

# 一种改进的 Hilbert 能量谱算法研究

杨建文, 贾民平, 许飞云, 胡建中

(东南大学设备监控与故障诊断研究所, 南京 210096)

**[摘要]** 分析了 HHT 中 Hilbert 能量谱的原理; 研究了瞬时频率谱中端点效应产生的原因, 将 ARMA 模型应用于 Hilbert 能量谱计算中, 以旋转机械振动信号为对象, 运用所提的方法对 HHT 中典型的本征模式函数进行仿真实验; 通过与传统方法比较, 证明它可以有效地改进端点效应, 优化 Hilbert 能量谱。

**[关键词]** Hilbert 变换; 端点失真; 瞬时参数; 本征模式函数

**[中图分类号]** TH133; TH165 **[文献标识码]** A **[文章编号]** 1009-1742(2005)07-0055-05

## 1 前言

Hilbert-Huang 变换 (简称 HHT) 作为一种非平稳数据处理的新方法, 已经逐渐被人们所接受, 目前已广泛应用于海洋、地震、机械振动信号分析等领域<sup>[1-3]</sup>。

然而, 在经验模式分解和 Hilbert 变换过程中, 都会出现端点效应, 严重影响 HHT 的分析精度。大量文献对经验模式分解的端点失真问题进行了研究并提出了解决方案<sup>[4-6]</sup>, 但是, 对 Hilbert 能量谱端点失真问题进行深入研究却寥寥无几。作为 HHT 的关键步骤之一, Hilbert 能量谱的端点失真问题同样有待于深入解决。文献[5]提出了在信号的两端分别构造小波串以解决 Hilbert 谱端点失真的问题, 但未对所提出的方法进行解释和实验, 其效果没有说服力。文献[6]采用单层、单个神经元及线性神经网络对模态分量进行延长, 以消除端点效应, 但该方法存在网络训练不收敛的情况, 并且计算时间过长, 实用性不强, 未对 Hilbert 能量谱端点效应产生的原因进行深入分析。

在文献[4]中, 笔者所在的研究所以对经验模式分解的端点效应进行了研究, 提出了可靠的改进方

法; 笔者对 Hilbert 变换的端点效应进行了研究, 分析了端点效应产生的原因, 将 ARMA 模型应用于 Hilbert 能量谱的计算中, 试图解决瞬时频率谱中端点“飞跃”的问题。

## 2 Hilbert 变换理论

笔者针对 HHT 中机械振动信号通过经验模式分解以后获得的本征模式函数 (intrinsic mode function, IMF) 的 Hilbert 变换进行了研究。IMF 是指对数据序列进行经验模式分解 (empirical mode decomposition, EMD) 之后得到的一组数据序列分量, 由于 EMD 方法认为信号是由不同尺度的“波动”分量构成的, 因此规定这个分量满足以下条件<sup>[7]</sup>:

- 1) 在整个数据序列内, 过零点与极值点个数最多相差 1;
- 2) 局部均值为零。

由以上两点可以看出, IMF 是一个非单调的波动信号, 其上、下包络关于时间轴是对称的。

设  $x(t)$  为实信号, 为了分析方便, 可以构造一个具有相同能量和相同频率的复信号  $q(t)$ , 并且  $x(t)$  为  $q(t)$  的实部。假设  $q(t)$  的虚部为  $\hat{x}(t)$ , 则

**[收稿日期]** 2004-10-17; **修回日期** 2004-11-28

**[基金项目]** 国家自然科学基金资助项目 (50475078), 江苏省研究生创新基金资助项目 (xm04-23)

**[作者简介]** 杨建文 (1977-), 男, 河南洛阳市人, 东南大学博士研究生

$q(t)$  可以表示为

$$q(t) = x(t) + j\hat{x}(t) \tag{1}$$

如果将  $q(t)$  表示为极坐标的形式, 则

$$q(t) = a(t)e^{j\phi(t)} \tag{2}$$

并且有

$$a(t) = \sqrt{x^2(t) + \hat{x}^2(t)} \tag{3}$$

$$\phi(t) = \arctan \left\{ \frac{\hat{x}(t)}{x(t)} \right\} \tag{4}$$

式 (3) 称复信号  $q(t)$  的瞬时幅值, 代表信号的瞬时能量;  $\phi(t)$  称为信号的瞬时相位,  $\phi(t)$  的变化率代表信号的瞬时频率<sup>[8]</sup>, 即

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(t)}{dt} \tag{5}$$

设实信号  $x(t)$  的频谱为  $S(f)$ , 复信号  $q(t)$  的频谱为  $Q(f)$ , 则根据以上假设条件, 同时考虑到实信号的频谱为对称频率; 只保留正频率, 并且将幅值加倍, 保持信号的能量不变, 则有

$$Q(f) = \begin{cases} 2S(f), & f > 0 \\ S(f), & f = 0 \\ 0, & f < 0 \end{cases} \tag{6}$$

由式 (6) 可以看出,  $Q(f)$  可以通过  $S(f)$  滤波得到, 滤波函数  $H(f)$  可以表示为

$$H(f) = \begin{cases} 1, & f > 0 \\ 0, & f = 0 \\ -1, & f < 0 \end{cases} \tag{7}$$

设式 (7) 对应的传递函数为  $h(t)$ , 则  $q(t)$  可以表示为

$$q(t) = x(t) + jx(t) * h(t) \tag{8}$$

由式 (8) 可以看到,  $q(t)$  的虚部可以通过  $x(t)$  与  $h(t)$  的卷积得到; 由实信号构造复信号虚部的过程称为 Hilbert 变换 (Hilbert transform, HT), 如式 (9) 所示:

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau \tag{9}$$

在式 (9) 的被积函数中, 由于存在极值点而不能直接积分, 因此引入了柯西主元  $P$ 。Hilbert 变换过程的推导, 还可以从相移  $\pm \pi/2$  的角度考查。

### 3 端点问题的提出与分析

#### 3.1 应用 Hilbert 变换分析信号瞬时参数

由式 (3)、式 (4) 可知, 通过构造复信号的虚部, 可以获得信号的瞬时幅值和瞬时频率, 以下考查一个正弦信号 (符合 IMF 的定义):

$$x(t) = \sin(2\pi ft) \tag{10}$$

其中  $f = 35$  Hz, 设  $x(t)$  的单位为 mm; 用 Hilbert 变换做出复信号的虚部, 其时域波形如图 1 所示。

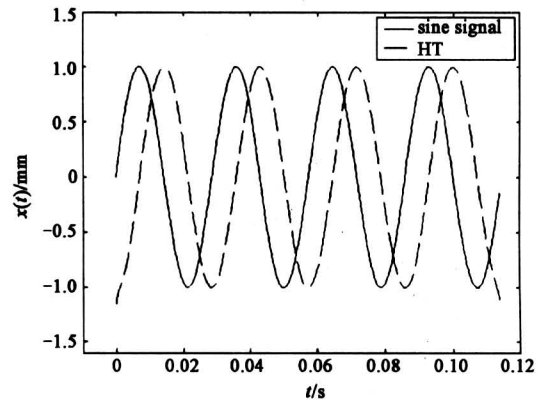


图 1 正弦信号 (实线) 和 Hilbert 变换 (虚线)

Fig.1 Sine signal (solid line) and its Hilbert transform (dashed line)

正弦信号的理想 Hilbert 变换应为与给出的正弦信号相位差  $\pi/2$  的正弦信号, 然而在图 1 中看到正弦信号的 Hilbert 变换信号 (虚线) 出现了明显的失真 (主要在两端); 图 2、图 3 分别给出了应用 HT 获得的信号的瞬时幅值和瞬时频率 (瞬时频率的计算采用前向插值法); 对于式 (10), 正确的瞬时幅值应恒等于 1 mm, 而瞬时频率应恒等于 35 Hz; 由图 2、图 3 看到, 通过 HT 得到正弦信号的瞬时参数基本上是正确的, 但在图形的两端出现了严重的失真 (飞跃和波动)。

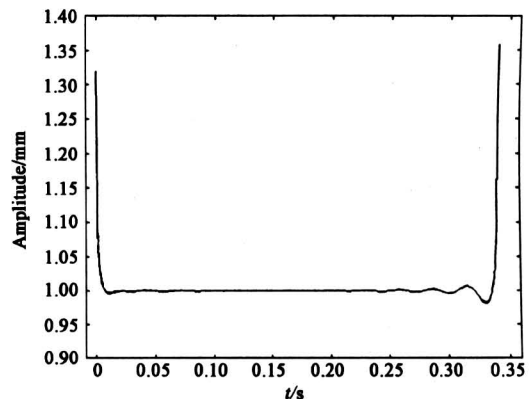


图 2 正弦信号的瞬时幅值谱

Fig.2 The instantaneous amplitude spectrum of sine signal

#### 3.2 端点失真问题分析

为了研究 HT 端点失真的原因, 对图 4 Hilbert

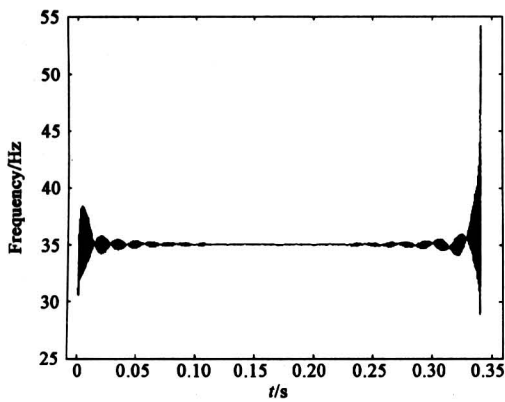


图3 正弦信号的瞬时频率谱  
Fig.3 The instantaneous frequency spectrum of sine signal

变换的推导过程进行分析<sup>[9]</sup>：

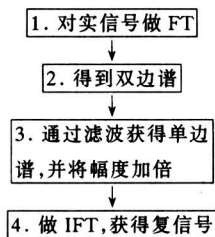


图4 Hilbert 变换计算过程

Fig.4 The calculating course of Hilbert transform

图4的第1步是将信号进行 Fourier 变换，然而 Fourier 变换是将有限长序列作为周期序列的一个周期进行计算的，因此，当数据序列为非整周期采样时，势必引入误差，对变换后得到的频率产生影响；图5、图6是对式(10)进行整周期采样和非整周期采样的时域波形和幅值谱。对比可以看到整周期采样和非整周期采样频谱是有差别的。在非整周期采样中，幅值谱有轻微的失真，表现在35 Hz的谱线幅值小于0.5 mm，从能量守恒的角度分析，频谱中已混入其他成分，然而，由于实信号为双边谱，直接对其 FT 进行 IFT 时，这些误差恰好能够抵消，从而得到正确的时域波形<sup>[6]</sup>。

图4中的第3、第4步，即去掉(双边谱的)一边频谱，并将幅值加倍。由以上分析可知，在非整周期采样时，由于频谱存在误差，去掉一边频谱以后，误差将无法抵消，反映在 HT 信号的波形上，表现为波形失真，特别是反映在波形的两端。图7给出了式(10)整周期采样和非整周期采样的 HT 变换的波形。当整周期采样时，由于 FT 变换

基本上没有误差，因此通过 HT 获得的余弦波形基本正确；而在非整周期采样时，则出现了波形失真，特别是在余弦信号的两端比较严重。

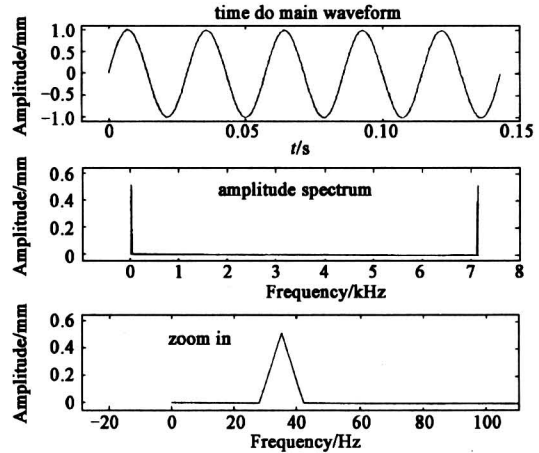


图5 整周期采样及幅值谱图

Fig.5 The whole periodical sampling signal and its amplitude spectrum

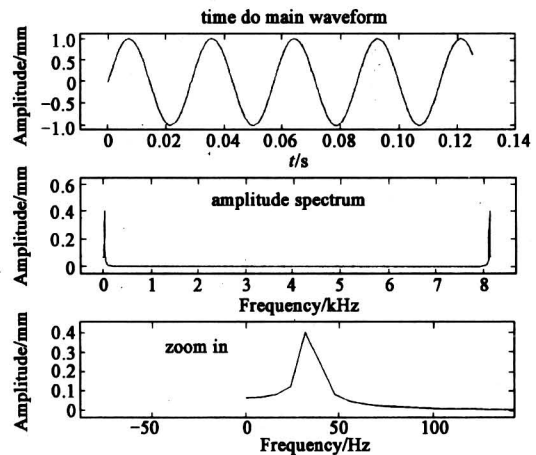


图6 非整周期采样及幅值谱图

Fig.6 The non-whole periodical sampling signal and its amplitude spectrum

#### 4 Hilbert 变换的改进算法

从第3章的分析可知，HT 会产生误差，并且误差主要分布在变换信号的两端。为此，笔者提出以下改进算法：

- 1) 建立数据的 ARMA 模型，并对其左、右进行延长，获得新数据；
- 2) 求新数据的 Hilbert 变换；
- 3) 截取新数据的 Hilbert 变换，获得原信号的 HT。

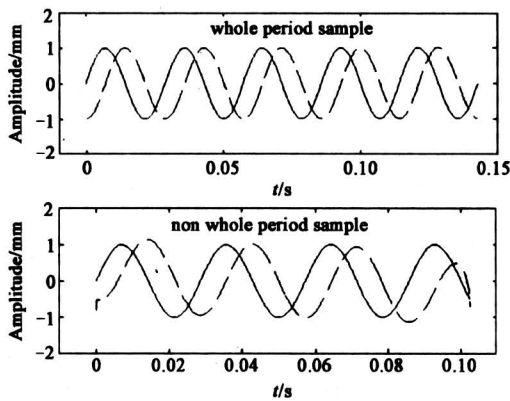


图 7 整/非整周期采样的 HT 波形  
Fig.7 The HT waveform of whole and non-whole sampling signal

由于 Hilbert 变换可以视为原信号进行  $\pm \pi/2$  相移得到的数据, 因此在 Hilbert 变换中, 任意截取一部分都应该仍为对应信号的 Hilbert 变换; 同时, 由于变换过程中产生的误差主要集中在信号的两端, 因此, 通过舍弃两端数据获得的信号得到了极大改善。

调幅和调频是旋转机械常见的故障信号形式, 以下对这两种信号进行仿真实验 (实验中采用最大商谱算法, 模型阶数为 30):

· 调幅信号

$$f(t) = (1 + 0.5\sin(2\pi f_1 t))\sin(2\pi f_0 t) \quad (11)$$

式中  $f_1 = 7 \text{ Hz}$ ,  $f_0 = 100 \text{ Hz}$ 。

图 8 为式 (11) 及通过 ARMA 建模延长后的波形及 HT 包络。由图 8 看到, 原信号及延长信号的两端通过 HT 获得的包络都产生了失真, 然而延长信号中原信号部分的包络却很好。图 9 为原方法

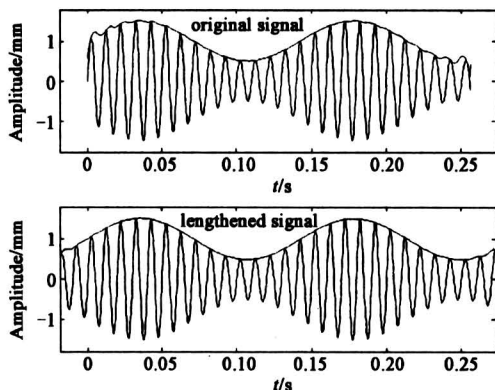


图 8 调幅信号、延长信号及 HT 包络  
Fig.8 The amplitude-modulated signal and its lengthened signal with HT envelope

和改进后方法获得的调幅信号瞬时频率图。由图 9 看到, 改进后获得的瞬时频率基本上为调幅信号的载波频率, 端点的失真也被正确消除。

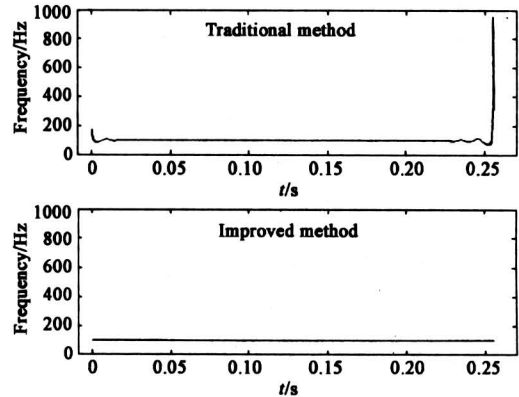


图 9 调幅信号改进前与改进后瞬时频率谱  
Fig.9 The instantaneous frequency spectrum of amplitude-modulated signal before and after improved

· 调频信号

$$f(t) = \sin(2\pi f_0 t + \sin(2\pi f_1 t)) \quad (12)$$

式中  $f_1 = 7 \text{ Hz}$ ,  $f_0 = 100 \text{ Hz}$ 。

图 10 为式 (12) 及通过 ARMA 建模延长后的波形及 HT 包络; 图 11 为使用传统方法与使用改进后方法获得的瞬时频谱图, 两种方法均获得很好的效果。

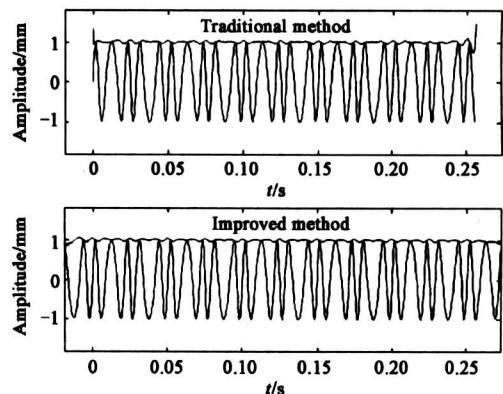


图 10 调频信号、延长信号及包络  
Fig.10 The frequency-modulated signal and its lengthened signal with HT envelope

5 结论

笔者简单介绍了 Hilbert 变换, 分析了 Hilbert 变换产生误差的原因在于 Fourier 变换过程中的误

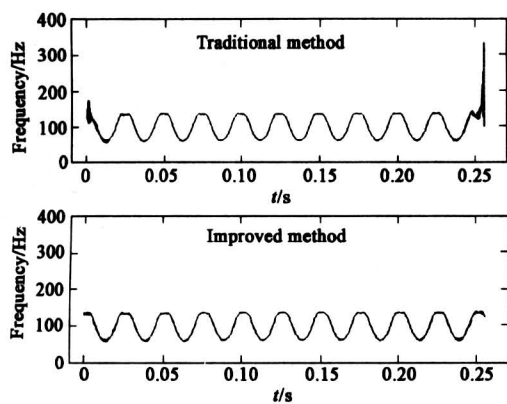


图 11 调频信号改进前与改进后瞬时频率谱

Fig. 11 The instantaneous frequency spectrum of frequency-modulated signal before and after improved

差；针对经验模式分解的本征模式函数，提出应用 ARMA 建模对数据进行延长，从而消除端点效应，有效地解决了 Hilbert 能量谱的端点效应及波形失真。

#### 参考文献

- [1] Xu Y L, Asce M, Chen J. Characterizing nonstationary wind speed using empirical mode decomposition [J]. *Journal of Structural Engineering*, 2004, (7): 912~920
- [2] Oonix P J, Hermand J P. Empirical mode decomposition and ocean acoustic data with constraint on the frequency range [A]. *Proceedings of the Seventh European Conference on Underwater Acoustics [C]*. ECUA, 2004. 5~8
- [3] Zhang R, Ma S, Safak E, Hartzell S. Hilbert-Huang transform analysis of dynamic and earthquake motion recordings [J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2003, (8): 861~875
- [4] 贾民平, 凌娟, 许飞云, 等. 基于时序分析的经验模式分解法及其应用 [J]. *机械工程学报*, 2004, 40 (9): 54~57
- [5] 罗奇峰, 石春香. Hilbert-Huang 变换理论及其计算中的问题 [J]. *同济大学学报*, 2003, (6): 637,641
- [6] 邓拥军, 王伟, 钱成春, 等. EMD 方法及 Hilbert 变换中边界问题的处理 [J]. *科学通报*, 2001, 46 (3): 257~263
- [7] Huang N E, Shen Z, Long S R, et al. The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis [J]. *Proc R Soc Lond A*, 1998, 454: 899~955
- [8] 张贤达, 保铮. 非平稳信号分析与处理 [M]. 北京: 国防工业出版社, 1998. 14~15
- [9] Marple S L Jr. Computing the discrete-time "analytic" signal via FFT [A]. *IEEE, Signal, Systems & Computers, Conference Record of the Thirsty-First Asilomar Conference [C]*, 1997. 1322~1325

## The Study of an Improved Algorithm About Hilbert Energy Spectrum

Yang Jianwen, Jia Minping, Xu Feiyun, Hu Jianzhong  
(*Research Center of Condition Monitoring and Fault Diagnosis, Southeast University, Nanjing 210096, China*)

[Abstract] The Hilbert energy spectrum's principle in HHT is analyzed in the paper; Aimed to solve the end problem in the instantaneous spectrum figure, the cause is researched and ARMA model is introduced in the calculation of Hilbert of HHT. By the simulation of several typical IMFs about vibration signal of rotating machine, and comparing with the conventional methods, the advanced method is proved to be able to improve the end problem effectively and optimize the Hilbert energy spectrum greatly.

[Key words] Hilbert transform; the distortion of end; instantaneous parameter; intrinsic mode function