

基于非关联流动法则的滑移线场及上限法研究

郑颖人¹, 邓楚键^{1,2}, 王敬林¹

(1. 后勤工程学院, 重庆 400041; 2. 空防六处, 湖南衡阳 421001)

[摘要] 当前岩土材料的滑移线场理论及上限法中都广泛采用经典塑性理论中的关联流动法则, 由此得出应力特征线与速度滑移线一致的结论。而试验得知, 岩土材料并不服从关联流动法则, 因而应力特征线与速度滑移线不可能重合。文章分析了基于关联流动法则的滑移线场及上限法中存在的问题, 根据广义塑性理论推导了基于非关联流动法则的滑移线场及上限法, 消除了现行滑移线场理论及上限法理论中的种种矛盾。

[关键词] 滑移线场; 上限法; 关联流动法则; 非关联流动法则; 广义塑性理论

[中图分类号] TU43 **[文献标识码]** A **[文章编号]** 1009-1742(2010)08-0056-14

1 前言

传统塑性理论是基于金属材料的变形机制建立的, 一些基本假设并不符合岩土材料的性质。如果把传统塑性理论直接推广到岩土材料, 就会导致岩土材料的滑移线场理论和极限分析理论中出现某些矛盾。广义塑性理论^[1]是在岩土材料的变形机制和传统塑性理论基础上建立起来的, 它修正了传统塑性力学中的 3 个假设, 即传统塑性势假设、关联流动法则假设与应力主轴不旋转假设。它既适用于岩土材料, 也适用于金属材料, 传统塑性理论是它的特例。对于岩土体的极限分析主要表现在流动法则上, 在传统塑性力学中, 塑性势函数与屈服函数相同, 称为关联流动法则, 此刻塑性应变增量方向与屈服面正交; 在广义塑性理论中, 塑性势函数与屈服函数不相同, 称为非关联流动法则, 此刻塑性应变增量方向与屈服面不正交, 但保持与塑性势面正交。当前岩土材料的滑移线场理论及上限法中都广泛采用经典塑性理论中的关联流动法则, 由此得出应力特征线与速度滑移线一致。而试验得知, 岩土材料并不服从关联流动法则, 因而应力特征线与速度滑移线不可能重合。一般按关联流动法则, 规定速度矢量方

向与速度滑移线成 φ 角, 这又违反了速度滑移线的定义, 按定义速度方向应在速度滑移线的切向。流动法则的研究起源于岩土材料的剪胀问题, 若应用关联流动法则, 则产生的剪胀远比实际情况要大, 这也与极限分析中假设体变为零互相矛盾。一些学者对非关联流动法则进行了研究^[2-6], 但都采用改变 c, φ 值求出基于非关联流动法则的滑移线, 而笔者等则按照严格的滑移线场理论找出满足非关联(包括关联)流动法则的滑移线场, 基于非关联流动法则与关联流动法则分别导出了岩土地基上的极限荷载, 两者的结果是一致的, 因为极限荷载与流动法则无关。但是, 两者的速度场有很大区别, 表明基于关联流动法则的岩土速度场理论有误。

文章是笔者近年研究基于非关联流动法则极限分析方面所做工作的系统总结, 并与基于关联流动法则的极限分析进行了比较。

2 岩土材料平面应变问题的应力滑移线场^[7]

2.1 应力滑移线

按岩土力学特点建立坐标系, 如图 1 定重力方向向下为 y 轴正向, 按左手规则确定 x 轴方向, 图中 θ 为 M 点主应力 σ_1 与 y 轴的夹角。 α 及 β 分别为过

[收稿日期] 2009-02-10

[作者简介] 郑颖人(1933-), 男, 浙江镇海县人, 中国工程院院士, 解放军后勤工程学院教授, 博士生导师, 从事岩土力学、岩土工程与地下工程研究; E-mail: cqdzx@263.net

M 点的 α 及 β 滑移线与 y 轴的夹角。 α 、 β 及 θ 均以逆时针方向为正, σ_1 、 σ_3 以压为正。

应力滑移线是理想塑性体达到极限平衡状态时的剪应力迹线。即理想塑性体中任意一点在某一面上的剪应力达到它的抗剪强度时, 就发生剪切塑性流动(剪切破坏)。如图 2 所示, 当应力莫尔圆在抗剪强度包线(这里为库仑方程直线 AD) 以内时, 该点为弹性状态; 若应力莫尔圆与抗剪强度库仑线 AD 相切于 D 时, 该点即处于极限平衡状态, 此时莫尔圆上 D 点的正应力为 σ_n , 剪应力为 τ_n 。剪应力 τ_n 与主应力 σ_1 的夹角为 $\mu = \pi/4 - \varphi/2$ 。

图 1 中 M 点的两个破坏面或应力滑移线的方向角分别为:

$$\begin{aligned} \text{沿 } \alpha \text{ 线} & \quad \alpha = \theta - \mu; \\ \text{沿 } \beta \text{ 线} & \quad \beta = \theta + \mu \end{aligned} \quad (1)$$

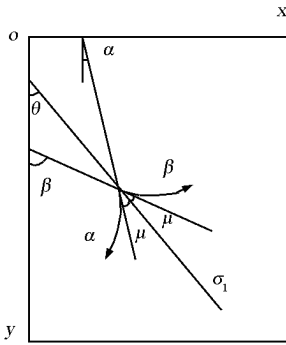


图 1 基本坐标系

Fig. 1 Basic coordinate system

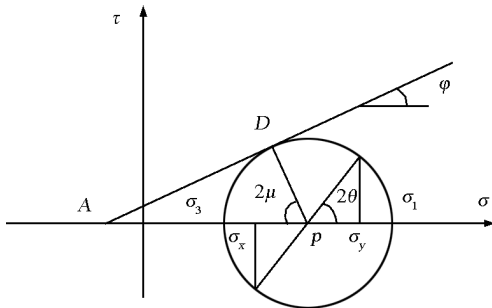


图 2 莫尔—库仑屈服面与极限应力圆的关系

Fig. 2 The relationship between Mohr—Coulomb yield criterion surface and limit stress circle

式(1)中 μ 为两条滑移线方向与 σ_1 作用方向之间的夹角。当采用莫尔—库仑屈服准则时, $\mu = \pi/4 - \varphi/2$; 当采用 Tresca 或 Mises 屈服准则时, $\mu = \pi/4$ 。

由图 2 可以看到, 莫尔—库仑材料($\varphi - c$ 型岩土材料)的两个破坏面(α 面和 β 面)与主应力 σ_1 的

方向夹角为 $\mu = \pi/4 - \varphi/2$, 而 Tresca 或 Mises 材料为 $\pi/4$ 。把平面上各点破坏面(或屈服面)方向的线段连接而成的迹线称为应力滑移线, 即破坏面(或屈服面)迹线才是当前一般所谓的滑移线。实际上岩土材料的真正滑移方向不在滑移线上, 而与滑移线成 $\varphi/2$ 角。由此可见, 对岩土类材料一般所说的滑移线与真正的滑移方向是不一致的, 这是因为岩土材料的塑性势面与屈服面是不重合的。然而, 求解应力滑移线的目的是因为滑移线能作为求解应力方程的特征线, 而真正滑移方向的迹线不是应力特征线。

如图 1 所示, 设 P 点坐标为 (x, y) , 过这点的主应力 σ_1 的迹线切线方向, 即 σ_1 方向, 与 y 轴交角为 θ 。以逆时针旋转形成的 θ 角为正值, 顺时针为负值。由图可得 α 线与 β 线的微分方程式为

$$\begin{aligned} \alpha \text{ 线} & \quad dx/dy = \tan(\theta - \mu); \\ \beta \text{ 线} & \quad dx/dy = \tan(\theta + \mu) \end{aligned} \quad (2)$$

可以证明, 式(2)也就是应力方程的特征线方程。

2.2 岩土材料极限平衡方程及其解答

极限平衡方程:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \gamma &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\text{令} \quad \left. \begin{aligned} \sigma_x &= p - R \cos 2\theta \\ \sigma_y &= p + R \cos 2\theta \\ \tau_{xy} &= R \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

其中, p, R 分别为平均应力及应力圆半径:
 $p = (\sigma_x + \sigma_y)/2, R = (p + \sigma_c) \sin \varphi, \sigma_c = c \cot \varphi$ 。
将式(4)代入式(3)可得:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial y} \sin \varphi \sin 2\theta + \frac{\partial p}{\partial x} (1 - \sin \varphi \cos 2\theta) \\ + 2R \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \cos 2\theta + \frac{\partial \theta}{\partial x} \sin 2\theta \right) &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial y} (1 + \sin \varphi \cos 2\theta) + \frac{\partial p}{\partial x} \sin \varphi \sin 2\theta \\ + 2R \left(-\frac{\partial \theta}{\partial y} \sin 2\theta + \frac{\partial \theta}{\partial x} \cos 2\theta \right) &= \gamma \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

利用特征线法可以求出:

$$\left. \begin{aligned} \alpha \text{ 线: } & dp - 2(p + \sigma_c) \tan \varphi d\theta \\ & = \frac{\gamma \sin(\theta + \mu) dy}{\cos \varphi \cos(\theta - \mu)} \\ \beta \text{ 线: } & dp + 2(p + \sigma_c) \tan \varphi d\theta \\ & = \frac{\gamma \sin(\theta - \mu) dy}{\cos \varphi \cos(\theta + \mu)} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

这就是有重的 $\varphi - c$ 型岩土材料沿 α 及 β 族滑移线的平均应力 p 和 σ_1 与 y 轴夹角 θ 的差分方程。利用差分法, 就可以求解有重岩土各种边值问题的滑移线场分布和极限荷载。按式(6), 可以得到特殊情况下应力特征线上 $p - \theta$ 解, 它是沿 α 及 β 族滑移线上 $p - \theta$ 的变化规律方程。显然, 它不是应力特征线的坐标方程, 应力特征线在直角坐标系中是 x, y 的函数, 在极坐标中是 r, θ 的函数。

2.3 应力特征线迹线方程的求解及应力特征线方程的两种形式

求解应力滑移线归结为在 xy 平面内求解 $f = f(x, y)$, 使其:

$$\frac{dx}{dy} = \tan(\theta \pm \mu) = \tan\left[\theta \pm \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\right] \quad (7)$$

下面分 θ 为常数和变量两种情况进行讨论:

1) 直线型 ($p, \theta = \text{const}$)。由于 p, θ 为常数, 式(7)积分可得 α 线和 β 线为直线, 方程为:

$$y = \cot\left[\theta \pm \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\right]x + C \quad (8)$$

式(8)中 C 为常数, 这种情况称为均匀应力场(见图3(a))。

2) 对数螺旋线 ($p, \theta \neq \text{const}$)。由于岩土流动方向与应力滑移线成一角度, 因而数学上应力滑移线一定是对数螺旋线。根据 θ 为变量, 可以假设:

$$r = r_0 e^{A \tan(B + \frac{\varphi}{2})} \quad (9)$$

经坐标转换并整理可以得到(此处 A 为极角):

$$\left. \begin{aligned} x &= r \sin A = r_0 e^{A \tan(B + \frac{\varphi}{2})} \sin A, \\ y &= r \cos A = r_0 e^{A \tan(B + \frac{\varphi}{2})} \cos A, \\ \frac{dx}{dy} &= \tan\left[\left(A - B + \frac{\pi}{4}\right) + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\right] \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

由上面的推导过程知道式中 A, B 值是根据具体情况确定的, 但必须满足关系式 $\theta = A - B + \pi/4$ 使得 $\frac{dx}{dy} = \tan\left[\theta + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\right]$ 成立。由此可以采用 $B = 0, r = r_0 e^{(\theta - \frac{\pi}{4}) \tan \frac{\varphi}{2}}$ 或者 $B = \varphi/2, r = r_0 e^{[\theta - (\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2})] \tan \varphi}$ 的应力滑移线形式。

从物理意义上看, B 就是岩土材料的膨胀角(它在数值上与剪胀角 ψ 不同), $B = 0$, 表示岩土无体胀, 满足基本方程, 也符合岩土的实际状况。当 $B = 0$ 时, $A = \theta - \frac{\pi}{4}$, β 线的迹线方程为:

$$r = r_0 e^{(\theta - \frac{\pi}{4}) \tan \frac{\varphi}{2}} \quad (11)$$

其滑移线场的图形如图3(c)所示, 此时 α 线的极点为 O 点, 笔者等称它为基于非关联流动法则的扇形滑移线场。由后述可知, α 线的切线方向就是岩土的真正滑动方向, 即速度矢量方向, 它与应力滑移线成 $\varphi/2$ 角, 表明它不遵守关联流动法则。所以, 这种滑移线场可用于基于广义塑性理论的滑移线场分析中。尽管岩土体胀不符合基本方程与实际情况, 传统的岩土极限分析中, 仍然假设岩土体可有远超过实际的体胀, 以满足关联流动法则。相当于人为地将 α 线旋转一个膨胀角 $\varphi/2$, 即设 $B = \varphi/2$, 此时极点 O 旋转到 A 点, 相应的 α 线也旋转了 $\varphi/2$, 形成基于关联流动法则的扇形应力滑移线场, 这就是传统极限分析中采用的应力滑移线场, 速度矢量方向与应力滑移线成 φ 角, 如图3(b)所

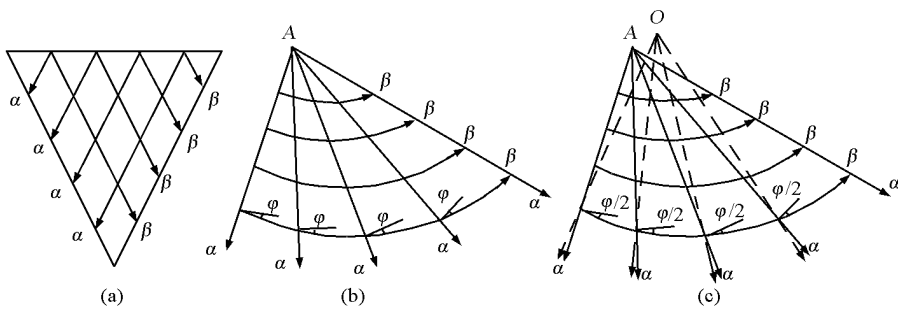


图3 均匀应力场与简单应力场

Fig. 3 Homogeneous stress field and simple stress field

示。即有 $B = \varphi/2$, $A = \theta - (\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2})$, β 滑移线迹线方程为

$$r = r_0 e^{[\theta - (\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2})] \tan \varphi} \quad (12)$$

这与传统岩土极限分析中, β 滑移线迹线经验方程 $r = r_0 e^{\theta \tan \varphi}$ 一致。不过这里的 θ 不再是一般所说的 θ , 其含义已不是 y 轴与大主应力轴 σ_1 的夹角。这种滑移线场可用于基于关联流动法则的滑移线场分析, 尽管真实的岩土材料并不存在这种状态, 但作为一种解题方法是可行的, 同样可以获得准确的极限荷载。

其实, 对数螺旋线应力滑移线场或应力特征线场可以有很多个, 只要 B 在 $0 \sim \varphi/2$ 范围内取值, 不同的 B 值对应着不同的应力滑移线场, 也对应着不同的体胀。特殊的 B 值有 2 个: $B = 0$ 表征着岩土材料没有体变, 并满足非关联流动法则, 形成 O 极点应力滑移线场; $B = \varphi/2$ 表征着岩土材料有远大于实际的体胀, 且满足关联流动法则, 形成 A 极点的应力滑移线场。由上可见, 基于关联流动法则的传统岩土极限分析中存在如下问题: a. 允许岩土有过大的剪胀, 这既不满足基本方程, 又远远偏离实际, 所以, 它只是为了解题方便, 使其能用关联流动法则解题而人为构筑的虚拟状态。b. 由于传统极限分析中, 当时没有发现适用于岩土真实状态的 O 极点扇形应力滑移线场, 因而无法求出基于非关联流动法则的滑移线场解答。c. 由极点 O 旋转到 A 点, 人为地将 α 线旋转了 $\varphi/2$, 由此得出速度矢线与应力滑移线成 φ 角, 这只是虚拟状态, 应当在解题后, 再将岩土的虚拟状态回转到真实状态, 即再人为反转 $\varphi/2$ 角, 此时的速度矢线与应力滑移线夹角也就成了 $\varphi/2$ 角, 然而, 目前的做法没有这一反转过程, 因此这一结论只适用于关联流动法则的虚拟状态, 不符合岩土的真实状况, 它会导致速度场的求解出现严重错误, 但不会影响求极限荷载, 因为求解极限荷载时不需要引入流动法则。因此在应力滑移线场分析中, 无论是基于广义塑性理论 (这里是指基于非关联流动法则), 还是基于传统塑性理论都会得出同样的极限荷载。d. 尽管传统岩土极限分析中采用了关联流动法则, 但实际上都没有使速度滑移线 (速度矢线) 与应力滑移线一致, 这也是传统岩土极限分析自相矛盾的地方。可见传统岩土极限分析中常假设速度滑移线与应力滑移线一致是不客观的。

3 岩土材料平面应变问题的速度滑移线场^[8]

3.1 速度滑移线方程

速度滑移线是理想塑性体达到极限状态时, 塑性流动的方向迹线。理想塑性体在塑性流动阶段, 塑性区域中的一点塑性应变率和塑性流动方向, 在经典塑性理论中, 由屈服函数和关联流动法则决定。在广义塑性理论中, 由塑性势函数和非关联流动法则决定, 适用于金属材料的经典塑性理论只是它的特例, 因而该节中研究内容既适应岩土材料, 又适应金属材料。对于平面应变问题, 当达到极限状态时, 理想塑性将沿着塑性势面的梯度方向 (q 方向) 发生流动, 而不像经典塑性中, 沿屈服面的梯度方向 (σ_n 方向) 流动, 此时有

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon_x &= \frac{\partial V_x}{\partial x} = \lambda \frac{\partial q}{\partial \sigma_x} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \lambda \cos 2\theta \\ d\varepsilon_y &= \frac{\partial V_y}{\partial y} = \lambda \frac{\partial q}{\partial \sigma_y} = \frac{\sqrt{3}}{2} \lambda \cos 2\theta \\ d\gamma_{xy} &= \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} = \lambda \frac{\partial q}{\partial \tau_{xy}} = \sqrt{3} \lambda \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

将式 (13) 中第一式与第二式相减与相加得:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V_x}{\partial x} - \frac{\partial V_y}{\partial y} &= -\sqrt{3} \lambda \cos 2\theta \\ \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

式 (14) 就是以应变表示的相容性条件, 其中第二式即为极限分析中体应变为零的基本假设。

现设 $V_{\alpha'}$, $V_{\beta'}$ 是塑性区内任意一点 p 的速度矢量沿滑移线 α' 及 β' 方向的速度分量, 如图 4 所示, 则速度矢量沿直角坐标系 x 与 y 方向的分量 V_x , V_y 与 $V_{\alpha'}$, $V_{\beta'}$ 的关系为:

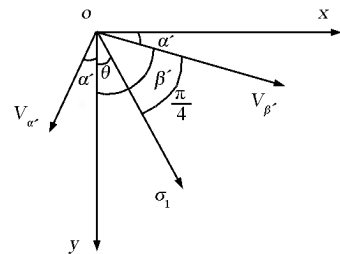


图 4 位移速度分解

Fig. 4 Velocity component analysis

$$\left. \begin{aligned} V_x &= -V_{\alpha'} \sin(45^\circ - \theta) + V_{\beta'} \cos(45^\circ - \theta) \\ V_y &= V_{\alpha'} \cos(45^\circ - \theta) + V_{\beta'} \sin(45^\circ - \theta) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

将式(15)代入(14),并令 x, y 沿 β', α' 方向, 即 $\alpha' = 45^\circ - \theta = 0, \theta = 45^\circ$, 则可得出:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V_{\beta'}}{\partial s_{\beta'}} + V_{\alpha'} \frac{\partial \theta}{\partial s_{\beta'}} &= 0 \\ \frac{\partial V_{\alpha'}}{\partial s_{\alpha'}} - V_{\beta'} \frac{\partial \theta}{\partial s_{\alpha'}} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

即沿 β' 线有: $dV_{\beta'} + V_{\alpha'} d\theta = 0$

沿 α' 线有: $dV_{\alpha'} - V_{\beta'} d\theta = 0$ (17)

这就是服从广义塑性理论时沿滑移线方向的速度方程。由于塑性流动是沿塑性势面梯度方向进行的,与屈服条件无关,所以它对金属材料与岩土材料都适用。

3.2 速度滑移线与应力特征线的关系

速度方程与应力极限平衡微分方程一样,也是一阶拟线性偏微分方程组。利用与应力极限平衡微分方程组同样的特征线或滑移线解法,可求得其速度滑移特征线的方程为:

$$\frac{dx}{dy} = \tan\left(\theta \pm \frac{\pi}{4}\right) \quad (18)$$

可以将式(18)同前面应力特征线方程的特征线 $\frac{dx}{dy} = \tan\left[\theta \pm \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\right]$ 进行比较,对于金属材料,

应力特征线方程的特征线变为 $\frac{dx}{dy} = \tan\left(\theta \pm \frac{\pi}{4}\right)$

,则速度方程特征线与应力(极限平衡微分)方程特征线一致,即速度滑移线与应力特征线相同(见图5(a)),他们与 x 轴或 y 轴的夹角均为 $\pi/4$,因而应力特征线和速度滑移线的夹角为零。对于岩土材料($\varphi \neq 0$),速度滑移线与应力特征线成 $\varphi/2$ 夹角。可见,场内任何点上应力特征线场与速度滑移线之间处处都成 $\varphi/2$ 角(见图5(b)),而不是基于关联流动法则导出的 φ 角(见图6)。在简单应力场中,速度滑移线是圆弧线,应力特征线是对数螺线,当采用非关联流动法则时(见图5(b)),在同一点上速度滑移线与应力特征线间必成 $\varphi/2$ 角,而当采用关联流动法则时,相当于人为地将 O 点向 A 点旋转 $\varphi/2$ 角,成为 A 极点的速度滑移线场(见图3),满足关联流动法则,应力特征线与速度滑移线处处成 φ 角。

3.3 速度滑移线场

由应力特征线的讨论可知,前面求出的结果是

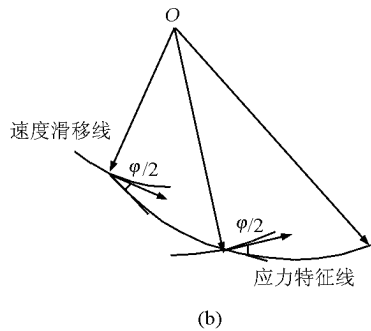
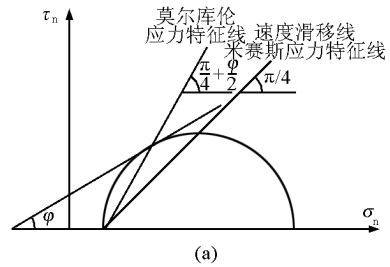


图5 基于广义塑性理论的应力特征线与速度滑移线的关系

Fig. 5 The relationship between the velocity slip line and the stress characteristic line based on the generalized plastic theory

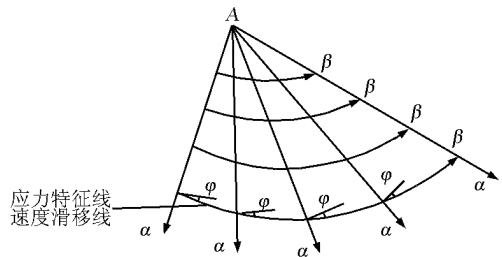


图6 基于传统塑性理论的应力特征线场与速度滑移线的关系

Fig. 6 The relationship between the velocity slip line and the stress characteristic line based on the traditional plastic theory

指在速度滑移线某一点上速度的关系式,而实际的速度滑移线并未求出,而且它还要依据于应力特征线中的 θ 变化。若要根据方程求解速度滑移线是相当困难的,下面笔者分3种情况分别进行讨论(坐标系的規定如同前面应力特征线的坐标系一样,即在同一坐标系):

1) 直线型($d\theta = 0$)。当滑移线为直线时, $d\theta = 0$, 可得:

$$dV_{\alpha'} = 0, dV_{\beta'} = 0 \quad (19)$$

由此可见, $V_{\alpha'} = \text{常数}, V_{\beta'} = \text{常数}, \theta$ 为常数或

零。可以知道速度滑移线也为直线,其方程和应力特征线相对应为:

$$y = x \cot(\theta \pm \frac{\pi}{4}) + C \quad (20)$$

2) 圆弧型 ($d\theta \neq 0$)。当应力特征线为对数螺旋线 $r = r_0 e^{\pm A \tan \frac{\phi}{2}}$ 时,其 θ 为线性变量,相应的速度滑移线为圆弧线,其圆弧半径 r' 与该点处应力特征线(对数螺旋线 $r = r_0 e^{\pm A \tan \frac{\phi}{2}}$) 的极径 r 相对应为 $r' = f(r)$, r' 与应力特征线中 r 存在关系 $r' = f(r)$,若取 $f(r) = r = r_0 e^{\pm A \tan \frac{\phi}{2}}$ 则说明应力特征线和速度滑移线共极点。这也说明速度滑移线的极径将随应力特征线上点的不同而变化,但针对应力特征线上每点来说其速度滑移线为圆弧。也就是说应力特征线上每点分别处于以该点为极径的圆弧速度滑移线上。对于曲线滑移线, $V_{\alpha'}$, $V_{\beta'}$ 的方向是要改变的。在简单应力场中, $V_{\beta'}$ 与 θ 成比例变化,滑移线为圆弧线, $V_{\beta'}$ 只改变方向,不改变大小。

3) 对数螺旋型 ($d\theta \neq 0$)。当应力特征线为对数螺旋线 $r = r_0 e^{\pm A \tan(B + \frac{\phi}{2})}$ 时,其 θ 为非线性变量,速度滑移线的端点连线(简称速端线)应为对数螺旋线,其方程和应力特征线(对数螺旋线 $r = r_0 e^{\pm A \tan(B + \frac{\phi}{2})}$) 相对应为:

$$r = r'_0 e^{\pm A \tan(B + \frac{\phi}{2})} \quad (21)$$

同理 $r'_0 = f(r)$,若取 $f(r) = r = r_0 e^{\pm A \tan(B + \frac{\phi}{2})}$,则对于对数螺旋型速端线来说应力特征线上每一点分别处于以该点为极径的对数螺旋速端线上,由式(16)可知 $V_{\alpha'}$, $V_{\beta'}$ 的方向和大小都是要改变的,但是在对数螺旋速端线上每一点必须满足式(16)。

3.4 半平面无限体极限荷载的 Prandtl 速度滑移线解

Prandtl 解是一个有 80 年历史的经典解,它依据平衡条件与屈服条件求出了极限荷载,此解是否是真实解,还需通过速度方程加以验证。下面求普朗特应力特征线场中的速度矢量及其分布规律。如图 7 所示,并取一半分析,求应力场中 3 个区域的速度矢量。

1) 以 AAB 构成的 I 区,在 P_u 作用下,有向下滑动趋势,即在 AA 边界上,有 $V_y = V$ 。由于 σ_1 方向与 y 轴方向重合, $\theta = 0$,所以 I 区为均匀应力场。由上述分析可知,应力特征线为 α 线与 β 线两条直线,而速度场滑移线与应力特征线必成 $\frac{\phi}{2}$ 角,因而

速度滑移线 α' , β' 分别与应力特征线 α , β 成 $\phi/2$ 角(见图 8)。

由式(17)可得 I 区的速度为:

$$V_{\alpha'1} = V_{\beta'1} = V \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} V \quad (22)$$

在 B 点有:

$$V_{\beta'B} = \frac{\sqrt{2}}{2} V \quad (23)$$

2) II 区 ABC 为简单应力场,速度场也为简单速度场,应力场与速度场不重合,速度场极点为 A' , α 为对数螺旋线的展开角,在 B 点 $\alpha = 0$,在 C 点 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (见图 9)。

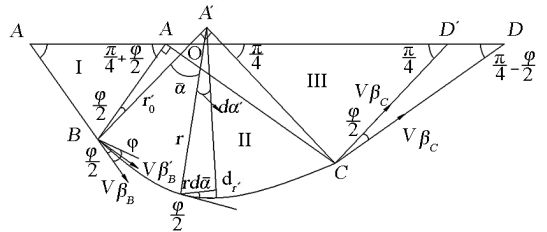


图 7 Prandtl 速度滑移线场

Fig. 7 The velocity slip line field of Prandtl mechanism

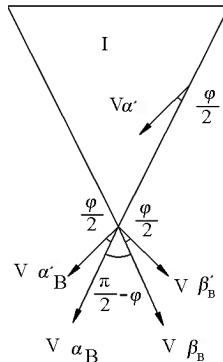


图 8 I 区应力场

Fig. 8 The stress slip line field of I zone

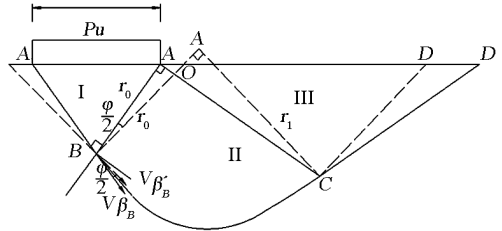


图 9 II 区和 III 区应力场

Fig. 9 The stress slip line field of II zone and III zone

由图7可见: $dr' = r' \cdot d\alpha \cdot \tan \frac{\varphi}{2}$

积分后得:

$$r' = r'_0 \cdot e^{\alpha \tan \frac{\varphi}{2}} \quad (24)$$

令 $AA = l$, $A'B = r'_0$, 由图示几何关系可得:

$$BO = \frac{AB}{\cos \frac{\varphi}{2}} = \frac{l}{2 \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}) \cdot \cos \frac{\varphi}{2}},$$

$$A'C = r'_0 \cdot e^{\frac{\pi}{2} \tan \frac{\varphi}{2}}, OA' = A'C \tan \frac{\varphi}{2}.$$

$$r'_0 = A'B = BO + OA'$$

$$= \frac{l}{2 \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}) \cdot \cos \frac{\varphi}{2}} + r'_0 \cdot$$

$$\tan \frac{\varphi}{2} \cdot e^{\frac{\pi}{2} \tan \frac{\varphi}{2}}$$

由此可得:

$$r'_0 = \frac{l}{2 \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}) \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \cdot (1 - \tan \frac{\varphi}{2} \cdot e^{\frac{\pi}{2} \tan \frac{\varphi}{2}})}$$

$$= \frac{l \cdot e^{\frac{\pi}{2} \tan \frac{\varphi}{2}}}{2 \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}) \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \cdot (e^{\frac{\pi}{2} \tan \frac{\varphi}{2}} - \tan \frac{\varphi}{2})} \quad (25)$$

式(25)就是 II 区的速度滑移线端点的连线 BC 的方程式。它是一条对数螺线,且其切线始终与速度滑移线成 $\varphi/2$ 角,由此可推断出 BC 线一定是应力特征线 β 线的迹线方程。但式(24)与基于传统塑性理论的应力特征线迹线方程明显不同。

$$r = r_0 \cdot e^{\alpha \tan \varphi} \quad (26)$$

式(24)和式(26)都是 BC 线的迹线方程,只是式(24)的极点在 A' 点而式(26)的极点在 A 点。他们是同一条线,但按极点不同有两种表达,在这条线上,只在 α 方向发生间断,但在 α' 方向上不会发生法向间断,以保证体积不变与法向连续。

BC 应力特征线是弹塑性的分界线,也是速度间断线,但不是速度滑移线或其包线。当前一些教科书中认为速度间断线一定是速度滑移线或其包线,这一结论并不适用于岩土材料,因为岩土材料速度滑移线和应力特征线是不一致的。从莫尔圆可以看出,破坏线上存在法向应力;同时破坏线只保证应力特征线 α 方向的速度 $V_\alpha = 0$,而速度场中的 $V_{\alpha'}$, $V_{\beta'}$ 是存在的,即具有法向速度 $V_{\alpha'}$ 与切向速度 $V_{\beta'}$ 。由于 $V_\alpha = 0$,则有:

$$V_\alpha = V_{\alpha'} \cos \frac{\varphi}{2} + V_{\beta'} \sin \frac{\varphi}{2} = 0 \quad (27)$$

故

$$V_{\alpha'} = -V_{\beta'} \tan \frac{\varphi}{2} \quad (28)$$

由式(17)可得:

$$dV_{\beta'} = -V_{\alpha'} d\alpha = V_{\beta'} \tan \frac{\varphi}{2} d\alpha \quad (29)$$

则第二区 BC 线,有:

$$V_{\beta'II} = V_{\beta'B} \cdot e^{\alpha \tan \frac{\varphi}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} V e^{\alpha \tan \frac{\varphi}{2}} \quad (30)$$

$$V_{\beta'c} = V_{\beta'B} \cdot e^{\frac{\pi}{2} \tan \frac{\varphi}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} V e^{\frac{\pi}{2} \tan \frac{\varphi}{2}} \quad (31)$$

式(30)表明 $V_{\beta'}$ 随 $\alpha \cdot \tan \varphi/2$ 以指数关系增大,符合速度滑移线轨迹。

3) III 区 ACD,也为均匀应力场,可知 $V_{\beta'III}$ 为常数(见图10):

$$V_{\beta'III} = V_{\beta'c} = \frac{\sqrt{2}}{2} V e^{\frac{\pi}{2} \tan \frac{\varphi}{2}} \quad (32)$$

$$V_{\beta'D} = \frac{\sqrt{2}}{2} V e^{\frac{\pi}{2} \tan \frac{\varphi}{2}} \quad (33)$$

其速端图如图10所示:

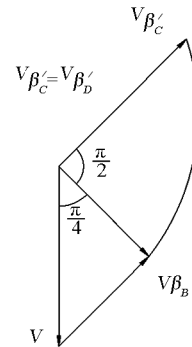


图10 速端图

Fig. 10 The velocity vectors

表1中列出了按传统算法与按该节算法,算例 I, II, III 区中两者端速度的比值,实际上除了数值不同外,两者的速度方向也相差 $\varphi/2$ 。

由表1可见, $\varphi = 0$ 时,非关联解与关联解是一致的,因为这种情况下应力特征线和速度滑移线相同,关联解是正确解,同时又是非关联解的一种特殊情况,因而两种解相同。随着 φ 值增大,两者速度解差值也增大,可达 2~5 倍,表明速度解的差异是较大的。此节方法不会改变应力解与极限荷载解,因为应力解中并没有引用速度方程。

表1 各区滑移线速度(经典解/文章解)比较

Table 1 The ratios of the solutions by the traditional plastic theory to the solutions by the generalized plastic theory

$\varphi/(^\circ)$	I 区	II 区	III 区
	$\alpha = 0$	$\alpha = \pi/4$	$\alpha = \pi/2$
0	1.00	1.00	1.00
10	1.10	1.18	1.26
20	1.23	1.43	1.65
30	1.41	1.80	2.29
40	1.67	2.43	3.52
45	1.85	2.93	4.64

4 广义塑性中极限分析的上限法^[9]

4.1 概述

基于经典塑性理论的极限分析方法,广泛应用于金属材料并获得了成功。W. F. Chen^[10]又将其推广应用到岩土工程领域,但分析中采用了莫尔—库仑屈服准则及相关联流动法则,由此引起了土体过大的剪胀。尽管作为一种解题方法导出的岩土材料极限分析上限法的最终计算结果是可用的,但理论上却存在如下一些矛盾:

1)经典的极限分析理论在计算中采用了相关联流动法则,而试验证明,关联流动法则并不适用于岩土材料,这已成为岩土界的共识;

2)经典的极限分析理论中假设体积不变,而计算中却产生了大于实际的剪胀,何况正常固结土与松砂等土体实际上只有体缩而没有体胀;

3)采用关联流动法则,认为应力特征线与速度滑移线重合,但在分析时却采用速度滑移线方向与应力特征线方向成 φ 角,表明实际与假设不符;

4)破坏线上同时存在着剪切力 τ_n 和正应力 σ_n ,但计算中却反映不出摩擦功。

W. F. Chen在他的《极限分析与土体塑性》论著中,在应用关联流动法则提出了上限法的同时,也指出了一些问题,如指出了“摩擦材料属于非相关联法则的一类材料”,“按理想塑性理论所预测的伴随剪切作用的剪胀往往大于实际剪胀”等^[10]。这些观点是非常有远见卓识的,只是由于当时条件还不很具备,不足以解释这些问题。为此,笔者等采用基于广义塑性理论的极限分析上限法以修正上述方法。

4.2 极限分析的上限法——功能耗散率

4.2.1 基本原理

广义塑性理论认为,塑性势面与屈服面必须相应但不一定相同,相同只是相应的一种特殊情况(如金属材料)。在极限分析中,屈服面仍采用莫尔—库仑条件 $F = \tau - c - \sigma_n \tan\varphi = 0$,与之对应的塑性势面不是莫尔—库仑屈服面而为 q 面 $Q = q = \sqrt{\left[\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2\right]^{\frac{1}{2}}}$ 。依据基本假设,极限分析中不考虑其他两个屈服面,即体积屈服面 f_v 和剪应力 θ_σ 方向上的屈服面 f_θ 有 $f_v = f_\theta = 0$,即

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}_v^p = \dot{\epsilon}_\theta^p = 0 \\ \dot{\gamma}_q^p = \dot{\lambda}_q \end{cases} \quad (34)$$

式(34)表明只存在 q 方向的塑性剪应变增量 $d\gamma_q^p$ (它是破坏面上的正应力和剪切应力产生的合应变)。由于速度滑移线与应力特征线必成 $\varphi/2$ 夹角,即有 $\dot{\epsilon}_n^p = -\dot{\gamma}^p \tan \frac{\varphi}{2}$,因而刚体平移时位移速率与刚体平面的夹角为 $\varphi/2$ 。根据广义塑性流动法则,速度滑移线与应力特征线不重合,滑移面(应力滑移线)不是速度滑移线,可以存在法向速度,这就是为什么岩土材料在刚塑性分界面上可以出现法向速度间断的原因。在转动破坏时,其滑移面为对数螺旋面,流动方向与滑移面的夹角也始终为 $\varphi/2$ (见图5(b))。此时,土体处于极限状态,且保持体积不变,不存在剪胀现象,即 $\dot{\epsilon}_v^p = \dot{\epsilon}_x^p + \dot{\epsilon}_y^p = 0$ 。

4.2.2 窄过渡层的能量耗散

按广义塑性力学,塑性势面为 q 面而不是莫尔—库仑屈服面,因而刚体平移时位移速度与刚体介面的夹角为 $\varphi/2$ (见图11)。根据广义塑性力学的非关联流动法则,滑移面上存在的正应变是由于存在正应力的结果。

在转动破坏时,其滑移面为对数螺旋面,流动方向与滑移面的夹角始终为 $\varphi/2$ (见图11)。在滑移面上任取一微单元,其微功率为:

$$\begin{aligned} dD &= (\tau \cdot v + \sigma_n \cdot v) \cos \frac{\varphi}{2} dl \\ &= \left[(c + \sigma_n \tan\varphi) - \sigma_n \tan \frac{\varphi}{2} \right] v \cdot \cos \frac{\varphi}{2} dl \quad (35) \end{aligned}$$

当刚体沿某一平面 l 滑动时,单元体总的能量耗散率为:

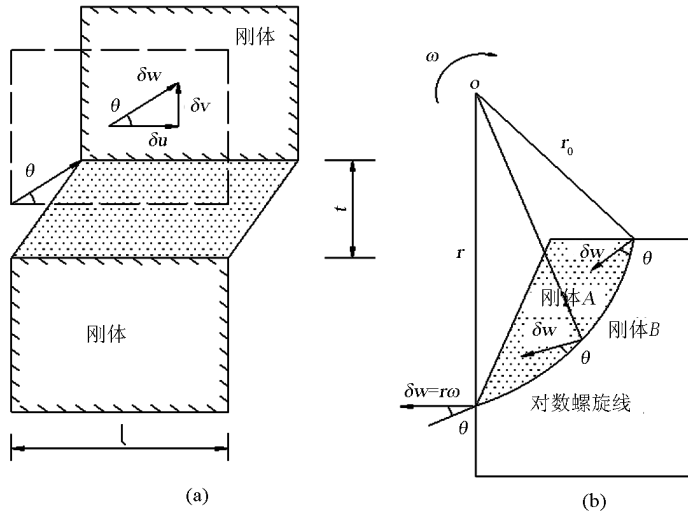


图 11 伴随分离的简单滑动和刚体转动 ($\theta = \varphi/2$)

Fig. 11 Simple movement and rotation of the rigid body ($\theta = \varphi/2$)

$$D = \int_l dD$$

$$= clv \cos \frac{\varphi}{2} + v \left[\tan \varphi \cos \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2} \right] \int_l \sigma_n dl \quad (36)$$

当刚体沿某一曲面 s 转动破坏时,单元体总的能量耗散率为:

$$D = \int_s dD$$

$$= c \cos \frac{\varphi}{2} \int_s v dl + \left[\tan \varphi \cos \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2} \right] \int_s \sigma_n v dl \quad (37)$$

若曲面为对数螺旋面时,速度 v 是关于 xy 的函数,最好将速度方程转化到极坐标下进行求解,这将使求解过程大大简化。

4.2.3 均匀变形区的能量耗散

最简单的均匀变形场是单向压缩和简单剪切,如图 12 所示,单向垂直压缩和横向膨胀用符号 $\dot{\varepsilon}$ 表示,简单剪切用符号 $\dot{\gamma}$ 表示。按照广义塑性理论和应力莫尔圆,均匀变形场中只存在简单剪切,其塑性能量耗散可以用式(38)表示:

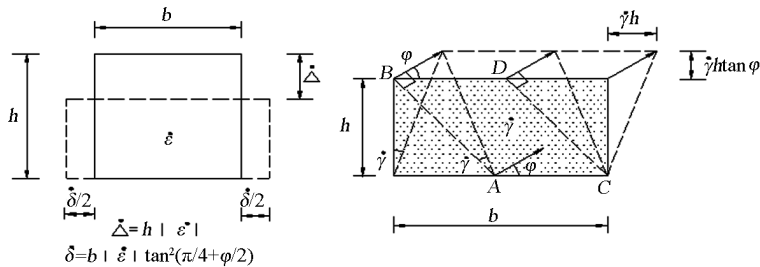


图 12 均匀变形区的能量耗散

Fig. 12 The energy dissipation of the uniform deformation zone

$$dD = \tau \dot{\gamma}^p dl = (\sigma_n \tan \varphi + c) \dot{\gamma}^p dl$$

$$= \sigma_n \tan \varphi \dot{\gamma}^p dl + c \dot{\gamma}^p dl \quad (38)$$

式(38)表明内能耗散由黏聚力能耗与摩擦力能耗两部分组成,基本上符合岩土实际情况。其单元体总的能量耗损率为:

$$D = \int_l dD \quad (39)$$

但采用上述方法需要知道 σ_n , 因而求能量耗散是较困难的,而传统塑性理论方法中,通过假想的剪胀能耗取代实际的摩擦能耗,从而使计算简化。由此看出传统方法,虽有些理论上的不足,它却可使求解变得容易,因而可作为一种实用计算方法。

4.2.4 非均匀变形区的能量耗散能率

按照广义塑性理论,非均匀变形区是指应力滑移线为对数螺旋线型,其相应的速度滑移线可以为圆弧型或对数螺旋型,但在应力滑移线上每点的速度流动方向(即速度滑移线)与该点的应力滑移线切线方向相差 $\varphi/2$ 角,应力滑移线上每点速度与该点相交的速度滑移线极径有关,理想塑性体上微单元的能量耗损为:

$$dD = (c + \sigma_n \tan \varphi) v_0 e^{A \tan(\beta + \frac{\varphi}{2})} \cos \frac{\varphi}{2} dl \quad (40)$$

沿理想塑性体滑移破坏面(应力滑移线)的总能量耗损率为:

$$D = \int_l dD \quad (41)$$

4.3 上限法在工程中的简单算例

4.3.1 平移机构

算例 1: 竖直坑壁的临界高度(见图 13)。

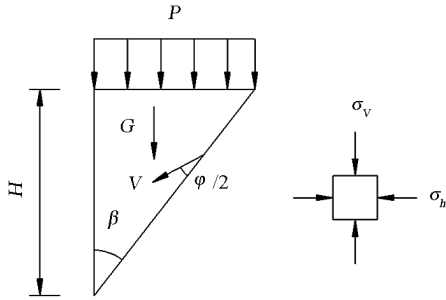


图 13 竖直边坡的临界高度
Fig. 13 The critical height of the vertical slope

采用基于广义塑性理论的分析方法,重力和外力所作的功率为:

$$W = \frac{1}{2} r H^2 v \tan \beta \cos(\beta + \frac{\varphi}{2}) + PHv \tan \beta \cos(\beta + \frac{\varphi}{2}) \quad (42)$$

土体滑移破坏面上每点的应力状态为:

$$\sigma_v = (\gamma \cdot h + P) \quad \sigma_h = 0 \quad (43)$$

$$\sigma_n = (\gamma \cdot h + P) \sin^2 \beta \quad (44)$$

由此得:

$$dD = (\tau \cdot v + \sigma_n \cdot v) \cos \frac{\varphi}{2} dl = \left[c \cos \frac{\varphi}{2} + (\gamma h + P) \sin^2 \beta \left[\tan \varphi \cos \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2} \right] \right] \cdot v \cdot \frac{dh}{\cos \beta} \quad (45)$$

沿间断面的能量耗损率,由式(45)有:

$$D = \int_l dD = \int_0^H \left[c \cos \frac{\varphi}{2} + (\gamma h + P) \sin^2 \beta \left[\tan \varphi \cos \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2} \right] \right] \cdot v \cdot \frac{dh}{\cos \beta} = \frac{\left[\frac{1}{2} \gamma H^2 v + PHv \right] \sin^2 \beta \left[\tan \varphi \cos \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2} \right]}{\cos \beta} + \frac{cHv \cos \frac{\varphi}{2}}{\cos \beta} \quad (46)$$

根据外功率与内部能量耗损率相等 $W = D$ 得:

$$\frac{\left[\frac{1}{2} \gamma H^2 v + PHv \right] \sin^2 \beta \left[\tan \varphi \cos \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2} \right]}{\cos \beta} + \frac{cHv \cos \frac{\varphi}{2}}{\cos \beta} = \frac{1}{2} r H^2 v \tan \beta \cos(\beta + \frac{\varphi}{2}) + PHv \tan \beta \cos(\beta + \frac{\varphi}{2}) \quad (47)$$

由 $\frac{\partial H}{\partial \beta} = 0$, 得 $\beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$, 代入式(47)得:

$$H_{cr} = \frac{4c}{r} \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) - \frac{2P}{\gamma} \quad (48)$$

计算结果与传统方法一致,对于平移机构,传统塑性方法与广义塑性方法一般都能得到相同的结果。

4.3.2 旋转机构

算例 2: 竖直坑壁的临界高度。与算例 1 相同,但此处用的是旋转间断机构(对数螺旋面),如图 14 所示。三角形区 ABC 绕旋转中心 O(目前还未确定)作刚体旋转,而对数面 BC 以下的材料保持静止不动。因此,BC 面是一个薄层的速度间断面,假想机构完全可以由 3 个变量确定。为了方便起见,笔者等先取基准线 OB 和 OC 的倾角分别为 θ_0 和 θ_h , H 为竖直坑壁的高度。由于对数螺旋面的方程是:

$$r(\theta) = r_0 \exp\left[(\theta - \theta_0) \tan \frac{\varphi}{2} \right] \quad (49)$$

故基准线 OC 的长度是:

$$r_h = r(\theta_h) = r_0 \exp\left[(\theta_h - \theta_0) \tan \frac{\varphi}{2} \right] \quad (50)$$

从几何关系不难看出,比值 H/r_0 和 L/r_0 可以用角 θ_0 和 θ_h 表示,因为:

$H = r_h \sin \theta_h - r_0 \sin \theta_0$, 故:

$$\frac{H}{r_0} = \sin \theta_h \exp\left[(\theta_h - \theta_0) \tan \frac{\varphi}{2} \right] - \sin \theta_0 \quad (51a)$$

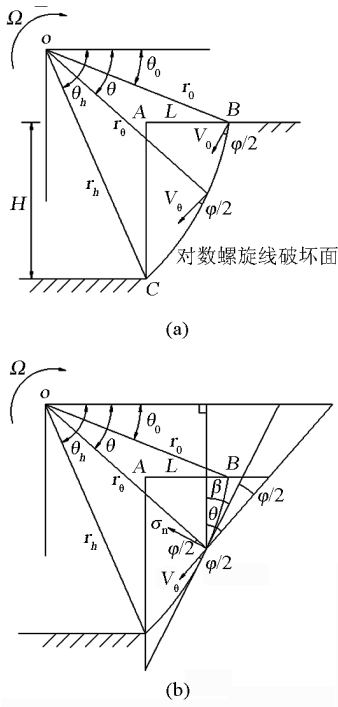


图 14 竖直边坡临界高度的旋转机构
Fig. 14 The rotation mechanism of the vertical slope

又 $L = r_0 \cos \theta_0 - r_h \cos \theta_h$, 故:

$$\frac{L}{r_0} = \cos \theta_0 - \cos \theta_h \exp \left[(\theta_h - \theta_0) \tan \frac{\varphi}{2} \right] \quad (51b)$$

由于直接积分 ABC 区土重所作的外功率是非常复杂的。比较容易的方法是叠加法, 首先分别求出 OBC , OAB 和 OAC 区土重所作的功率 W_1 , W_2 和 W_3 而后叠加。于是, 欲求的 ABC 区的外功率就可以用简单的代数和 $W_1 - W_2 - W_3$ 得到。下面分别来求 3 个区的各表达式。

首先考虑对数螺旋区 OBC , 其中的一个微元如图 15(a) 所示。该微元所作的外功率是:

$$dW_1 = \left[\Omega \frac{2}{3} r \cos \theta \right] \left[\gamma \frac{1}{2} r^2 d\theta \right] \quad (52a)$$

沿整个面积积分, 得:

$$W_1 = \frac{1}{3} \gamma \Omega \int_{\theta_0}^{\theta_h} r^3 \cos \theta d\theta = \gamma \cdot r_0^3 \Omega \int_{\theta_0}^{\theta_h} \frac{1}{3} \exp \left[3(\theta - \theta_0) \tan \frac{\varphi}{2} \right] \cos \theta d\theta \quad (52b)$$

$$\text{或 } W_1 = \gamma \cdot r_0^3 \Omega f_1(\theta_h, \theta_0) \quad (53)$$

式(53)中, 函数 f_1 的定义为:

$$f_1(\theta_h, \theta_0) =$$

$$\frac{\left\{ \begin{aligned} & \left[3 \tan \frac{\varphi}{2} \cos \theta_h + \sin \theta_h \right] \exp \left[3(\theta_h - \theta_0) \tan \frac{\varphi}{2} \right] \\ & - 3 \tan \frac{\varphi}{2} \cos \theta_0 - \sin \theta_0 \end{aligned} \right\}}{3 \left[1 + 9 \tan^2 \frac{\varphi}{2} \right]} \quad (54)$$

现考虑如图 15(b) 所示的另一个三角形区 OAB , 该区土重所作的功率为:

$$W_2 = \left[\frac{1}{2} \gamma L r_0 \sin \theta_0 \right] \left[\frac{1}{3} (2r_0 \cos \theta_0 - L) \right] \Omega \quad (55)$$

式(55)中, 第一个括号表示该区的重量; 另一括号表示该区重心速度的垂直分量。重心至过点 O 的垂线的水平距离等于点 O, A 和 B 的平均水平距离, 这就是式(55)第二个括号内所含的项。重新整理式(55)中的各项, 得:

$$W_2 = \gamma r_0^3 \Omega f_2(\theta_h, \theta_0) \quad (56)$$

式(56)中, 函数 f_2 的定义为:

$$f_2(\theta_h, \theta_0) = \frac{1}{6} \frac{L}{r_0} \left[2 \cos \theta_0 - \frac{L}{r_0} \right] \sin \theta_0 \quad (57)$$

L/r_0 是 θ_0 和 θ_h 的函数, 见式(51b)。

对于图 15(c) 所示的三角形 OAC , 也可用类似方法来考虑。故有

$$W_3 = \gamma r_0^3 \Omega f_3(\theta_h, \theta_0) \quad (58)$$

式(58)中, 函数 f_3 定义为:

$$f_3(\theta_h, \theta_0) = \frac{1}{3} \frac{H}{r_0} \cos^2 \theta_h \exp \left[2(\theta_h - \theta_0) \tan \frac{\varphi}{2} \right] \quad (59)$$

H/r_0 是 θ_0 和 θ_h 的函数, 如式(51a)。

在所考虑的 ABC 区内, 由土重所作的功率值现在可用下述简单代数和得到:

$$W_1 - W_2 - W_3 = \gamma \cdot r_0^3 \Omega (f_1 - f_2 - f_3) \quad (60)$$

内部能量耗损发生在间断面 BC 上(见图 14)。能量耗损率的微分, 可以由该面的微分面积 $\frac{rd\theta}{2}$ 与黏聚力 c 和正应力 σ_n 以及与跨间断面的 $\cos(\frac{\varphi}{2})$

切向间断速度 $v \cos(\frac{\varphi}{2})$ 的连乘积计算, 见式(35)。

因此, 总的内部能量耗损率可沿整个间断面 l 进行积分可得到:

$$D = D_1 + D_2 = \int_l c \left[v \cos \frac{\varphi}{2} \right] dl + \int_l v \left[\tan \varphi \cos \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2} \right] \sigma_n dl \quad (61)$$

$$D_1 = \int_{\theta_0}^{\theta_h} c \left[v \cos \frac{\varphi}{2} \right] \frac{rd\theta}{\cos \frac{\varphi}{2}} = \frac{cr_0^2 \Omega}{2 \tan \frac{\varphi}{2}} \left\{ \exp \left[2(\theta_h - \theta_0) \tan \frac{\varphi}{2} \right] - 1 \right\} = \frac{cr_0^2 \Omega}{2 \tan \frac{\varphi}{2}} f_4(\theta_h, \theta_0) \quad (62)$$

$$D_2 = \int_{\theta_0}^{\theta_h} v \left[\tan \varphi \cos \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2} \right] \sigma_n \frac{rd\theta}{\cos \frac{\varphi}{2}} = \int_{\theta_0}^{\theta_h} \left[\tan \varphi - \tan \frac{\varphi}{2} \right] v \sigma_n r d\theta = \left[\tan \varphi - \tan \frac{\varphi}{2} \right] \Omega r_0^2 \int_{\theta_0}^{\theta_h} \sigma_n \exp \left[2(\theta - \theta_0) \tan \frac{\varphi}{2} \right] d\theta \quad (64)$$

式(62)中,函数 f_4 定义为:

$$f_4(\theta_h, \theta_0) = \exp \left[2(\theta_h - \theta_0) \tan \frac{\varphi}{2} \right] - 1 \quad (63)$$

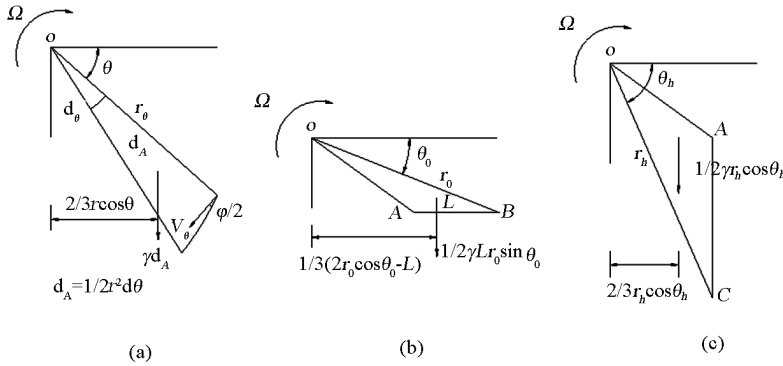


图 15 重力作功的详细计算

Fig. 15 The particular calculation of power led by the gravity

由图 14(b)所示的几何关系可得 $\beta = \theta - \frac{\varphi}{2}$, $h = r \sin \theta - r_0 \sin \theta_0$ 。因为 $\sigma_1 = \gamma \cdot h$, $\sigma_3 = 0$, 故有:

$$\sigma_n = \sigma_1 \sin^2 \left[\theta - \frac{\varphi}{2} \right] = \gamma \cdot (r \sin \theta - r_0 \sin \theta_0) \sin^2 \left[\theta - \frac{\varphi}{2} \right] \quad (65)$$

式(65)代入式(64)得:

$$D_2 = \frac{1}{2} \left[\tan \varphi - \tan \frac{\varphi}{2} \right] \gamma \cdot \Omega r_0^3 \left[f_5(\theta_h, \theta_0) - f_6(\theta_h, \theta_0) \right] \quad (66)$$

式(66)中,函数 f_5, f_6 定义为:

$$f_5(\theta_h, \theta_0) = \frac{1}{2 \left[9 \tan^2 \frac{\varphi}{2} + 1 \right]} \times \left\{ \frac{\exp \left[3 \tan \frac{\varphi}{2} (\theta_h - \theta_0) \right] \left[3 \tan \frac{\varphi}{2} \sin(\theta_h - \varphi) - \cos(\theta_h - \varphi) \right]}{- \left[3 \tan \frac{\varphi}{2} \sin(\theta_0 - \varphi) - \cos(\theta_0 - \varphi) \right]} \right\} + \frac{\left\{ \frac{\exp \left[3 \tan \frac{\varphi}{2} (\theta_h - \theta_0) \right] \left[\tan \frac{\varphi}{2} \sin(3\theta_h - \varphi) - \cos(3\theta_h - \varphi) \right]}{- \left[\tan \frac{\varphi}{2} \sin(3\theta_0 - \varphi) - \cos(3\theta_0 - \varphi) \right]} \right\}}{6 \left[\tan^2 \frac{\varphi}{2} + 1 \right]} + \frac{\left\{ \frac{\exp \left[3 \tan \frac{\varphi}{2} (\theta_h - \theta_0) \right] \left[3 \tan \frac{\varphi}{2} \sin \theta_h - \cos \theta_h \right]}{- \left[3 \tan \frac{\varphi}{2} \sin \theta_0 - \cos \theta_0 \right]} \right\}}{\left[9 \tan^2 \frac{\varphi}{2} + 1 \right]} \quad (67)$$

$$f_6(\theta_h, \theta_0) = \frac{\sin\theta_0}{2\tan\frac{\varphi}{2}} \left\{ \exp\left[2\tan\frac{\varphi}{2}(\theta_h - \theta_0)\right] - 1 \right\} - \frac{\sin\theta_0}{2\left[\tan^2\frac{\varphi}{2} + 1\right]} \times \left\{ \begin{aligned} &\exp\left[2\tan\frac{\varphi}{2}(\theta_h - \theta_0)\right] \left[\tan\frac{\varphi}{2}\cos(2\theta_h - \varphi) + \sin(2\theta_h - \varphi) \right] \\ &- \left[\tan\frac{\varphi}{2}\cos(2\theta_0 - \varphi) + \sin(2\theta_0 - \varphi) \right] \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

使外功率式(60)与内部能量耗损率式(61)相等,得:

$$H = cf(\theta_h, \theta_0)/\gamma \quad (69)$$

式(69)中,函数 f 的定义为:

$$f(\theta_h, \theta_0) = \frac{\left\{ \sin\theta_h \exp\left[\left(\theta_h - \theta_0\right)\tan\frac{\varphi}{2}\right] - \sin\theta_0 \right\} f_4}{2\tan\frac{\varphi}{2}(f_1 - f_2 - f_3) - \tan\frac{\varphi}{2}\left[\tan\varphi - \tan\frac{\varphi}{2}\right](f_5 - f_6)} \quad (70)$$

按极限分析的上限定理,式(69)给出了临界高度的一个上限。当 θ_0 和 θ_h 满足条件:

$$\partial f/\partial\theta_0 = 0; \partial f/\partial\theta_h = 0 \quad (71)$$

此时,函数 f 有一个最小值。因此,解出这些方程并把所得到的 θ_0 和 θ_h 的值代入式(69)后,便得到竖直坑壁临界高度 H_{cr} 最小上限。

为了避免冗长的计算,这些联立方程可以用半图解法求解。

当 $\varphi = 20^\circ$,在 $\theta_0 = 33^\circ$ 和 $\theta_h = 52^\circ$ 附近所求得的函数 f 对所有的 φ 有一个最小值 $3.90 \times \tan(\pi/4 + \varphi/2)$,故:

$$H_{cr} = \frac{3.90c}{\gamma} \tan\left[\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right] \quad (72)$$

式(72)结果与文献[10]用传统方法计算所得的结果 $\frac{3.83c}{\gamma} \tan\left[\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right]$ 相比十分相近,而且更接近于正确解,这也表明两种分析方法都可以实际应用。为便于比较,对不同的 φ 值求得其对应的最小系数值,如表2所示。

表2 不同的 φ 值与其对应的最小系数值

Table 2 The minimum solutions for different φ

参数值 $\varphi/(^\circ)$	文献[10]方法			文章方法		
	θ_0	θ_h	f^*	θ_0	θ_h	f^*
5	30	59	3.839	29	56	3.852
10	33	60	3.845	30	54	3.871
15	36	62	3.850	31	53	3.887
20	39	64	3.855	33	52	3.901
25	43	65	3.858	34	51	3.913
30	46	67	3.861	35	50	3.925

续表

参数值 $\varphi/(^\circ)$	文献[10]方法			文章方法		
	θ_0	θ_h	f^*	θ_0	θ_h	f^*
35	49	69	3.863	36	50	3.936
40	52	71	3.865	37	49	3.945
45	55	73	3.866	39	48	3.954
50	59	75	3.868	39	48	3.963

注: $f = f^* \times \tan(\pi/4 + \varphi/2)$

4.4 极限分析上限法解的分析

从前面的计算可以看出:

1) 在滑移破坏线上,每点都达到极限状态,每一点上都同时存在正应力和剪应力,前者作摩擦功,故摩擦功是存在的,同时也由于正应力的存在,所以存在正应变,而不是以前认为的过大的体积剪胀变形。

2) 极限分析法也就是能量法,从本例可以证明,在计算中虚位移(即虚速度 v)方向对计算结果基本不会产生太大影响,文章证明无论土体有无剪胀,它们都是满足运动许可的位移。这也表明按关联流动法则求上限解,虽然是一种虚拟状态,但作为计算方法是可行的,而且它可以不求摩擦力所作的功,便于计算内能耗散,从而使计算简化。

3) 基于传统塑性理论的极限分析上限法,概念上存在自相矛盾的地方,但作为等代的计算方法是有效的;基于广义塑性理论的极限分析上限法,计算结果与基于传统塑性理论的极限分析上限法基本无异,但概念明确,无自相矛盾的地方,反映了岩土的真实情况。

参考文献

- [1] 郑颖人,沈珠江,龚晓南. 广义塑性力学 - 岩土塑性力学原理[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2002
- [2] Davis E H. Theories of plasticity and the failure of soil masses [A]. Soil mechanics: selected topics [C]. Lee I. K ed. Butterworth: London, 1968: 341 - 380
- [3] Drescher A, Detournay E. Limit load in translational failure mechanisms for associative and non - associative materials [J]. Geotechnique, 1993, 43(3): 443 - 456
- [4] Wang Yujie, Yin Jianhua, Lee C F. The influence of a non - as-

- sociated flow rule on the calculation of the factor of safety of soil slopes[J]. International journal for numerical and analytical methods in geomechanics, 2001, 25:1351 - 1359
- [5] Yin Jianhua, Wang Yujie, Selvadurai A P S. Influence of non - associativity on the bearing capacity of a strip footing[J]. Journal of geotechnical and geoenvironmental engineering, 2001, 127(11):985 - 989
- [6] 张学言. 岩土塑性力学[M]. 北京:人民交通出版社,1993
- [7] 王敬林,朱小康,郑颖人. 平面应变问题岩土应力滑移线场法的讨论[J]. 后勤工程学院学报,2000,16(4):1 - 6
- [8] 郑颖人,王敬林,朱小康. 关于岩土材料滑移线理论中速度解的讨论[J]. 水利学报,2001,(6):1 - 7
- [9] 王敬林,郑颖人,陈瑜瑶,等. 岩土材料极限分析上界法的讨论[J]. 岩土力学,2003,24(4):538 - 544
- [10] Chen W F. Limit Analysis and Soil Plasticity[M]. Amsterdam: Elsevier,1975

The study of slip line field and upper bound method based on the non - associated flow rule

Zheng Yingren¹, Deng Chujian^{1,2}, Wang Jinglin¹

(1. Logistical Engineering University, Chongqing 400041, China; 2. No. 6 Air Defense Engineering Department of PLA Air Force, Hengyang, Hunan 421001, China)

[Abstract] The slip line field theory and the upper bound method based on the associated flow rule for the traditional plastic theory don't accord with the experiment for geotechnical material, so the non - associated flow rule must be applied to geotechnical material which indicates the stress characteristic line don't coincide with the velocity line. In this paper some problems existing in the slip line field theory and the upper bound method based on the associated flow rule were analyzed. The slip line field theory and the upper bound method based on the non - associated flow rule were deduced according to the generalized plastic theory, which eliminated some inconsistencies in the slip line field theory and the upper bound method based on the associated flow rule for the traditional plastic theory.

[Key words] slip line field; upper bound method; associated flow rule; non - associated flow rule; generalized plastic theory