  是指  $\rho = R$  时的点受到最大剪应力。

开始出现屈服时, 屈服扭矩对应的最大剪应力就是最大屈服剪应力, 因此可用式 (30) 求得。而式<sup>[5]</sup>

$$\tau_s = 3M_s/4W_p \quad (31)$$

是横截面全都达到屈服时的屈服剪应力。此时,  $\tau_s$  沿横截面均布, 角应变 (逐渐增大, 而  $\tau_s$  保持不变。可见, 已不符剪切虎克定律条件, 也不符合弹性理论小变形的条件。因此, 求最大屈服剪应力时, 要用式 (30) 而不用式 (31)。

2) 由比较表 1 明显可见, 质点平衡强度准则得出的  $\tau_{s \max}$  与实验符合; 第四强度理论与实验接近; 而第三强度理论与实验不符合。

## 9 三向应力状态质点平衡强度理论<sup>[1]</sup>

### 9.1 三向质点平衡的强度条件

三向应力状态质点平衡应力<sup>[1]</sup>的强度条件为

$$\sigma^* = [(\tau_{yx} + \tau_{zx} + \sigma_x)^2 + (\tau_{xy} + \tau_{zy} + \sigma_y)^2 + (\tau_{xz} + \tau_{yz} + \sigma_z)^2]^{1/2} \leq \sigma_s \quad (32)$$

用主应力表示的三向质点平衡强度条件为

$$\sigma'_\alpha = [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2]^{1/2} \leq [\sigma] \quad (33)$$

### 9.2 讨论

1) 当主应力  $\sigma_3 = 0$  时, 成为二向应力状态强

度条件式(19),

$$[\sigma_x^2 + \sigma_y^2]^{1/2} \leq [\sigma]$$

符合实验 8 和实验 1。

2) 当  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$  时, 成为三向等应力拉伸, 式(33) 成为

$$\sigma'_\alpha = 3^{1/2} \sigma \leq [\sigma] \quad (34)$$

$$\sigma \leq 3^{-1/2} [\sigma] = 0.58 [\sigma] \quad (34')$$

当安全系数  $n=1$  时,

$$\sigma \approx 0.58 \sigma_s \text{ 或 } \sigma \approx 0.58 \sigma_b \quad (35)$$

就屈服或断裂。解决了第三、第四强度理论的无论多大等应力都拉不断的错误结论。不是不断裂, 而是  $\sigma$  达到  $0.58 \sigma_b$  时就断裂。

3) 质点平衡应力下的二向纯剪切应力状态当  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0, \tau_{xx} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0$  时, 又  $\tau_{yx} = \tau_{xy}$ ,

由三向应力状态质点平衡应力的条件式(32)

可得

$$\sigma^* = 2^{1/2} \tau_{xy} = \sigma_s,$$

$$\tau_{xy} = 2^{-1/2} \sigma_s = \cos 45^\circ \sigma_s.$$

上式就是质点平衡应力下的纯剪切应力状态。说明屈服剪应力发生在与主应力成  $45^\circ$  角方向上, 而二向纯剪切主应力在单元体对角线方向上, 即主应力  $\sigma_s$  与  $x$  轴成  $90^\circ$  角方向上, 与实验 6、实验 3 完全符合。

## 10 结论

强度理论与 13 个实验现象的符合情况汇总于表 2。从表 2 可见, 质点平衡强度理论, 符合实验中的 12 个, 而且符合程度最好。其次是第四强度理论符合 9 个实验; 莫尔强度理论符合 9 个实验。第三强度理论符合 5 个实验, 第二强度理论符合 3 个实验, 第一强度理论符合 2 个实验。

表 2 强度理论与 13 个实验现象符合程度表

Comparison between 13 test results and intensity theory

序号	实验编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	总计
1	第一强度理论	√							≈√						2
2	第二强度理论	√			√			√							3
3	第三强度理论		√	√		√	√	≈√							5
4	第四强度理论	√	√	√		√	≈√		≈√	√		√	≈√		9
5	莫尔强度理论	√	√	√		√	√	√			√	√	≈√		9
6	质点平衡强度理论	√	√	√		√	√	√	√	≈√	√	√	√	√	12

说明: “√”号表示与实验现象完全符合; “≈√”表示与实验现象近似符合; 空格表示与实验现象完全不符合

各强度理论与实验的符合程度也不相同。如目前应用最广的第四强度理论, 其塑性材料滑移线的理论角度是  $30^\circ$  角, 与塑性材料拉伸实验滑移线在与拉应力成  $45^\circ$  角, 其相差为  $15^\circ$  角, 因此, 认为该强度理论与实验 6 为近似符合。

从表 2 可以看出, 质点平衡新强度理论不仅与实验现象符合最多, 而且符合准确, 特别是解决了第三、第四强度理论无法解决的理论与实际的矛盾(二向、三向等应力拉或压时相当应力为零, 即无论多大应力都不会破坏), 解决了莫尔强度理论不能完全解决拉强度极限相等时的拉-剪比压-剪容易破坏的实验现象。

大理石压缩实验 4 出现纵向裂纹现象, 除第二强度理论外, 其余所有强度理论都无法解释, 因为大

理石是各向异性材料, 而所有的强度理论都是适用于各向同性材料的。因此, 花岗岩压缩破坏不在各向同性强度理论中讨论。

## 参考文献

- [1] 韩文坝, 刘大斌, 蔡冰清, 等. 单元体斜截面上的应力不是其上质点平衡应力[J]. 中国工程科学, 2005, 11: 42~47
- [2] 赵九江, 张少实, 王春香. 材料力学[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 1987. 178, 182
- [3] 刘鸿文. 材料力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1991. 320~332, 359, 23
- [4] Timoshenko S, Gere J. Mechanics of Materials [M]. Van Nostrand Reinhold company, 1972; 北京: 科学出版社, 1978. 55~66
- [5] 冯英先, 董雪花, 徐志洪. 工程力学实验[M]. 南京: 南京理工大学, 2002. 9~12



# Intensity Theory and Test Verification

Liu Dabin<sup>1</sup>, Han Wenba<sup>2</sup>, Cai Bingqing<sup>3</sup>, Han Xiaodong<sup>4</sup>

(1. National MB Detect Center, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China;  
2. Yangzi Petrochemical Corporation Chinese Parent Company of Petrochemical SINOPEC,  
Nanjing 210048, China; 3. School of Materials Science and Engineering, Harbin Institute of Technology,  
Harbin 150001, China; 4. Daiyu Technology Limited Company, Shenzhen, Guangdong 518035, China)

[**Abstract**] In this paper, a comprehensive analysis and comparison is fulfilled between the four classical intensity theories, Mohr's intensity and a new balance particle intensity theories. A comparative study is developed between the test results of pulling or pressing in single direction and double directions. It is shown that the new balance particle intensity theory is more coincident with the test results than other five intensity theory. Especially, the intensity formula of pulling (bending)-shear (torsion) deduced from the particle balance theory can easily explain the phenomena that pulling makes the destructions easy and suppression makes the destruction hard to achieve. This phenomenon cannot be well explained by the four classical intensity theories and Mohr's intensity theory. The particle balance intensity theory clarifies the misunderstanding that if the equivalent stress is zero, the third and fourth intensity theory regard that the beam under three or four-directions cannot be destroyed whatever the force is. The balance particle intensity theory figures out a contrary conclusion with the third intensity theory and fourth intensity theory.

[**Key words**] intensity theory; test results; yield; stress state

---

(cont. from p. 43)

# Study on Ignition of Thermoplastic Linings

Xu Liang<sup>1,2</sup>, Zhang Heping<sup>1</sup>, Wan Yutian<sup>1</sup>

(1. State Key Laboratory of Fire Science, USTC, Hefei 230027, China; 2. Zhejiang Fire  
Brigade, Hangzhou 310014, China)

[**Abstract**] Cone calorimeter was employed to study the ignitability of common thermoplastics, and the numerical and linear regression methods were used to deduce the ignition model for intermediate thermal thickness. Then the ignition time data was analyzed with the deduced model to get the critical heat flux, ignition temperature and thermal properties for the studied materials. The results showed that the deduced critical heat flux and ignition temperatures agreed well with those from literature, which indicated that the model is applicable.

[**Key words**] thermoplastics; ignitability; critical heat flux; ignition temperature