工程网络计划的 LR 型模糊系数线性规划方法

高　朋,冯俊文
(南京理工大学经济管理学院,南京 210094)

[摘要]　工程网络计划的基础是对各工序持续时间的估计,而导致工序工期不确定性的因素不仅具有随机性,通常也具有模糊性。文章提出一种具有 LR 型模糊数的线性规划模型,解决了工程网络计划的时间参数估计和关键路径识别问题,并通过引入 λ 截集来充分描述决策者在不同情形下对工序工期估计的可信程度。最后给出一实例详细说明了该方法的应用过程及有效性。

[关键词]　工程网络计划;模糊线性规划;工序
[中图分类号]　F403.7　[文献标识码]　A　[文章编号]　1009－1742(2009)02－0070－05

1　前言

网络计划技术是指用网络图来表示项目中各项工序的进度及相互关系,并在此基础上进行网络分析,计算网络中各工序持续时间,以确定关键工序以及关键路径的项目计划管理方法[1]。经典的网络计划技术主要有计划评审技术(program evaluation and review techniques, PERT)和关键路径法(critical path method, CPM)。

工程网络计划的基础是对各工序持续时间的估计。因此对工序时间估计的正确与否,将决定项目进度能否按计划执行。PERT 认为工序持续时间 t 为随机变量而不是固定常数,通常用三种估计值来描述工序持续时间:a.最乐观时间 t_0;b.最可能时间 t_m;c.最悲观时间 t_p,并假设工序工期服从 Beta 分布;$t_p \geqslant t_m \geqslant t_0$,则可得到工序的期望工期 T_e:

$$T_e = \frac{T_0 + 4T_m + T_p}{6} \tag{1}$$

$$\sigma^2 = \left[\frac{T_p - T_0}{6}\right]^2 \tag{2}$$

其中,σ^2 为工序工期的方差。

尽管 PERT 的三点估计法考虑到了工程项目中的随机性与不确定性,但仍然存在一些缺陷和不足:a.在工程中,很多工序往往缺少执行的先例而造成样本量的不足,从而难以采用概率分布的形式对其工期进行估计;b.导致工序工期不确定性的因素中常具有模糊性,例如,地质状况、天气状况、施工技术与管理能力等。通常,这些因素要用自然语言来描述和表达,其度量具有模糊性,反映了人们对事物不确定性的主观反映[2],显然 PERT 方法无法考虑上述因素。针对此情况,文献[3]将模糊理论引入到网络计划技术中,提出了模糊计划评审技术(Fuzzy PERT),文献[4]分析了在工序工期为模糊数情形下的工程期望完工时间以及满足某一完工时间的可能性问题,文献[5]研究了在模糊环境下寻找网络图关键工序和关键路径的方法。但是上述方法由于引入模糊数容易造成运算的扩张现象,同时在关键路径的识别上也存在困难,甚至可能得出错误的结论[6]。

基于上述分析,在现有研究成果的基础上提出一种具有 LR 型模糊系数的线性规划模型,并以此为依据解决工程网络计划的时间参数估计和关键路径识别问题。该方法与现有文献方法相比较有计算简单,操作方便的优点。另外,LR 型模糊数是一类应用广泛的模糊数,且大部分模糊数都可以用它来表示,如三角模糊数、梯形模糊数、指数型模糊数等,从而使该方法更具有通用性。

[收稿日期]　2008－09－18;修回日期　2008－10－20
[基金项目]　"八六三"高技术研究和发展计划资助项目(2007KX301);江苏科协重大软科学资助项目(RS06108)
[作者简介]　冯俊文(1960－),男,山西太原市人,南京理工大学教授,研究方向为管理决策分析;E-mail:fengjunwen8@hotmail.com

2 模糊线性规划模型

2.1 LR 型模糊数

定义 1 模糊数[7]。模糊数是定义在实数 R 上的正规凸集，记 $\tilde{N}=\{(x,\mu_{\tilde{N}}(x)),x\in R\}$，$\mu_{\tilde{N}}(x)$是从 R 到[0,1]上的连续映射，又称为模糊数 $\tilde{N}$ 的隶属函数，$\mu_{\tilde{N}}:R\to[0,1]$：

$$\mu_{\tilde{N}}(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant a\\ f_{\tilde{N}}(x) & a\leqslant x\leqslant c\\ 1 & c\leqslant x\leqslant d\\ g_{\tilde{N}}(x) & d\leqslant x\leqslant b\\ 0 & x\geqslant b\end{cases} \tag{3}$$

其中，$f_{\tilde{N}}$ 为$[a,\ c]\to[0,\ 1]$的连续递增函数；$g_{\tilde{N}}$ 为$[d,\ b]\to[0,\ 1]$的连续递减函数。

定义 2 LR 型模糊数[8]。若模糊数 $\tilde{N}$ 为 LR 型模糊数，则其隶属函数 $\mu_{\tilde{N}}(x)$的形式（见图 1）为

$$\mu_{\tilde{N}}(x)=\begin{cases}L\left(\dfrac{m-x}{\alpha}\right) & x\leqslant m,\alpha>0\\ R\left(\dfrac{x-m}{\beta}\right) & x\geqslant m,\beta>0\end{cases} \tag{4}$$

其中，$L:[0,+\infty]\to[0,1]$；$R:[0,+\infty]\to[0,1]$；$L(0)=R(0)=1$；$L(R)$为严格单调递增（减）函数；m 为 $\tilde{N}$ 的中心（均值）；α 和 β分别是 $\tilde{N}$ 的左、右宽，记 $\tilde{N}=(m,\alpha,\beta)$。

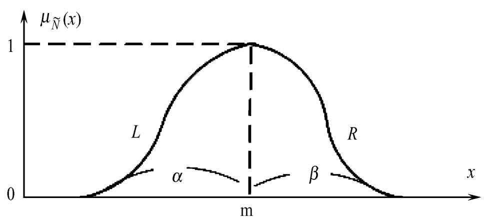

图 1 LR 型模糊数的隶属函数

Fig.1 The membership function of LR－type fuzzy number

特别地，当 $L(x)=R(x)=\max(0,1-x)$时，$\tilde{N}$ 为 LR 型三角模糊数。

定义 3 λ 截集。对于隶属函数形式为 $\mu_{\tilde{N}}(x)$的 LR 型模糊数 $\tilde{N}$，对 $\forall\ \lambda\in[0,1]$，称 $\tilde{N}^{\lambda}=\{x\mid\mu_{\tilde{N}}(x)\geqslant\lambda\}$为 $\tilde{N}$ 的 λ 截集，有：

$$\tilde{N}^{\lambda}=[m-(1+L^{-1}(\lambda))\alpha,m+(1+R^{-1}(\lambda))\beta] \tag{5}$$

当 $\tilde{N}$ 为 LR 型三角模糊数时，

$$\tilde{N}^{\lambda}=[m-(1-\lambda)\alpha,m+(1-\lambda)\beta] \tag{6}$$

2.2 模糊线性规划模型

模糊规划作为解决带有模糊参数的优化决策问题的有力工具，长期以来一直受到国内外学者的广泛关注。模糊线性规划是模糊规划中最常用的模式。尽管模糊线性规划模型有很多形态，文章主要讨论仅约束条件含模糊数的模糊线性规划问题[9]。

$$\max f(x)=\sum_{j=1}^{p}c_i x_i$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{p}a_{ij}x_j\leqslant\tilde{b}_i & i=1,2,\cdots,m-1\\ \sum\limits_{j=1}^{p}a_{mj}x_j\leqslant\tilde{b}_m & x_j\geqslant 0,j=1,2,\cdots,p_0\\ x_j\leqslant 0,j=p_0+1,p_0+2,\cdots,p\end{cases} \tag{7}$$

其中，$f(x)$为目标函数；c_i 为决策系数；x_i 为决策变量；a_{ij}为技术系数；$\tilde{b}_i$，$\tilde{b}_m$ 为资源模糊系数。

3 基于模糊线性规划模型的工程网络计划方法

3.1 时间参数的解释

网络中工序的时间参数有：工序最早开始时间 T_{ES}；工序最早完工时间 T_{EF}；工序最迟开始时间 T_{LS}；工序最迟完工时间 T_{LF}；工序总时差 S；工序自由时差 F，工序总时差与自由时差的关系可以通过图 2 来说明。

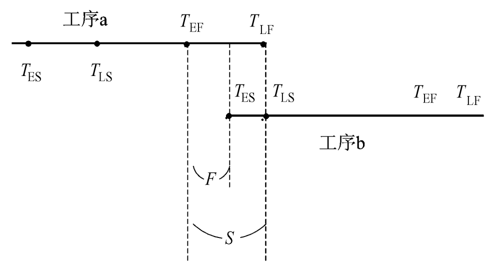

图 2 工序的总时差与自由时差

Fig.2 The slack time and free time of an activity

从图 2 可以看出，工序 a 的总时差 S 包含了自由时差 F，F 体现了工序的实际机动（富裕）时间。

3.2 问题描述

$G(V,\ A,\tilde{T})$是一个有向无圈图表示的网络。V 是 G 中所有节点（在计划网络中，节点表示事件）集合，$A\subset V\times V$ 是 G 中所有边的集合（边表示工序），每一个工序 $a(i,j)\in A$ 都对应于一个时间 t_{ij} 表示工期，考虑到项目进程中的模糊性，令 $\tilde{t}_{ij}\in\tilde{T}$ 为工序的模糊工期，用 LR 型模糊数表示，记 $\tilde{t}_{ij}=(t_{e_{ij}},\alpha,\beta)$。让 V_1 表示起始节点（项目开始事件），V_n 表示结束节点（项目结束事件），并且让 $P(n)$表示从节

点 1 到节点 n 的所有路径的集合，让 CP 表示关键路径集，显然 $CP \subset P(n)$。

现考虑模糊网络图中工序的一般情况，如图 3 所示。$a(j, r^1), \cdots, a(j, r^m)$ 为 $a(i, j)$ 的紧后工序（项目结束事件 V_n 不存在紧后工序）。为描述的方便，引入时间变量 x，对于工序 $a(i, j)$，x_i 表示 $a(i, j)$ 的最早开始时间，$x_i = T_{ES}(i, j)$，x_j 为 $a(i, j)$ 的完工时间。

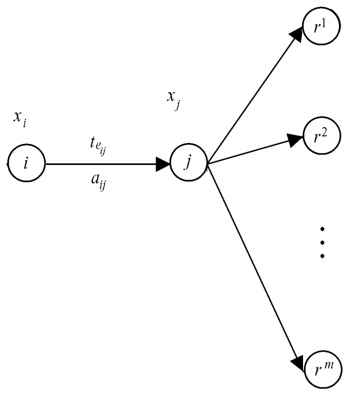

图 3　具有紧后关系的典型工序

Fig.3　Typical activity with immediate predecessors

定义 3　若 $a(i, j)$ 为关键工序，则该工序的总时差 $S(i, j) = 0$，即 $x_j - (x_i + t_{e_{ij}}) = 0$，且 x_j 为工序 $a(i, j)$ 的最早完工时间或最迟完工时间。

定义 4　若 $a(i, j)$ 为非关键工序，则该工序有机动时间，即 $S(i, j) > 0$，即 $x_j - (x_i + t_{e_{ij}}) > 0$，且 x_j 为工序 $a(i, j)$ 的最迟完工时间。

结论 1（确立约束条件）　整合定义 3 和定义 4，有

$$x_j - x_i \geqslant t_{e_{ij}} \tag{8}$$

结论 2（确定关键工序）　若工序 $a(i, j)$ 满足 $x_j - (x_i + t_{e_{ij}}) = 0$，当：

1）在该工序的紧后工序中，$\forall\, k \in \{1, 2, \cdots, m\}$，满足 $a(j, r^k) \notin CP$，则 x_j 为工序 $a(i, j)$ 最早完工时间，且工序 $a(i, j)$ 为非关键工序；

2）在该工序的紧后工序中，$\exists\, k \in \{1, 2, \cdots, m\}$，满足 $a(j, r^k) \in CP$，则 x_i 为工序 $a(i, j)$ 最迟完工时间，且工序 $a(i, j)$ 为关键工序。

3.3　模型

根据上述问题的描述，结合式（8）建立相应的模糊线性规划模型，以求出工程网络的工期和识别关键路径。

$$\min f(x) = x_n$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} x_j - x_i \geqslant \tilde{t}_{ij} \\ x_j \geqslant x_i \geqslant 0 \quad i = 1, 2, \cdots, n, j = 1, 2, \cdots, n \end{cases} \tag{9}$$

其中，目标函数 $f(x)$ 为求解 x_n 的最小值，由于 x_n 值即为项目的完成时间，即项目的总工期，因此目标函数为求最短项目工期。用 LR 型模糊数表示模糊工期 $\tilde{t}_{ij}$，记 $\tilde{t}_{ij} = (t_{e_{ij}}, \alpha, \beta)$，不失一般性，这里采用 LR 型三角模糊数。

引入 λ 截集充分描述决策者在不同情形下对工序工期估计的可信程度。λ 的意义就是决策者的决策信心，λ 越大，表明决策者的估计信心越大，反之 λ 越小。根据式（6），模型（9）可转化为

$$\min f(x) = x_n$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} x_j - x_i \geqslant [t_{e_{ij}} - (1-\lambda)\alpha, t_{e_{ij}} + (1-\lambda)\beta,] \\ x_j \geqslant x_i \geqslant 0 \\ i = 1, 2, \cdots, n, j = 1, 2, \cdots, n \end{cases} \tag{10}$$

4　实例分析

下面分析如图 4 所示的工程网络计划问题。该网络中各工序的紧前工序、紧后工序以及模糊工期的 LR 型三角模糊数形式见表 1。

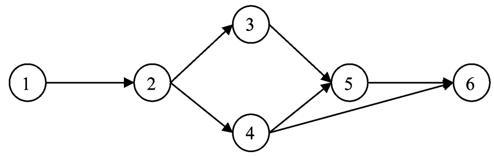

图 4　双代号网络图

Fig.4　AOA network

表 1　工序关系及其模糊参数

Table 1　The logic relationship between activities and their fuzzy parameters

工序	紧前工序	紧后工序	模糊工期 /天	左侧模糊宽度	右侧模糊宽度
(1,2)	/	a_{23}，a_{24}	(5,2,2)	2	2
(2,3)	a_{12}	a_{35}	(7,2,3)	2	3
(2,4)	a_{12}	a_{45}，a_{46}	(15,3,8)	3	8
(3,5)	a_{23}	a_{56}	(11,1,2)	1	2
(4,5)	a_{24}	a_{56}	(10,2,5)	2	5
(4,6)	a_{24}	/	(20,4,3)	4	3
(5,6)	a_{35}，a_{45}	/	(25,5,5)	5	5

根据表 1 资料及式(10),建立模糊线性规划模型:

$$\min f(x)=x_6$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_2-x_1\geqslant[5-(1-\lambda)2,5+(1-\lambda)2] \\ x_3-x_2\geqslant[7-(1-\lambda)2,7+(1-\lambda)3] \\ x_4-x_2\geqslant[15-(1-\lambda)3,15+(1-\lambda)8] \\ x_5-x_3\geqslant[11-(1-\lambda)1,11+(1-\lambda)2] \\ x_5-x_4\geqslant[10-(1-\lambda)2,10+(1-\lambda)5] \\ x_6-x_4\geqslant[20-(1-\lambda)4,20+(1-\lambda)3] \\ x_6-x_5\geqslant[25-(1-\lambda)5,25+(1-\lambda)5] \\ x_6\geqslant x_5\geqslant\cdots x_1\geqslant 0 \\ \lambda\in[0,1] \end{cases}\tag{11}$$

为充分考虑工序工期估计确信程度对网络计划的影响,可考虑最确信情况下($\lambda=1$),中等确信情况下($\lambda=0.5$),最不确信情况下($\lambda=0$)3 种情况。

运用 WinQSB 软件对式(11)进行求解,结果如表 2。

表 2 模糊线性规划模型的求解结果

Table 2 The results of fuzzy linear program

λ	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$f(x)$
1	0	5	16	20	30	55	55
0.5	0	4,6	14,19	17.5,25	26.5,37.5	49,65	49,65
0	0	3,7	12,22	15,30	23,45	43,75	43,75

由表 2 可知,当 $\lambda=1$ 时,此时表明决策者对各工序工期的估计最为确信,工程项目最可能的总工期为 55 天。当 $\lambda=0$ 时,此时表明决策者对各工序工期的估计最为不确信,工程项目的总工期为 43~75 天。值得注意的是,43 天的总工期为低估值,可能会造成项目无法按时完成的风险,而 75 天为总工期的高估值,可能会造成项目资源的闲置或浪费。

表 3 $\lambda=0.5$ 下的网络参数

Table 3 The parameter values under $\lambda=0.5$

工序	期望工期 T_e	最早开始时间 T_{ES}	最迟完工时间 T_{LF}	总时差 $S=T_{LF}-(T_{ES}+T_e)$	关键工序
(1,2)	4,6	0	4,6	0	是
(2,3)	6,8.5	4,6	14,19	4,4.5	否
(2,4)	13.5,19	4,6	17.5,25	0	是
(3,5)	10.5,14	14,19	26.5,37.5	2,4.5	否
(4,5)	9,12.5	17.5,25	26.5,37.5	0	是
(4,6)	18,21.5	17.5,25	49,65	13.5,18.5	否
(5,6)	22.5,27.5	26.5,37.5	49,65	0	是

表 3 给出了在 $\lambda=0.5$ 下的计算结果。可以看出,当 $\lambda=0.5$ 时,所计算的总工期为 49~65 天,此时决策者对工期估计的确信度为中等。由于笔者根据工序的紧后关系确定关键路径,因此关键工序的检测应采用 $a(5,6)\to a(1,2)$ 的逆向过程。由于工序(1,2),工序(2,4),工序(4,5),工序(5,6)满足结论 2 的两个条件,所以它们都是关键工序,构成关键路径。

图 5 给出了不同 λ 值下项目工期的估计结果。

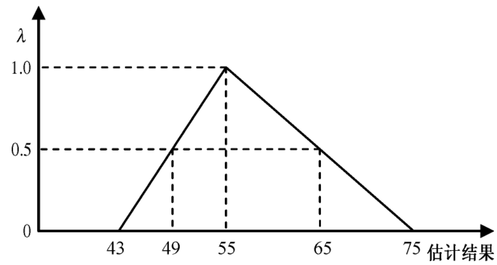

图 5 不同 λ 值下项目工期的估计结果

Fig.5 Estimation of project duration under different λ value

5 结语

虽然传统网络计划方法考虑到了工程项目的随机不确定性影响,但对导致工序工期不确定性的模糊性因素却没有充分考虑。文章提出一种具有 LR 型模糊数的线性规划模型,解决工程网络计划的时间参数估计和关键路径识别问题,通过引入 λ 截集来充分描述决策者在不同情形下对工序工期估计的可信程度,同时也避免了由于引入模糊数而导致的运算扩张问题。该方法的另一个优点就是可以分别对每个工序设置不同的 λ 值,因而得到的时间参数更为符合实际。

另外,如何对模糊线性规划进行扩展,以及考虑在资源约束下运用模糊线性规划方法进行项目进度计划优化等是值得进一步研究和探讨的内容。

参考文献

[1] 卢向南.项目计划与控制[M].北京:机械工业出版社.2006:66-68

[2] 褚春超.复杂工序关系的模糊网络计划分析与建模[J].天津大学学报,2006,39(5):631-636

[3] Gazdik I. Fuzzy-network planning-FNET[J]. IEEE Transaction on Reliability, 1983, 32(3):304-313

[4] McCahon C S. Using PERT as an approximation of fuzzy projection-network analysis[J]. IEEE Transactions on Engineering Management,

1993, 40(2):146－153

[5] Nasution S H. Fuzzy critical path method [J]. IEEE Transactions on system, Man and Cybernetics, 1994, 24(1):48－57

[6] Yao Jinshing. Fuzzy critical path method based on signed distance ranking of fuzzy numbers [J]. IEEE Transaction on Systems, Man and Cybernetics. Part A, 2000, 30 (1): 76－82

[7] Stefan Chanas, Pawel Zielinski. Critical Path analysis in the network with fuzzy activity times [J], Fuzzy Sets and Systems, 2001, (122): 195－204

[8] Dubois D, Prade H. Operations on fuzzy numbers [J], International Journal of Systems and Science, 1978, (30):613－626

[9] Hua Ke, Liu Baoding. Project scheduling problem with mixed uncertainty of randomness and fuzziness [J]. European Journal of Operational Research, 2007,(183): 135－147

Linear programming method with LR type fuzzy numbers for network scheduling

Gao Peng, Feng Junwen

(*School of Economics and Management*, *Nanjing University of Science and Technology*, *Nanjing 210094*, *China*)

[**Abstract**] Estimation of activity duration is a basic problem for project scheduling. However, the uncertainty of activity duration originates from both probability and fuzziness in the real world. This paper develops a linear programming method with LR type fuzzy numbers, which aims to estimate activity duration and identify critical path, and applies the λ－cut to indicate the degree of optimism of a decision maker. Finally, an example is given to demonstrate the application and validity of the proposed method.

[**Key words**] network scheduling; fuzzy linear programming; activity