

单元体斜截面上的应力不是其上质点平衡的应力

韩文坝¹, 蔡冰清², 刘大斌³, 韩晓东⁴

(1. 中国石化扬子石化有限公司, 南京 210048; 2. 哈尔滨工业大学, 哈尔滨 150001;
3. 南京理工大学, 南京 210094; 4. 深圳市岱宇实业有限公司, 广东深圳 518036)

[摘要] 以直杆轴向拉伸为例说明: 单元体斜截面上的平衡应力只是保证斜截单元体平衡的应力, 不是保证其上质点平衡的应力; 单元体平衡与质点平衡是不同的。推导出二向应力状态下质点的平衡应力为 $\sigma'_a = (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2\tau^2 + 2\tau(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)^{1/2}(\sin \alpha_2 + \cos \alpha_2))^{1/2}$, 质点平衡应力 σ'_a 与 x 轴的夹角为 $\alpha_x = \arctan(\tau + (\sigma_x^2 + \sigma_y^2)^{1/2} \sin \arctan(\sigma_y/\sigma_x)) / (\tau + (\sigma_x^2 + \sigma_y^2)^{1/2} \cos \arctan(\sigma_y/\sigma_x))$ 。推导出二向应力状态质点平衡应力的极值条件: $\sigma_x = \sigma_y$; 应力 σ'_a 在与 X 轴成 45° 的对角线上; 极大值为 $\sigma'_{a \max} = 2^{1/2}(\sigma_x + \tau)$ 。推导出质点平衡应力比最大主应力 $\sigma_1 = \sigma_x + \tau$ 大 $2^{1/2}$ 倍。指出 $\sigma'_{a \max}$ 与 σ_1 分别发生在两个互相垂直的对角线平面上, 且与 x 轴夹角分别为 $\pm 45^\circ$ 。用质点平衡应力建立了新的拉(弯)一剪(扭)组合变形条件 $\sigma'_a = (\sigma^2 + 2\tau^2 + 2\sigma\tau)^{1/2} \leq [\sigma]$, 它不同于现行的第三强度理论公式 $(\sigma^2 + 4\tau^2)^{1/2} \leq [\sigma]$ 和第四强度理论公式 $(\sigma^2 + 3\tau^2)^{1/2} \leq [\sigma]$; 同时, 建立了三向应力状态下第四强度理论的新公式 $\sigma'_d = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)^{1/2} \leq [\sigma]$, 进而推导出正方体被三向等应力拉伸时其最小破坏应力值为 $0.58\sigma_s$ 。它不同于现行的第四强度理论公式 $\sigma_{rd} = [((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2)/2]^{1/2} \leq [\sigma]$, 推翻了正方体被三向等应力拉伸时, 无论多大应力都不会被破坏的错误结论。

[关键词] 应力; 斜截面; 质点平衡应力; 强度理论

[中图分类号] O343; O341 **[文献标识码]** A **[文章编号]** 1009-1742(2005)11-0042-06

现行弹性理论用物体内部微六面体的平衡, 求得了微六面体各面上受到的正应力和剪应力。并且认为当微分体趋于无穷小时, 微分体的平衡就是质点的平衡, 这就把保持微分体平衡的应力与保持质点平衡的应力当作同一回事。由于混淆了单元体平衡和质点平衡的不同, 使弹性理论出现了矛盾。现行弹性理论以单元体平衡的最大主应力(绝对值)作为强度理论的依据。在设计时就降低了强度条件, 没有达到要求的安全系数, 这也是材料出现突然断裂的原因之一。

笔者用质点平衡应力建立的新的强度条件将会保障强度要求, 并且能解决现行第四强度理论与实际相矛盾的问题(即用三向等应力拉伸正方体无论多大应力正方体都不会被破坏)。

1 直杆轴向拉伸任一截面上的应力小于其上质点同方向的平衡应力

直杆轴向拉伸见图 1a, ae 为任意斜截面, 其斜截单元体 aed 受力状态见图 1b。任一斜截面 ae , 其外法线 n 与 x 轴夹角为 α , 斜截面上 p 点的正应力为 σ_a , 剪应力为 τ_a 。由斜体 aed 的平衡得到^[1]

$$\sigma_a = p_a \cos \alpha = \sigma_0 \cos^2 \alpha \quad (1)$$

$$\tau_a = p_a \sin \alpha = (\sigma_0 \sin 2\alpha)/2 \quad (2)$$

斜面上任一质点 p , 在 x 方向上, 左右受到 $\sigma_0 = \sigma'_0$ 的拉应力处于平衡。由于质点没有面积大小的概念, 因此可用应力的平均代替力的平均。把 σ_0 分解成垂直于斜面的正应力 σ'_a 和平行于斜面的剪应力 τ'_a 的 2 个分力, 如图 1c 所示, 由力的分解可得质点平衡应力:

[收稿日期] 2004-12-06; 修回日期 2005-03-02

[作者简介] 韩文坝(1938-), 男, 辽宁兴城市人, 中国石化扬子石化有限公司副教授

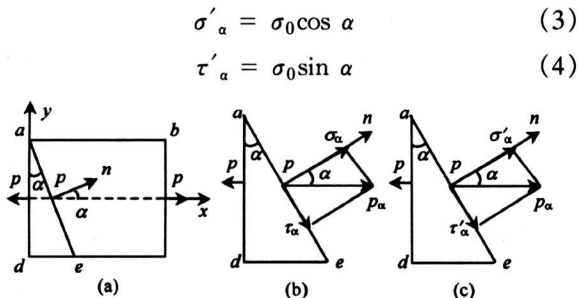


图 1 轴向拉伸斜截面上质点平衡应力分量
Fig.1 Balance stress of particles in tilted section under pure extension condition

式 (3) 和式 (4) 的应力分量才能保持质点 p 的平衡, 因为

$$[(\sigma'_\alpha)^2 + (\tau'_\alpha)^2]^{1/2} = [(\sigma_0 \cos \alpha)^2 + (\sigma_0 \sin \alpha)^2]^{1/2} = \sigma_0 \quad (5)$$

式 (1) 的 σ_α 和式 (2) 的 τ_α 不能保证 p 点的平衡, 它只能保证斜体 aed 的平衡, 因为

$$[(\sigma_\alpha^2 + \tau_\alpha^2)^{1/2}] = [(\sigma_0 \cos^2 \alpha)^2 + ((\sigma_0 \sin 2\alpha)/2)^2]^{1/2} = \sigma_0 \cos \alpha \quad (6)$$

当 $\alpha \neq 0$ 时, 总有 $\sigma_0 > \sigma_0 \cos \alpha$, 这说明单元体任意斜面上的正应力 σ_α 和剪应力 τ_α 不能保证斜面上的质点的平衡, 它不是保持质点平衡的应力分量。为了区别单元体平衡应力, 把保持质点平衡的应力分量, 称为质点平衡应力, 用 σ'_α 和 τ'_α 表示。

由式 (1) 与式 (3) 之比及式 (2) 与式 (4) 之比可得

$$\sigma_\alpha = \sigma'_\alpha \cos \alpha \text{ 或 } \sigma'_\alpha = \sigma_\alpha / \cos \alpha \quad (7)$$

$$\tau_\alpha = \tau'_\alpha \cos \alpha \text{ 或 } \tau'_\alpha = \tau_\alpha / \cos \alpha \quad (8)$$

当 $\alpha \neq 0$ 时, $\cos \alpha < 1$, 式 (7) 及式 (8) 表明, 由单元体平衡得到的斜截面上正应力和剪应力, 小于用力的分解法则得到的保持其质点平衡的正应力和剪应力。

2 轴向拉伸应力状态下剪应力极值小于质点同方向的平衡应力

在轴向拉伸应力状态下, 当 $\alpha = \pm 45^\circ$ 时, 由式 (2) 可得单元体剪应力最大绝对值

$$\tau_{\alpha \max} = \sigma_0 / 2 \quad (9)$$

其应力状态如图 2a 所示。

现在来研究 B 点的平衡, 如前所讲, 直杆内任一点都在大小相等, 方向相反的轴向拉应力 σ_0

作用下处于平衡。原始应力 σ_0 与导出应力 τ_{\max} 必须满足力的合成-分解法则, 质点 B 才能保持平衡, 即

$$\sigma_0 = \tau_{\max} + \tau_{\max} \quad (10)$$

也即只有在 $(\tau_{\max}^2 + \tau_{\max}^2)^{1/2} = \sigma_0$ 时质点 B 才能处于平衡。

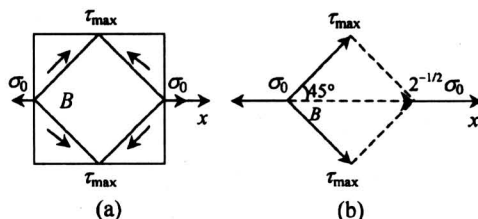


图 2 轴向拉伸单元体内最大剪应力不能保持质点平衡

Fig. 2 The maximum shearing stress of element can't ensure the balance of particles on it

把式 (9) 代入上式可得

$$((\sigma_0/2)^2 + (\sigma_0/2)^2)^{1/2} = 2^{1/2} \sigma_0 / 2 < \sigma_0 \quad (11)$$

式 (11) 表明, 单元体 $\pm 45^\circ$ 斜面上的最大剪应力 (绝对值) 不能满足 B 点的平衡。如图 2b 所示, 要保证 B 点的平衡, 其 $\pm 45^\circ$ 斜面上的剪应力应由式 (4) 确定:

$$\tau'_{\alpha \max} = \sigma_0 |\sin \pm 45^\circ| = 2^{1/2} \sigma_0 / 2 \quad (12)$$

(12) 式才能满足 B 点的平衡, 因为

$$[(\tau'_{\alpha \max})^2 + (\tau'_{\alpha \max})^2]^{1/2} = [(2^{1/2} \sigma_0 / 2)^2 + (2^{1/2} \sigma_0 / 2)^2]^{1/2} = \sigma_0 \quad (13)$$

以上分析说明, 轴向拉伸应力状态下, 单元体所受剪应力的极值小于其质点同方向的平衡应力。

3 纯剪切应力状态下的主应力小于其质点同方向上的平衡应力

单元体受纯剪切应力状态如图 3a, $\sigma_x = 0, \sigma_y = 0, \tau$ 为原始应力, σ_1 和 σ_3 是导出的最大和最小主应力, 其公式^[1]为

$$\sigma_1, \sigma_3 = (\sigma_x + \sigma_y) / 2 \pm [((\sigma_x - \sigma_y) / 2)^2 + \tau^2]^{1/2} = \pm \tau \quad (14)$$

主平面的法线 n 方向与 x 轴夹角为 $\pm 45^\circ$ 。研究对角线 ac 所受到的力。如图 3a。对角线 ac 受到大小相等方向相反的主应力 σ_1 的拉应力作用。

取点 a 研究其平衡, 如图 3c, τ 是原始应力, σ_1 是由 τ 产生的。由式 (14) 可知, $\sigma_1 = \tau$, 则 a

点在此三应力作用下，不能处于平衡。因为

$$\sum x = \tau - \sigma_1 \cos 45^\circ = \tau - 2^{1/2} \tau / 2 \neq 0 \quad (15)$$

$$\sum y = \tau - \sigma_1 \cos 45^\circ = \tau - 2^{1/2} \tau / 2 \neq 0 \quad (16)$$

这表明主应力 σ_1 不是保持质点平衡的应力，保持质点平衡应力是正交剪应力的合应力（图 3b）

$$\sigma'_a = (\tau^2 + \tau^2)^{1/2} = 2^{1/2} \tau \quad (17)$$

式 (17) 才是保持 a 点平衡的应力。因为 σ'_a 满足平衡条件，如图 3d

$$\sum x = \tau - \sigma'_a \cos 45^\circ = \tau - 2^{1/2} \times 2^{1/2} \tau / 2 = 0 \quad (18)$$

$$\sum y = \tau - \sigma'_a \cos 45^\circ = \tau - 2^{1/2} \times 2^{1/2} \tau / 2 = 0 \quad (19)$$

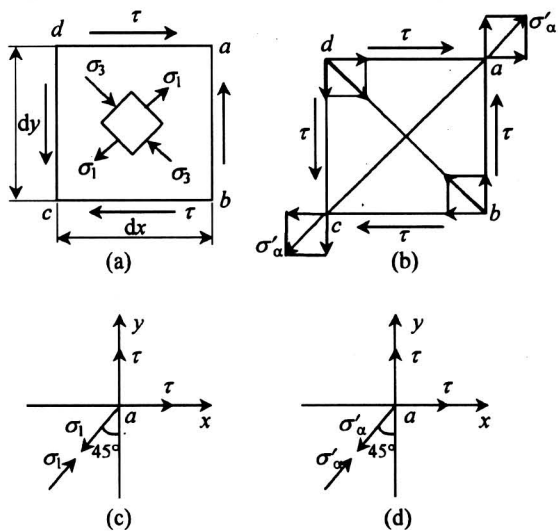


图 3 纯剪切单元体主应力不能保持质点平衡

Fig. 3 The principle stress of element under pure shearing condition can't ensure the balance of particle on it

4 单元体斜面上的应力小于同方向质点平衡应力的原因

这是因为，单元体有体积和面积，研究其部分单元体平衡时，要用力（应力×面积）进行计算，虽然单元体（微分体）的边长 dx 和 dy 趋近于无穷小，但是横截面与成 α 角的斜面的面积的差别仍然没变，只是其面上的应力都是按平均值计算了。而研究质点的平衡时，按定义，质点没有大

小，即无体积和面积，质点的平衡就是应力的平衡，斜面应力变化的效应反应不到质点上来。两种平衡，一个与面积有关，一个与面积无关，最终必然得到不同的结论，而且作用在质点上的应力无正应力和剪应力之分。

5 二向应力状态下质点平衡应力

5.1 用解析法求质点平衡应力

如图 4a 的二向应力状态，根据力叠加原理；图 4a 与（图 4b+图 4c）两个应力状态的和等效。

图 4b 为纯剪切应力状态， a 点受到的合力，由式 (17) 可得

$$\sigma'_{a1} = 2^{1/2} \tau \quad (20)$$

由于 $\tau_x = \tau_y = \tau$ ，所以 σ'_{a1} 与 x 方向的夹角 $\alpha_1 = 45^\circ$ 。

如图 4c， a 点受到的合应力为

$$\sigma'_{a2} = (\sigma_x^2 + \sigma_y^2)^{1/2} \quad (21)$$

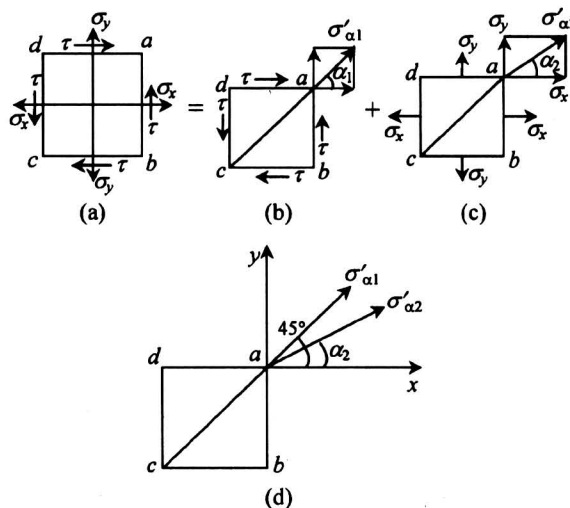


图 4 解析法求质点平衡应力

Fig. 4 Resolution of balance stress of particles by analytics

设 σ'_{a2} 与 x 轴间的夹角为 α_2 ，则有

$$\alpha_2 = \arctan |\sigma_y / \sigma_x| \quad (22)$$

由 σ'_{a1} 和 σ'_{a2} 组成的合矢量为 σ'_a ，就是质点 a 的平衡应力，如图 4d 所示。求 σ'_{a1} 和 σ'_{a2} 的合矢量：

$$\sum x = \sigma'_{a1} \cos 45^\circ + \sigma'_{a2} \cos \alpha_2 \quad (23)$$

$$\sum y = \sigma'_{a1} \sin 45^\circ + \sigma'_{a2} \sin \alpha_2 \quad (24)$$

把式 (20) 和式 (21) 代入式 (23) 和式 (24)，

可得

$$\sum x = \tau + (\sigma_x^2 + \sigma_y^2)^{1/2} \cos \alpha_2 \quad (25)$$

$$\sum y = \tau + (\sigma_x^2 + \sigma_y^2)^{1/2} \sin \alpha_2 \quad (26)$$

则其合力为

$$\begin{aligned} \sigma'_a &= \left((\sum x)^2 + (\sum y)^2 \right)^{1/2} = \\ &= \left((\tau + (\sigma_x^2 + \sigma_y^2)^{1/2} \cos \alpha_2)^2 + \right. \\ &\quad \left. (\tau + (\sigma_x^2 + \sigma_y^2)^{1/2} \sin \alpha_2)^2 \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} \sigma'_a &= (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2\tau^2 + \\ &2\tau(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)^{1/2}(\sin \alpha_2 + \cos \alpha_2))^{1/2} \quad (27) \end{aligned}$$

式 (27) 即为二向应力状态下 a 点受到的平衡应力。

5.2 质点平衡应力的方向

设质点平衡应力与 x 轴夹角为 α_x , 则

$$\alpha_x = \arctan \left(\frac{\sum y}{\sum x} \right) = \arctan \left(\frac{\tau + (\sigma_x^2 + \sigma_y^2)^{1/2} \sin \alpha_2}{\tau + (\sigma_x^2 + \sigma_y^2)^{1/2} \cos \alpha_2} \right)$$

即

$$\begin{aligned} \alpha_x &= \arctan \left((\tau + (\sigma_x^2 + \sigma_y^2)^{1/2} \cdot \right. \\ &\quad \left. \sin \arctan |\sigma_y / \sigma_x|) / (\tau + \right. \\ &\quad \left. (\sigma_x^2 + \sigma_y^2)^{1/2} \cos \arctan |\sigma_y / \sigma_x|) \right) \quad (28) \end{aligned}$$

α_x 为二向应力状态下质点平衡合应力与 x 轴的夹角。

5.3 质点平衡应力极值及条件

由式 (27) 可知, σ'_a 是 α_2 的函数, 由式 (22) 可知 α_2 又是 σ_x 和 σ_y 的函数, 因而就可求得质点平衡应力的极值及条件。

$$\begin{aligned} \sigma'_a \text{ 对 } \alpha_2 \text{ 求导数, 令其为零, 由式 (27) 可得} \\ d\sigma'_a / d\alpha_2 = \tau(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)^{1/2}(\cos \alpha_2 - \sin \alpha_2) / \\ [(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2\tau^2 + 2\tau(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)^{1/2} \cdot \\ (\sin \alpha_2 + \cos \alpha_2))]^{1/2} \quad (29) \end{aligned}$$

$$\text{故 } (\cos \alpha_2 - \sin \alpha_2) = 0, \alpha_2 = 45^\circ. \quad (29')$$

该结果表明, 当合成正应力 σ'_{a2} 与 x 轴成 45° 时, 质点平衡应力有最大值。

把 $\alpha_2 = 45^\circ$ 代入式 (22) 有: $\alpha_2 = 45^\circ = \arctan |\sigma_y / \sigma_x|$, 于是可得 $\sigma_x = \sigma_y$, 这表明, 当 $\sigma_x = \sigma_y$, $\alpha_2 = 45^\circ$ 时质点有最大平衡应力。

上述关系代入式 (27) 可得

$$\sigma_{45'} = \sigma'_{a \max} = 2^{1/2}(\sigma_x + \tau) \quad (30)$$

式 (30) 表明 $\sigma_x = \sigma_y$ 时, 在对角线方向上, 质点平衡应力有极大值 (绝对值)。

5.4 主应力与质点平衡应力的比较

当 $\sigma_x = \sigma_y$ 时, 由二向应力状态主平面的公

式^[1], 可求得主平面的位置^[1]

$$\tan 2\alpha_0 = -2\tau_x / (\sigma_x - \sigma_y) \quad (31)$$

式 (31) α_0 为主应力 σ_1 于 x 轴间的夹角。由于 $\sigma_x = \sigma_y$, 则有 $2\alpha_0 = -90^\circ$, 于是 $\alpha_2 = -45^\circ$ 。对比式 (29') 的结果表明: 质点平衡应力与主应力分别在两个互相垂直的对角线平面上。且与 x 轴夹角分别为 45° 和 -45° 。

由主应力公式^[1]可得最大主应力

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_{\max} = (\sigma_x + \sigma_y) / 2 + \\ &(((\sigma_x - \sigma_y) / 2)^2 + \tau_x^2)^{1/2} \quad (32) \end{aligned}$$

$$\sigma_1 = \sigma_{\max} = \sigma_x + \tau_x \quad (33)$$

对比式 (30) 与式 (33) 可知, 当 $\sigma_x = \sigma_y$ 时, 得到质点平衡极值应力 σ'_a 比单元体平衡下的极值主应力 σ_1 大 $2^{1/2}$ 倍。

6 质点平衡应力的分析

6.1 式 (27) 满足纯剪切应力状态下质点平衡

当 $\sigma_x = \sigma_y = 0$ 时, 成为纯剪切应力状态。由式 (27), 求得质点平衡应力为

$$\sigma'_a = 2^{1/2}\tau。$$

由式 (28), 求得质点平衡应力与 x 轴间夹角为

$$\alpha_x = \arctan \tau / \tau = \arctan 1 = 45^\circ,$$

这与纯剪切应力状态下质点的平衡应力公式 (17) 的结论完全相同。

6.2 式 (27) 满足简单拉伸应力状态下质点平衡

当 $\tau = 0$, $\sigma_y = 0$ 时, 为简单拉伸应力状态。由式 (28) 得到

$$\alpha_x = \arctan |\sigma_y / \sigma_x| = 0,$$

这表示简单拉伸。由式 (27) 可得质点平衡应力

$$\sigma'_a = \sigma'_x = \sigma_0,$$

即轴向质点平衡应力最大, 这与简单拉伸结论完全相同。

6.3 质点平衡应力下的组合变形

二向应力状态下, $\sigma_y = 0$ 时, 现代弹性理论认为是拉 - 剪组合或弯 - 扭组合, 见图 5。由式 (22) 有

$$\alpha_2 = \arctan |\sigma_y / \sigma_x| = \arctan 0 = 0,$$

式 (27) 成为

$$\sigma'_a = (\sigma_x^2 + 2\tau^2 + 2\sigma_x\tau)^{1/2} \quad (34)$$

则拉 - 剪组合的强度条件为:

$$\sigma'_a = (\sigma_x^2 + 2\tau^2 + 2\sigma_x\tau)^{1/2} \leq [\sigma] \quad (35)$$

式 (28) 成为

$$\alpha_x = \arctan (\tau / (\tau + \sigma_x)) \quad (36)$$

式 (35); 就是用质点平衡应力求出的拉 (弯) - 剪 (扭) 的组合变形强度公式。而现行弯 - 扭组合强度条件第三强度理论公式为

$$(\sigma^2 + 4\tau^2)^{1/2} \leq [\sigma] \quad (37)$$

第四强度理论为

$$(\sigma^2 + 3\tau^2)^{1/2} \leq [\sigma] \quad (38)$$

式中 $[\sigma]$ 为材料许用拉应力。式 (35)、式 (37) 和式 (38) 哪个正确, 可用实验来验证。

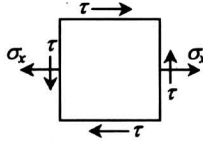


图 5 拉 (弯) - 剪 (扭) 组合应力状态

Fig.5 Combining stress condition of extension (bend) -shearing (torsion)

$$\alpha_2 = \arctan |\sigma_y / \sigma_x| = \arctan 0 = 0,$$

6.4 用主应力表示的质点平衡应力

设二向应力状态主应力为 σ_1 和 σ_3 , 而 $\tau = 0$, 把 $\sigma_x = \sigma_1$, $\sigma_y = \sigma_3$, 代入公式 (27) 可得用主应力表示的质点平衡应力

$$\sigma'_a = (\sigma_1^2 + \sigma_3^2)^{1/2} = \sigma_{a \max} \quad (39)$$

由于主应力是极值正应力, 因此式 (39) 也是质点平衡的极值应力。

用式 (28) 求 σ'_a 的方向为

$$\alpha_x = \arctan [(0 + (\sigma_1^2 + \sigma_3^2)^{1/2} \sin \arctan |\sigma_3 / \sigma_1|) / (0 + (\sigma_1^2 + \sigma_3^2)^{1/2} \cos \arctan |\sigma_3 / \sigma_1|)],$$

$$\alpha_x = \arctan |\sigma_3 / \sigma_1| \quad (40)$$

在纯剪切应力状态下 $|\sigma_1| = |\sigma_3| = \tau$, 由式 (39) 可得 $\sigma'_a = 2^{1/2} \tau$, 代入式 (40) 有 $\alpha_x = \arctan 1 = 45^\circ$, 再对比式 (17), 可见与前面分析的剪切质点平衡应力的结果完全相同。

7 三向应力状态下用主应力表示的质点平衡应力

设 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 为已求得 3 个主应力^[2], 则用主应力求质点平衡应力就很简单明了。单元体受三向主应力状态如图 6a 所示, 任一质点 a 受到的平衡应力为 3 个互相正交的主应力的合力, 如图 6b。以单元体 3 个边长, 分别表示 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 的大小

及方向, 则 a 点的合力 (平衡应力) 为对角线 ac_1 长度

$$\sigma'_a = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)^{1/2} \quad (41)$$

由于 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 为极值正应力, 因此质点平衡应力 σ'_a 也是极值应力。质点平衡力的方向为单元体对角线的方向。由式 (41) 可以导出单向和二向应力状态的质点平衡应力, 可以看出单元体的平衡为质点平衡奠定了基础。

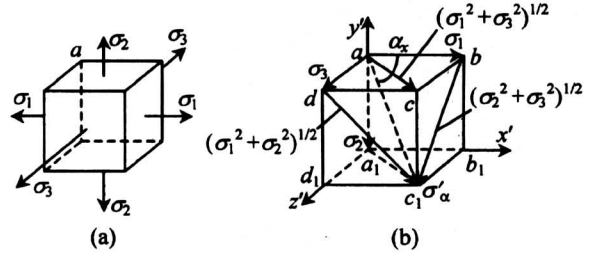


图 6 主应力表示的三向应力状态质点平衡应力

Fig.6 Balance stress of particles in three dimension combining stress condition showed by principle stress

σ'_a 与 x' 轴的夹角为直角三角形 Δabc_1 中的锐角 $\angle bac_1 = \alpha_x$, 则

$$\alpha_x = \arctan [(\sigma_2^2 + \sigma_3^2)^{1/2} / \sigma_1] \quad (42)$$

同理可求得, σ'_a 与 y' 轴及与 z' 轴夹角分别为

$$\alpha_y = \arctan [(\sigma_1^2 + \sigma_3^2)^{1/2} / \sigma_2] \quad (43)$$

$$\alpha_z = \arctan [(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^{1/2} / \sigma_3] \quad (44)$$

用质点平衡应力表示的三向应力状态的强度条件为

$$\sigma_d = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)^{1/2} \leq [\sigma] \quad (45)$$

材料力学给出第四强度理论相当应力公式^[1]为

$$\sigma_{xd} = [((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2) / 2]^{1/2} \leq [\sigma] \quad (46)$$

由式 (46) 可知, 当 $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ 时, 其相当应力 $\sigma_{xd} = 0$ 。这就是说, 根据第四强度理论, 一个正方体受 3 个互相垂直且相等拉应力作用时, 无论拉应力多大, 都不会受到破坏, 这是完全不符合实际的结论。而根据质点平衡应力式 (45), 说明每个质点受到的应力为 $3^{1/2} \sigma_1$ 。当此应力极限达到屈服极限 σ_s 时, 塑性材料就会断裂。即

$$3^{1/2} \sigma_1 = \sigma_s$$

$$\sigma_1 = 3^{-1/2} \sigma_s \approx 0.58 \sigma_s \quad (47)$$

式 (47) 说明材料受三向等值拉应力作用时, 只要单值拉应力达到材料屈服极限的 58 % 就会断裂。而不是无论多么大的拉应力, 材料都不会破坏。

而对于脆性材料:

$$\sigma_1 = 0.58\sigma^0 \quad (48)$$

式 (48) 说明脆性材料三向等值拉应力状态作用时, 只要单值拉应力达到材料强度极限的 58 % 就会断裂。而不是无论多大拉应力都不会破坏!

8 结语

质点平衡应力新概念的出现是弹性理论发展的必然结果。质点平衡应力是建筑在单元体平衡基础上的, 单元体平衡为质点平衡提供了条件, 这可由质点平衡应力的推导过程中明显看出。用质点平衡

应力理论建立起来的强度条件需要大量的实验验证, 此实验包括二向等应力拉伸破坏实验和三向等应力拉伸破坏实验。在研究材料受力的强度条件时, 需找出材料受到的最大应力质点。现行弹性理论是把质点上受到的最大主应力作为强度条件的依据; 而质点平衡应力理论却是要采用质点平衡应力来建立新的强度条件, 以保证其安全性, 并得出质点平衡应力比最大主应力还大的结论, 同时也找到了为什么在保证强度设计要求时仍然会出现强度破坏的原因。

参考文献

- [1] 刘鸿文. 材料力学[M]. 北京: 人民教育出版社, 1979. 25, 211, 213, 236
- [2] 黄炎. 工程弹性力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 1982. 14~18

The Balancing Stress in the Tilted Section of the Element Is Not the Stress for the Balance of the Particle on It

Han Wenba¹, Cai Bingqing², Liu Dabin³, Han Xiaodong⁴

(1. Yangzi Petrochemical Company Ltd., SINOPEC, Nanjing 210048, China;

2. Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China;

3. Nanjing University of Science & Technology, Nanjing 210094, China;

4. Shenzhen Daiyu Industrial Co., Ltd., Shenzhen, Guangdong 518036, China)

[Abstract] From the pure extension of the straight bar it can be seen that the balancing stress in the tilted section of the element can only ensure the balance of itself, but can't ensure the balance of particles on it. The difference between the balance of the element and that of particles on it is demonstrated. A conclusion is drawn that the balancing stress of particles under two dimension stress state is written as $\sigma'_\alpha = (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2\tau^2 + 2\tau(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)^{1/2}(\sin \alpha_2 + \cos \alpha_2))^{1/2}$, and the angle between the direction of the balance stress and x axis is written as $\alpha_x = \arctan(\tau + (\sigma_x^2 + \sigma_y^2)^{1/2} \sin \arctan(\sigma_y/\sigma_x)) / (\tau + (\sigma_x^2 + \sigma_y^2)^{1/2} \cos \arctan(\sigma_y/\sigma_x))$. Under two dimension stress state, the principal stress of element and the maximum balancing stress of particles both take place in the 45° diagonal plane, and the balancing stress of particles is $2^{1/2}$ times that of the principal stress. A new two dimension combining strength condition is derived as $\sigma'_\alpha = (\sigma^2 + 2\tau^2 + 2\sigma\tau)^{1/2} \leq [\sigma]$, and it will replace the formula of bend-torsion combining strength condition of third strength theory $(\sigma^2 + 4\tau^2)^{1/2} \leq [\sigma]$ and that of fourth strength theory $(\sigma^2 + 3\tau^2)^{1/2} \leq [\sigma]$. A new three dimension combining strength condition is derived as $\sigma'_d = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)^{1/2} \leq [\sigma]$ and can replace the wrong formula $\sigma_{xd} = [((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2)/2]^{1/2} \leq [\sigma]$, which is the corresponding strength formula of the fourth strength theory.

[Key words] stress; tilted section; balance stress of particle; strength theory