

渠网恒定流及非恒定流数学模型的研究及应用

张明亮, 沈永明

(大连理工大学海岸和近海工程国家重点实验室, 辽宁大连 116024)

[摘要] 从求解一维圣维南方程组的 Preissmann 4 点隐式差分格式出发, 建立了一维河网及渠网数学模型, 并对计算中所涉及的一些关键技术问题进行了较为详细的阐述。利用模型对树状渠网的恒定流及复杂的环状渠网和河网的非恒定流对模型进行验证。验证结果表明, 水位和流量过程计算值与 Islam 的计算值吻合较好, 各渠道的流量分配计算结果精度也较高, 为河网及渠网的水量调度提供了一个较为简便实用的工具, 为建立渠网及河网的综合水质生态数学模型打下基础。

[关键词] Preissmann 格式; 渠网及河网; 流量分配; 水质模型

[中图分类号] TV131.4 **[文献标识码]** A **[文章编号]** 1009-1742(2007)08-0092-05

1 前言

21 世纪我国将修建或改造许多长距离、甚至跨流域的调水工程, 如南水北调工程等, 以保证我国国民经济的可持续发展。为了给设计和运行提供可靠的科学依据, 必须研究渠网的非恒定流, 以确定渠网的技术经济参数和合理的调节方式。河网地区是我国社会、经济、文化较发达的地区, 但十分突出的水资源问题制约着该地区的社会、经济发展。人们不仅日益重视该地区水资源保护的研究, 同时还采取相应的水流方法对其进行环境规划和管理, 因此对河网和渠网的研究势在必行^[1]。

渠网及河网非恒定流可由明渠一维非恒定流基本方程描述, 它们是一对非线性偏微分方程, 在一般情况下不存在解析解, 只能采用数值计算的方法求解。数值解首先要对方程进行离散, 稳定的、精确的、高效的离散方法是研究者所追求的, 这方面的研究主要是在 20 世纪 60 年代到 90 年代, 先后提出了直接差分法、有限元法、牛顿哈费森法等, 为实现这些方法, 提出了大量的显式格式和隐式格式^[2~5]。隐式法具有特殊的优点: 数值计算是无条件稳定的, 可以灵活选取计算时间步长。计算中可采用的隐式方法很

多, 由于 Preissmann 格式具有无条件稳定的特性, 及其在处理一维河道非恒定流传播问题上具有较大潜力, 笔者利用 Preissmann 4 点加权隐式差分格式对圣维南方程组进行离散, 建立以 z, Q 为变量的圣维南方程组, 采用最为常用的三级联解法, 即单一河道一节点一单一河道。将整个河网看作由河道及河道节点组成, 先将各河道进行差分运算, 再根据节点关系建立节点水位方程, 通过节点水位方程求得各节点的水位, 然后再由节点水位回代到各单一河道, 从而求得各单一河道的水位和流量^[6]。

河网的计算大部分采用非增量的形式^[3, 6, 7], 在叠代时需要数次叠代追赶才能得到稳定的解。笔者在方程离散时采用增量形式, 即应用泰勒级数线性化非线性方程组, 1—2 次就可得到满意的结果。利用现有的河网及渠网算例对所建模型进行验证, 其中既包括恒定流计算, 也包括非恒定流计算, 既有树状的渠网, 也有复杂的环状河网^[3, 5]。

2 数学模型

2.1 基本方程

通常用圣维南方程 (Saint-Venant Equation) 描述一维水流流动的数学模型, 可以写成如下形式:

[收稿日期] 2006-04-03; **修回日期** 2006-07-13

[基金项目] “九七三”国家重点基础研究发展计划资助项目 (2005CB724202);

[作者简介] 张明亮 (1976-), 男, 黑龙江海林市人, 大连理工大学博士研究生, 主要从事环境水力学研究

水流连续方程为

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{1}{B} \frac{\partial Q}{\partial x} = q_L \quad (1)$$

动量方程为

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + gA \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{Q|Q|}{K^2} \right) = 0 \quad (2)$$

式中 z 为水位, Q 为过水流量, B 为过水宽度, A 为过水断面面积, t 为时间, x 为距离, K 为流量模数, g 为重力加速度, q_L 为旁侧入流流量。

2.2 差分格式及差分方程

利用 Preissmann 4 点加权隐式差分格式, 对水流连续方程式(1)和水流动量方程式(2)进行离散。对差分方程进行线性化处理后可得如下线性差分方程组:

$$a_{1j} \Delta z_{j+1} + b_{1j} \Delta Q_{j+1} + c_{1j} \Delta z_j + d_{1j} \Delta Q_j = e_{1j} \quad (3)$$

$$a_{2j} \Delta z_{j+1} + b_{2j} \Delta Q_{j+1} + c_{2j} \Delta z_j + d_{2j} \Delta Q_j = e_{2j} \quad (4)$$

式中, $a_{1j}, b_{1j}, c_{1j}, d_{1j}, e_{1j}, a_{2j}, b_{2j}, c_{2j}, d_{2j}, e_{2j}$ 为时间步长 Δt 内河段第 j 断面的差分方程的系数; $\Delta z_j, \Delta z_{j+1}$ 分别为第 $j, j+1$ 断面在 Δt 时间内的水位增量; $\Delta Q_j, \Delta Q_{j+1}$ 分别为第 $j, j+1$ 断面在 Δt 时间内的流量增量。

2.3 节点连接方程

实际上河网和渠网的汉点形式很多, 连接情况也不同, 但总可以找到下面两个条件:

流量守恒条件 进出某一节点水量与该节点实际水量增减相平衡, 可表示为

$$\sum_{k=1}^m \Delta Q_{ik}^{n+1} = A_i \frac{dz_i}{dt} - \sum_{k=1}^m Q_{ik}^n \quad (5)$$

A_i 为汉点处的面积, $\sum_{k=1}^m Q_{ik}^n$ 为连接 i 汉点 n 时刻的流量之和。

能量守恒条件 连接节点各河段的各汉道断面的水位增量与节点的水位增量相同, 即

$$\Delta z_i = \Delta z_j \quad (6)$$

2.4 边界条件方程

边界条件可以以不同的形式给出, 边界条件不同时, 将有不同的 F_1 和 G_1 的起始值。流量边界条件为

$$\Delta Q_1 = F_1 \Delta z_1 + G_1, \quad F_1 = 0, \quad G_1 = \Delta Q_1。$$

水位边界条件为

$$F_1 = 10^6, \quad G_1 = -F_1 \Delta z_1。$$

F_1 的取值范围为 $10^4 \sim 10^6$, F_1 取 10^6 。

2.5 方程的求解

内河道子河段方程式(3)、式(4)经过递推公式

可得

$$\Delta Q_j = \alpha_i + \beta_j \Delta z_j + \xi_j \Delta z_m \quad (7)$$

$$\Delta Q_j = \theta_j + \eta_j \Delta z_j + \gamma_j \Delta z_1 \quad (8)$$

$\alpha_j, \beta_j, \xi_j, \theta_j, \eta_j, \gamma_j$ 为追赶系数, 可逐步递推求解。任意单一河道总有 2 个节点与之相连, 相连二节点水位分别与该河段首末段面水位相等, 首末段面流量各有一个追赶方程:

$$\Delta Q_1 = \alpha_1 + \beta_1 \Delta z_1 + \xi_1 \Delta z_m \quad (9)$$

$$\Delta Q_m = \theta_m + \eta_m \Delta z_m + \gamma_m \Delta z_1 \quad (10)$$

外河道通过边界条件建立河网末断面流量和内节点水位的关系:

$$\Delta Q_j = F_j \Delta z_j + G_j \quad (11)$$

$$\Delta z_j = H_j \Delta Q_{j+1} + I_j \Delta z_{j+1} + J_j \quad (12)$$

其中 H_j, I_j, J_j, F_j, G_j 为追赶系数。每个节点都有 $(m-1)$ 动力连接方程式(6)和一个流量连接方程式(5), 对每个节点将方程式(9)、式(10)代入式(5), 并与式(6)联立得封闭的各节点水位为未知量的方程组, 据此可求得各节点水位, 代入式(7)、式(8), 用消元法解得内河道各断面水位和流量。运用式(11)、式(12)可求得外河道的水位和流量。

3 计算验证

3.1 恒定流渠网系统算例^[5]

为了验证模型的正确性, 采用文献[5]中的复杂的树状灌溉渠网及其各渠道的特性(长度、宽度、底坡、糙率等)和具体的边界水位。该渠网流动为恒定流, 上游(节点 21)给定入流流量 $40 \text{ m}^3/\text{s}$, 下游各出口给定恒定的水位。渠道节点编码见图 1, 箭头代表计算流动方向, 如计算的流量为负, 这表示与流动方向相反。为了方便程序的编制, 对渠道编码时, 以内节点向外节点递增为原则。计算结果: 图 2 是模型计算的流量和 Islam 计算的流量对比图, 图 3 是模型计算的渠道下游水位和 Islam 计算的水位对比, 图 4 是计算的渠道上游水位和 Islam 计算水位的对比, 可以看出, 两者符合得较好。

3.2 非恒定流渠网 1^[3]

非恒定流渠网渠道(见图 5)的特征参数见表 1。上游节点 7, 8 的给定恒定入流流量为 $10 \text{ m}^3/\text{s}$, 节点 6 给定流量随时间的变化见图 6。下游出口(节点 9, 10)给定恒定的水位 5 m 。流量计算对比见图 7。由于渠道 6 的流量逐渐增大, 使渠道 1 出现倒流现象。

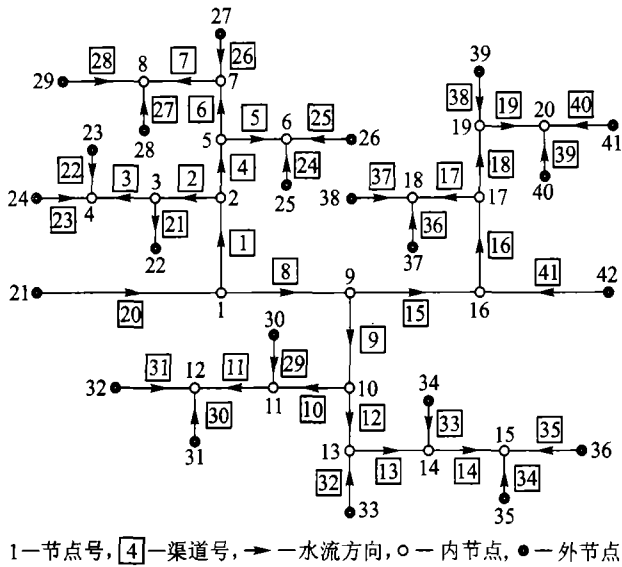


图1 灌溉系统渠网结构^[5]
Fig.1 Irrigation canal network^[5]

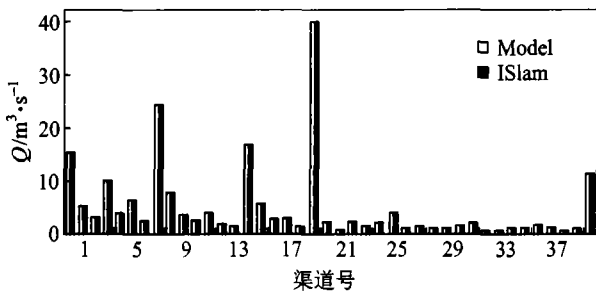


图2 各渠道的流量对比
Fig.2 Comparison of flow in canals

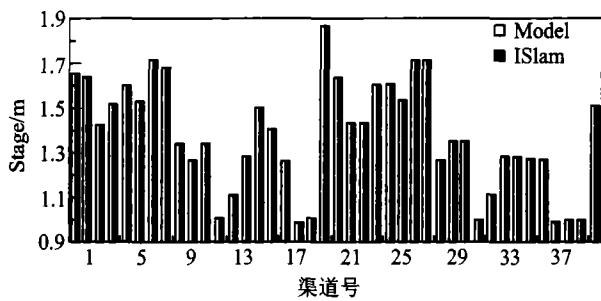


图3 各渠道的下游水位对比
Fig.3 Comparison of downstream stage in canals

3.3 非恒定流渠网2^[5]

渠网2的结构见图8,渠道的具体特征(长度、宽度、底坡、糙率等)见文献[5]。

计算上游给定流量边界和下游给定水位边界,计算结果见图9至图11。

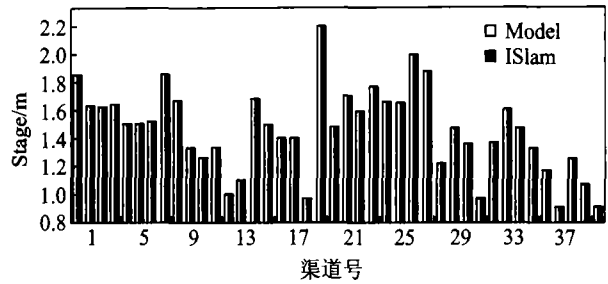


图4 各渠道的上游水位对比
Fig.4 Comparison of upstream stage in canals

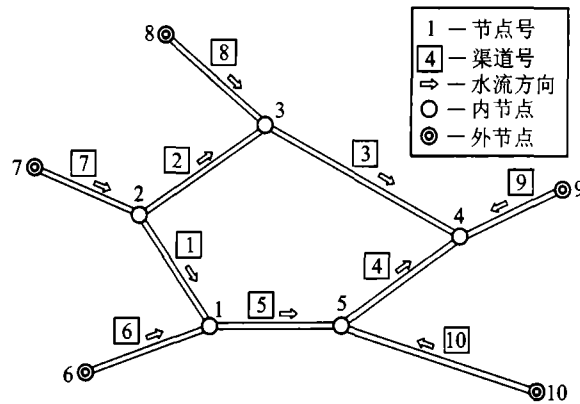


图5 环状渠网1结构图^[3]
Fig.5 Looped canal network1^[3]

表1 渠道的特性参数

Table 1 Channel characteristics for network

渠道号	底部 斜坡 S0	曼宁 系数 n	渠底宽 度/m	边坡系数	长度/m
1, 10	0.0001	0.025	100	1V:2H	2000
2, 4, 5, 7, 8	0.0002	0.025	50	1V:2H	1000
3, 6, 9	0.0001	0.025	75	1V:2H	1000

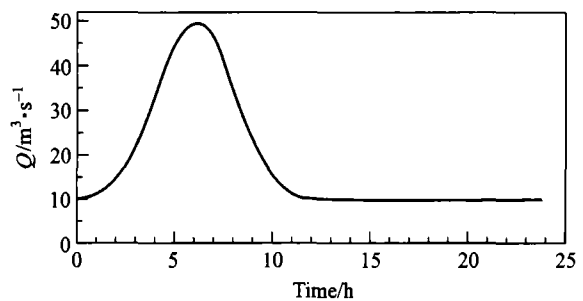


图6 上游渠道的流量变化过程
Fig.6 Flow curve at upstream boundary

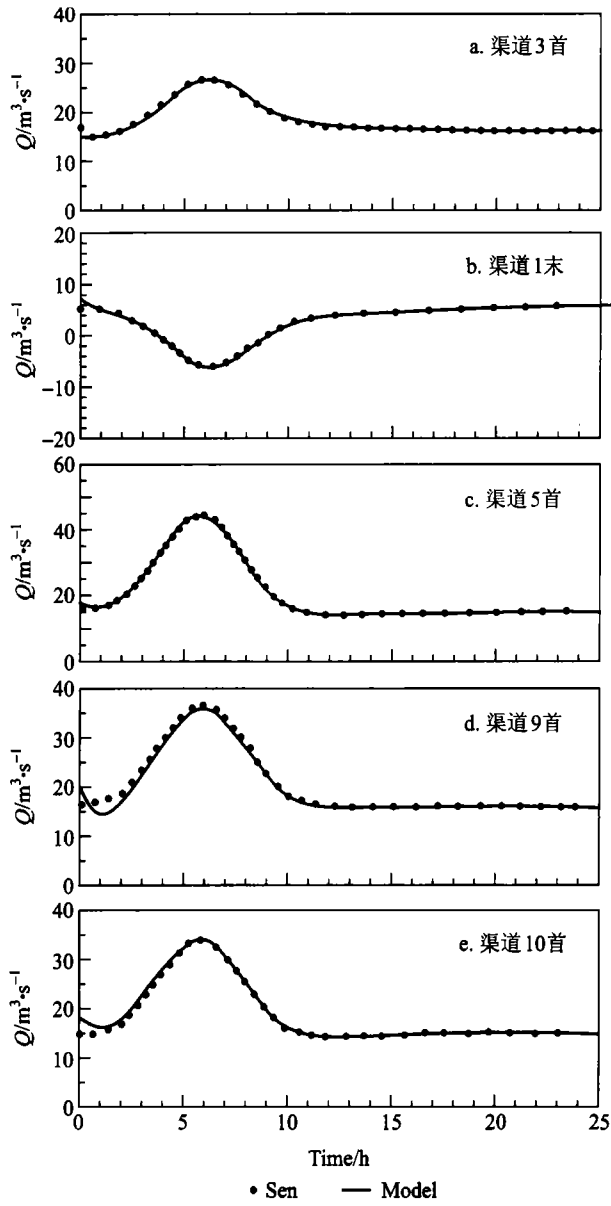


图7 渠道各断面流量对比

Fig. 7 Comparison of flow at the sections of canals

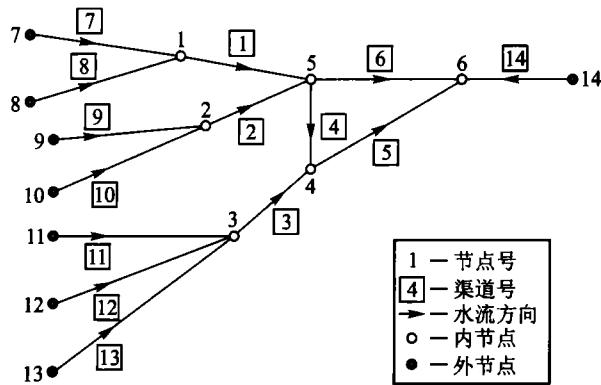


图8 环状渠网2结构图^[5]

Fig. 8 Looped canal network 2^[5]

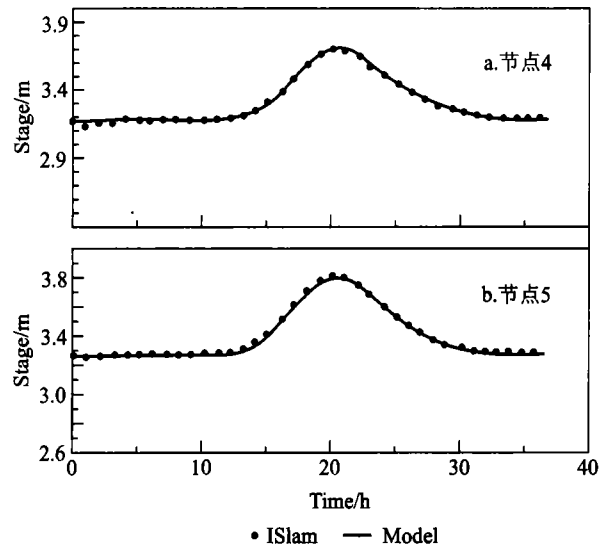


图9 节点的水位比较

Fig. 9 Comparison of stage at section

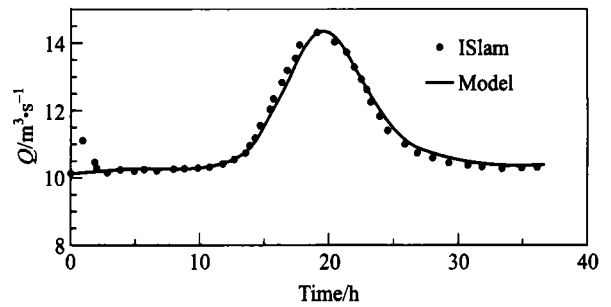


图10 渠道4首断面的流量比较

Fig. 10 Comparison of flow at first section of canals 4

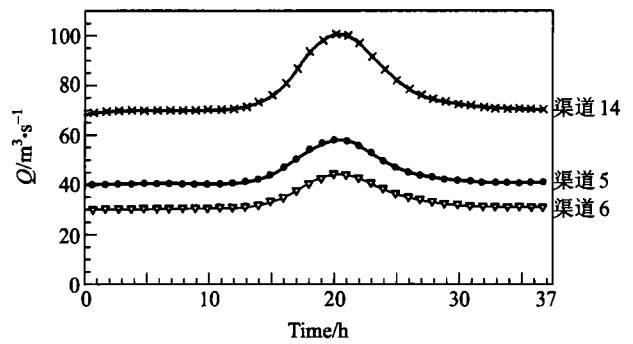


图11 各渠道计算的流量

Fig. 11 Computed flow in canals

图9给出了节点4, 5的水位比较,图10给出了渠道4首断面的流量比较。可以看出,计算结果与Islam的计算结果吻合得相当好。图11为各渠道的流量随时间变化过程。从图8中可以看出渠道14由于接受了所有渠道的流量,故其流量明显大于渠道5, 6,渠道5接收了上游渠道11, 12, 13及渠

道4的流量,渠道6接受了上游渠道7,8,9,10的流量,又流出了渠道4的流量,因而渠道5的流量略大于渠道6的流量,计算结果是合理的。文献[3~5]应用的是牛顿哈费森和有限元法求解非线性方程组,笔者应用三级联解法,从上述的计算可以看出,该模型不仅可以应用到渠网的恒定流的研究,还可以应用到渠网及河网的非恒定流研究,结果表明,无论是环状河网还是树状河网,均可取得较好的效果。

4 结语

利用河网的三级解法对渠网及河网非恒定流的计算程序进行编制,建立以 z, Q 为变量的圣维南方程组,采用了普列斯曼(Preissmann)4点隐式格式,方程在离散时应用泰勒级数线性化非线性方程组。模型在计算过程中有很好的稳定性,叠代次数少、计算速度快,程序具有节点可任意编号、扩展容易的优点,具有较强的通用性。

用文献的有关资料进行对比,计算结果吻合很好,各渠道的分流比计算结果精度较高。模型可以计算恒定流、非恒定流流动,适用树状的渠网、复杂的环状河网,为河网及渠网的水量调度提供了一个较为简便的实用工具。

下一步工作是将本模型进一步扩展,形成富营养化的水动力生态模型,对城市复杂的渠网及河网进行水质的模拟,为城市河网地区的水环境预警、水环境规划、水环境管理提供决策依据。

参考文献

- [1] 杨开林, 白正裕. 调水渠网非恒定流的线性变换求解方法[J]. 水利学报, 2004, (3): 35~41
- [2] 杨国录. 河流数学模型[M]. 北京: 海洋出版社, 1989. 76~89
- [3] Sen D J, Garg N K. Efficient algorithm for gradually varied flows in channel networks [J]. Journal of Irrigation and Drainage Engineering, 2002, 180(6): 351~357
- [4] Sen D J, Garg N K. Efficient solution technique for dendrite channel networks using fem [J]. Journal of Hydraulic Engineering, 1998, 124(8): 831~839
- [5] Adlul Islam A, Raghuvanshi N S, Singh R, et al. Comparison of gradually varied flow computation algorithms for open - channel network [J]. Journal of Irrigation and Drainage Engineering, 2005, 131(5): 457~465
- [6] 韦直林, 崔占峰. 一维河网非恒定流计算程序的初步研究[J]. 人民长江, 2001, 32(12): 30~32
- [7] 李毓湘, 逢勇. 珠江三角洲地区河网水动力学模型研究[J]. 水动力学研究与进展, 2001, 16(2): 143~154

Study and Application of Steady Flow and Unsteady Flow Mathematical Model for Canal Networks

Zhang Mingliang, Shen Yongming

(State Key Laboratory of Coastal and Offshore Engineering, Dalian University of
Technology, Dalian, Liaoning 116024, China)

[Abstract] Based on Preissmann implicit scheme for one-dimensional Saint-Venant Equation, the mathematical model for one-dimensional river networks and canal networks is developed and the key issues on the model are expatiated particularly in this paper. This model is applied to simulating the tree-type irrigation canal networks and complex looped canal networks. The results of levels and flows and discharge distribution between the branches agree with the data from Adlul. This model is a simple and practical tool for water resource regulation of irrigation canal networks and river networks. These results show the application value of this model is to set up ecological numerical model of water quality in river networks and canal networks.

[Key words] Preissmann implicit scheme; canal networks and river networks; discharge distribution; water quality mode