研究报告

螺旋管簧的可靠性优化设计

张义民[1]，贺向东[1]，闻邦椿[2]
（1. 吉林大学南岭校区力学系，长春　130025；2. 东北大学机械工程与自动化学院，沈阳　110006）

[摘要]　讨论了螺旋管簧的可靠性优化设计问题。在基本随机变量的概率特性已知的情况下，采用二阶矩法和可靠性优化设计方法对螺旋管簧进行了可靠性优化设计，通过计算机程序可以直接实现螺旋管簧的可靠性优化设计，迅速准确地得到螺旋管簧的可靠性优化设计信息。

[关键词]　螺旋管簧；可靠性；优化设计；二阶矩技术

[中图分类号] TH135.1　**[文献标识码]** A　**[文章编号]** 1009－1742（2002）05－0071－04

1　引言

近三十年来，在机械设计领域出现了不少现代设计方法。计算机辅助设计、优化设计和可靠性设计在理论上和方法上都达到了一定的水平，并在应用中取得了一定的经济效益。它们的出现，对整个机械设计学科和机械设计实践都产生了十分深刻的影响，使过去许多难以解决的设计课题获得了重大突破。它们正在引起机械设计领域的一场重大变革，并受到人们日益广泛的重视。但是单独进行可靠性设计或优化设计，都不可能发挥可靠性设计与优化设计的巨大潜力。这一方面是因为机械可靠性设计有时并不等于优化设计，例如一个零部件在经过可靠性设计后，并不能保证它的工作性能或参数一定具有最佳状态；另一方面是因为机械优化设计并不一定包含可靠性设计，例如一个零部件在没有考虑可靠性的状态下进行优化设计后，并不能保证它在规定的条件下和规定的时间内完成规定的功能，有时甚至发生故障和事故。对于由大量设计参数确定的机械零部件以及由大量元件构成的结构系统，要同时确定多个元件的设计参数和同一零部件的多个设计参数，单纯的可靠性设计方法显然无能为力。所以要使机械产品既保证具有可靠性要求，又保证具有最佳的工作性能和参数，就必须将可靠性设计和优化设计有机地结合起来，开展基于可靠性的优化设计研究，即机械可靠性优化设计。

机械零部件可靠性设计[1~10]，是运用概率统计理论给出机械零部件的某一设计参数。机械零部件可靠性优化设计是在可靠性基础上进行机械零部件的优化设计，即把机械零部件的可靠度要求，或者结合在优化问题的约束内，或者结合到优化问题的目标函数内，运用优化方法，得出机械零部件参数的最优解，以便最佳达到预先确定的目标，即在设计中应保证的机械产品的经济效益和运行中的安全可靠。严格地说，优化设计与可靠性设计所追求的目标是一致的，所以设计中必须综合考虑优化方法与可靠性工程，这就需要采用所谓的机械可靠性优化设计方法。

本文采用二阶矩法和可靠性优化设计方法讨论了螺旋管簧的可靠性优化设计问题。在基本随机变量的概率特性已知的情况下，可以迅速准确地得到螺旋管簧的可靠性优化设计信息。

[收稿日期]　2001－08－27；修回日期　2001－12－03

[基金项目]　国家自然科学基金资助项目（19990510，50175043），国家重点基础研究发展规划（973）资助项目（1998020320），教育部高等学校骨干教师资助计划资助项目，吉林省科技发展计划资助项目（19990501－01）

[作者简介]　张义民（1958－），男，吉林长春市人，吉林大学教授，博士生导师

2 二阶矩方法

可靠性设计的一个目标是计算可靠度

$$R = \int_{g(\boldsymbol{X})>0} f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{X})\mathrm{d}\boldsymbol{X}, \tag{1}$$

式中 $f_{\boldsymbol{X}}$ ($\boldsymbol{X}$) 为基本随机参数向量 $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)^{\mathrm{T}}$ 的联合概率密度，这些随机参数代表载荷、零部件的特性等随机量。$g(\boldsymbol{X})$为状态函数，可表示零部件的两种状态

$$\left.\begin{array}{ll} g(\boldsymbol{X}) \leqslant 0, & \text{为失败状态} \\ g(\boldsymbol{X}) > 0, & \text{为安全状态} \end{array}\right\}, \tag{2}$$

这里极限状态方程$g(\boldsymbol{X})=0$ 是一个 n 维曲面，称为极限状态面或失败面。

根据状态函数$g(\boldsymbol{X})$的定义和表达式，把状态函数 $g(\boldsymbol{X})$在随机变量向量 $\boldsymbol{X}$ 的均值$E(\boldsymbol{X})=\bar{\boldsymbol{X}}$ 处展开成n 阶 Taylor 级数

$$g(\boldsymbol{X}) = g(\bar{\boldsymbol{X}}) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} g_k (\boldsymbol{X} - \bar{\boldsymbol{X}})^{[k]} + R_{n+1}(\boldsymbol{X}, \bar{\boldsymbol{X}}, \tag{3}$$

式中$(\boldsymbol{X}-\bar{\boldsymbol{X}})^{[k]}=(\boldsymbol{X}-\bar{\boldsymbol{X}})\otimes(\boldsymbol{X}-\bar{\boldsymbol{X}})^{[k-1]}$为 k 阶 Kronecker 幂，符号$\otimes$为 Kronecker 积。

$$g_k = \left.\frac{\partial^k g}{\partial(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}})^k}\right|_{\boldsymbol{X}=\bar{\boldsymbol{X}}} \tag{4}$$

$$R_{n+1}(\boldsymbol{X}, \bar{\boldsymbol{X}}) = O\{(\boldsymbol{X}-\bar{\boldsymbol{X}})^{[n+1]}。 \tag{5}$$

根据工程实际需要和数学推导繁易，一般取状态函数 g ($\boldsymbol{X}$) 的二阶近似均值和一阶近似方差

$$\mu_g = \mathrm{E}[g(\boldsymbol{X})] = g(\bar{\boldsymbol{X}}) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g(\bar{\boldsymbol{X}})}{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}2}}\mathrm{Var}(\boldsymbol{X}), \tag{6}$$

$$\sigma_g^2 = \mathrm{Var}[g(\boldsymbol{X})] = \left[\frac{\partial G(\bar{\boldsymbol{X}})}{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}}\right]^{[2]}\mathrm{Var}(\boldsymbol{X}), \tag{7}$$

这里$\mathrm{E}[g(\boldsymbol{X})]$表示 $g(\boldsymbol{X})$的均值，$\mathrm{Var}[g(\boldsymbol{X})]$表示 $g(\boldsymbol{X})$的方差和协方差，$\mathrm{Var}(\boldsymbol{X})$为随机参数的方差矩阵，包含所有的方差和协方差。

可靠性指标定义为

$$\beta = \frac{\mu_g}{\sigma_g} = \frac{\mathrm{E}[g(\boldsymbol{X})]}{\sqrt{\mathrm{Var}[g(\boldsymbol{X})]}}, \tag{8}$$

这样一方面可以利用可靠性指标直接衡量零部件的可靠性，另一方面在基本随机参数向量 $\boldsymbol{X}$ 服从正态分布时，可以用失败点处状态表面的切平面近似地模拟极限状态表面，获得可靠度的一阶估计量

$$R = \Phi(\beta), \tag{9}$$

式中$\Phi(\cdot)$为标准正态分布函数。

3 螺旋管簧的可靠度

在工程上应用了一种称为螺旋管簧的新型弹簧，如图 1 所示。螺旋管簧是用圆管代替实心截面的弹簧，具有质量轻、速度快、自然频率高、内部可通水或通油冷却等优点，在轻型结构和承受高温的机器中开始大量使用。

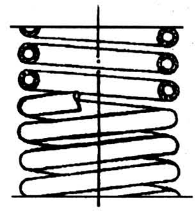

图 1 螺旋管簧

Fig.1 Coil tube-spring

螺旋管簧的最大应力发生在管簧内侧[11]：

$$S_{\max} = KS_{\mathrm{nom}}, \tag{10}$$

式中 K 为切应力因子，S_{nom}为管簧的名义切应力。

$$K = \frac{5}{4C} + \frac{7+3B^2}{8C^2}, \tag{11}$$

$$C = \frac{D}{d}, \tag{12}$$

$$B = \frac{d_1}{d}, \tag{13}$$

式中 C 为弹簧指数，B 为内外径之比，D 为簧圈中径，d 为管截面的外径，d_1 为管截面的内径。

$$S_{\mathrm{nom}} = \frac{8pD}{\pi d^3(1-B^4)}, \tag{14}$$

式中 p 为轴向载荷。

当变形因子等于 1 时，管簧的弹簧刚度为

$$\frac{p}{\delta} = \frac{Gd^4(1-B^4)}{8D^3 n}, \tag{15}$$

式中 δ 为管簧的轴向变形量，G 为材料的剪切模量，n 为管簧的工作圈数。

管簧的最大切应力为

$$S_{\max} = \left(\frac{5d}{4D} + \frac{7d^2+3d_1^2}{8D^2}\right)\frac{Gd}{\pi D^2 n}\delta, \tag{16}$$

这里忽略了载荷偏心和节距效应对最大切应力的影响。

根据二阶矩技术，以应力极限状态表示的状态方程为

$$g(\boldsymbol{X}) = r - S_{\max}, \tag{17}$$

式中 r 为管簧的材料强度。

基本随机变量向量 $\boldsymbol{X} = (r, d_1, d, D, G, n, \delta)^{\mathrm{T}}$,这里基本随机变量的均值 $\mathrm{E}(\boldsymbol{X})$和方差 $\mathrm{Var}(\boldsymbol{X})$是已知的,分别为

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{X}) = (\mu_r \mu_{d_1} \mu_d \mu_D \mu_G \mu_n \mu_\delta)^{\mathrm{T}}$$

$$\mathrm{Var}(\boldsymbol{X}) = (\sigma_r^2 0000000 \sigma_{d_1}^2 \rho\sigma_{d_1}\sigma_d 00000 \rho\sigma_{d_1}\sigma_d \sigma_d^2 0000\ 000\sigma_D^2 000\ 0000\sigma_G^2 00\ 00000\sigma_n^2 0\ 000000\sigma_\delta^2)^{\mathrm{T}}, \tag{18}$$

可以认为基本随机变量是服从正态分布的相互独立的随机变量，而管截面内外径是相关的随机变量，

相关系数为 ρ。管簧极限状态方程 $g(\boldsymbol{X})=0$ 是一个七维曲面，称为管簧极限状态表面或失效面。

把状态函数 $g(\boldsymbol{X})$ 对基本随机变量向量 $\boldsymbol{X}$ 求偏导数，有

$$\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}}=\left[\frac{\partial g}{\partial r}\ \frac{\partial g}{\partial d_1}\ \frac{\partial g}{\partial d}\ \frac{\partial g}{\partial D}\ \frac{\partial g}{\partial G}\ \frac{\partial g}{\partial n}\ \frac{\partial g}{\partial \delta}\right], \tag{19}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}2}}=\begin{bmatrix}
\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} & \frac{\partial^2 g}{\partial r\partial d_1} & \frac{\partial^2 g}{\partial r\partial d} & \frac{\partial^2 g}{\partial r\partial D} & \frac{\partial^2 g}{\partial r\partial G} & \frac{\partial^2 g}{\partial r\partial n} & \frac{\partial^2 g}{\partial r\partial \delta}\\
\frac{\partial^2 g}{\partial d_1\partial r} & \frac{\partial^2 g}{\partial d_1^2} & \frac{\partial^2 g}{\partial d_1\partial d} & \frac{\partial^2 g}{\partial d_1\partial D} & \frac{\partial^2 g}{\partial d_1\partial G} & \frac{\partial^2 g}{\partial d_1\partial n} & \frac{\partial^2 g}{\partial d_1\partial \delta}\\
\frac{\partial^2 g}{\partial d\partial r} & \frac{\partial^2 g}{\partial d\partial d_1} & \frac{\partial^2 g}{\partial d^2} & \frac{\partial^2 g}{\partial d\partial D} & \frac{\partial^2 g}{\partial d\partial G} & \frac{\partial^2 g}{\partial d\partial n} & \frac{\partial^2 g}{\partial d\partial \delta}\\
\frac{\partial^2 g}{\partial D\partial r} & \frac{\partial^2 g}{\partial D\partial d_1} & \frac{\partial^2 g}{\partial D\partial d} & \frac{\partial^2 g}{\partial D^2} & \frac{\partial^2 g}{\partial D\partial G} & \frac{\partial^2 g}{\partial D\partial n} & \frac{\partial^2 g}{\partial D\partial \delta}\\
\frac{\partial^2 g}{\partial G\partial r} & \frac{\partial^2 g}{\partial G\partial d_1} & \frac{\partial^2 g}{\partial G\partial d} & \frac{\partial^2 g}{\partial G\partial D} & \frac{\partial^2 g}{\partial G^2} & \frac{\partial^2 g}{\partial G\partial n} & \frac{\partial^2 g}{\partial G\partial \delta}\\
\frac{\partial^2 g}{\partial n\partial r} & \frac{\partial^2 g}{\partial n\partial d_1} & \frac{\partial^2 g}{\partial n\partial d} & \frac{\partial^2 g}{\partial n\partial D} & \frac{\partial^2 g}{\partial n\partial G} & \frac{\partial^2 g}{\partial n^2} & \frac{\partial^2 g}{\partial n\partial \delta}\\
\frac{\partial^2 g}{\partial \delta\partial r} & \frac{\partial^2 g}{\partial \delta\partial d_1} & \frac{\partial^2 g}{\partial \delta\partial d} & \frac{\partial^2 g}{\partial \delta\partial D} & \frac{\partial^2 g}{\partial \delta\partial G} & \frac{\partial^2 g}{\partial \delta\partial n} & \frac{\partial^2 g}{\partial \delta^2}
\end{bmatrix}。\tag{20}$$

把以上各式和已知条件代入状态函数的均值和方差的表达式，可以求出状态函数的均值和方差。然后再代入可靠性指标和可靠度的表达式，就可确定出螺旋管簧的可靠性指标和可靠度。

4　可靠性优化设计

在机械零部件可靠性优化问题中，一般包含三方面的内容：质量（重量）、成本和可靠度。据此，确定优化的目标函数和约束条件，给出目标函数和约束条件之后，能够用不同的方法实现机械零部件可靠性优化。现行的优化方法分为两类，即准则法和数学规划法。准则法是从所设计的问题中，找出一种具有物理意义的最优性准则的方法，这种方法的好处是能够处理很大数量的设计变量，收敛也快。但是，对于许多机械零部件可靠性优化的具体问题，往往找不到那种调优的物理准则，这时就要采用数学规划法。目前通用的机械零部件可靠性优化方法，多为数学规划法。

当设计要求为 $P\{g(\boldsymbol{X})\geqslant 0\}\geqslant R_0$　　(21)

时，有

$$\int_{-\infty}^{\beta_0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\theta^2/2}\mathrm{d}\theta=\int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(R_0)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\theta^2/2}\mathrm{d}\theta, \tag{22}$$

于是可得 $\beta_0=\bar{g}/\sigma_g\geqslant\Phi^{-1}(R_0)$，　　(23)

即　$\bar{g}-\Phi^{-1}(R_0)\sigma_g\geqslant 0$。　　(24)

给定约束应满足的概率值 R_0，即可由正态分布函数表查出相应的 $\Phi^{-1}(R_0)$ 值，而 $\mathrm{E}(g)=\bar{g}$ 和 σ_g 可由式（6）和式（7）求得。

概率优化设计模型就可以近似地转化为如下的确定型模型来求解，即

$$\left.\begin{aligned}&\min f(\boldsymbol{X})=\mathrm{E}\{f(\boldsymbol{X})\}=f(\bar{\boldsymbol{X}})\\&\text{s.t.}\quad \bar{g}-\Phi^{-1}(R_0)\,\sigma_g\geqslant 0\\&g_i(\boldsymbol{X})\geqslant 0,\ (i=1,\cdots,l)\\&h_j(\boldsymbol{X})=0,\ (j=1,\cdots,m)\end{aligned}\right\}。\tag{25}$$

机械零部件可靠性优化设计的基本思想是：要求结构或零部件在满足一定性能的条件下，使其可靠度达到最大；或者使结构或零部件达到最佳性能指标时，它的工作可靠度不低于某一规定水平。一般说来，后一种方法更为实用。

5　数值算例

1）一螺旋管簧的截面尺寸和材料特性的前两阶矩为 $(\mu_{d_1},\sigma_{d_1})=(5,\ 0.025)$ mm，$(\mu_d,\sigma_d)=(8,\ 0.04)$ mm，$(\mu_D,\sigma_D)=(35,\ 0.175)$ mm，$(\mu_G,\sigma_G)=(79380,\ 3969)$ MPa，$(\mu_n,\sigma_n)=(8,\ 0.0833)$ 圈，$\rho=0.7$。管簧的材料强度 r 取为管簧的疲劳极限，其数字特征为 $(\mu_r,\sigma_r)=(524,\ 46.33)$ MPa，管簧的变形量 δ 的均值和标准差为 $(\mu_\delta,\sigma_\delta)=(11.6,\ 0.2)$ mm，试确定该螺旋管簧的可靠性指标和可靠度。

根据给出的数据，求得螺旋管簧的体积 V，可靠性指标 β 和可靠度 R 为

$V=2.6944\times10^4,\beta=9.512262,R=1.000000$。

2）设所要求的可靠度 $R_0=0.9999$，试用可靠性优化方法设计此螺旋管簧的管截面内径 d_1，管截面外径 d，簧圈中径 D 和工作圈数 n。

首先，建立目标函数。要求螺旋管簧的质量最轻，即求体积 V 为最小

$$\min F(x)=\frac{\pi^2}{4}(x_2^2-x_1^2)x_3x_4,$$

取设计变量为 $\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,x_3,x_4]^{\mathrm{T}}=[d_1,d,D,n]^{\mathrm{T}}$。

第二、建立约束条件。

可靠性约束　$\bar{g}-\Phi^{-1}(R_0)\sigma_g\geqslant 0$；

管截面内径约束　$2\leqslant d_1\leqslant 10$ (mm)；

管截面外径约束　$2\leqslant d\leqslant 15$ (mm)；

管截面内外径关系约束　$0\leqslant d-d1\leqslant 5$ (mm)；

簧圈中径约束　$20\leqslant D\leqslant 60$ (mm)；

旋绕比约束　$3\leqslant c\leqslant 10$；

工作圈数约束 $5 \leqslant n \leqslant 15$；

不并圈约束 $H_0 - \delta_{\max} \geqslant H_b$

式中 H_0 为管簧自由高度，当支承圈数为2且管簧两端磨平时，$H_0 = nt + 1.5d$；t 为节距，$t \approx (0.28 \sim 0.5)\ D$，计算时取 $t = 0.4D$；$\delta_{\max}$为管簧在最大工作载荷 $F_{\max}$ 下的变形量，$\delta_{\max} = \dfrac{8F_{\max}D^3 n}{Gd^4}$；$H_b$ 为管簧并紧高度，当支承圈数为2且管簧两端磨平时，$H_b \approx (n+1.5)\ d$。

稳定性约束 $b = \dfrac{H_0}{D} = \dfrac{nt + 1.5d}{D} =$

$$0.5n + 1.5\left(\frac{d}{D}\right) \leqslant b_c,$$

式中 b_c 为临界高径比，当两端固定时 $b_c = 5.3$。

局部稳定性约束 局部稳定性约束条件是出现扭剪皱缩时的名义剪应力 S_c 应大于最大切应力 $S_{\max}$

$$S_c = 0.751\frac{E}{K}\left(\frac{e}{d}\right)^{3/2} \geqslant S_{\max},$$

这里 E 为弹性模量，$E = 210 \times 10^3$ MPa，e 为管壁厚度。

共振约束 根据管簧不发生共振的要求，管簧的自振频率 f 应远离其载荷的变化频率f_r(Hz)，它们之间的关系为

$$f = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{d}{2\pi nD^2}\sqrt{\frac{Gg}{2\gamma}(1 + B^2)} \geqslant 10f_r,$$

式中 k 为管簧刚度，$k = \dfrac{Gd^4(1 - B^4)}{8D^3 n}$；$m$ 为管簧工作部分的质量；γ 为管簧材料的密度，$\gamma = 7.4872 \times 10^{-5}\ \mathrm{N/mm^3}$，这里取工作频率 $f_r = 34.7$ (Hz)。

第三、优化求解。选用约束随机方向法进行优化设计，选取初值为 $d_1 = 5$ (mm)，$d = 8$ (mm)，$D = 35$ (mm)，$n = 8$，对管状弹簧进行可靠性优化设计，根据给出的数据，求得管状弹簧尺寸为

$$V = 4.964 \times 10^3 (\mathrm{mm^3}),\ d_1 = 2.00\ (\mathrm{mm}),$$
$$d = 4.13\ (\mathrm{mm}), D = 30.97\ (\mathrm{mm}),\ n = 5。$$

6 结论

本文阐述的方法很好地解决了螺旋管簧的可靠性优化设计问题。应用本文方法对机械零部件进行可靠性优化设计可提高设计水平，节省材料，降低成本。由此可见，本文方法是对机械行业产品进行可靠性优化设计的通用的、实用的和有效的方法。

参考文献

[1] 徐 灏.机械强度可靠性设计[M].北京:机械工业出版社,1984.

[2] 何国伟.可靠性设计[M].北京:机械工业出版社,1993

[3] 牟致忠.可靠性设计[M].北京:机械工业出版社,1993

[4] 凌树森.可靠性在机械强度设计和寿命估计中的应用[M].北京:宇航出版社,1986

[5] 陈健元.机械可靠性设计[M].北京:机械工业出版社,1988

[6] 卢玉明.机械零件的可靠性设计[M].北京:高等教育出版社,1989

[7] 孟宪铎.机械可靠性设计[M].北京:冶金工业出版社,1992

[8] 刘善维.机械零件的可靠性优化设计[M].北京:中国科学技术出版社,1993

[9] 张义民.汽车零部件可靠性设计[M].北京:北京理工大学出版社, 2000

[10] 张义民，王云成，林 逸.螺旋管簧的可靠性分析[J].中国机械工程，1995, 6(6): 63～64

[11] 黄 钟，程 源，范德顺，等.实用应力分析[M].北京:中国石化出版社，1993

Reliability Optimization Design for Coil Tube-spring

Zhang Yimin[1], He Xiangdong[1], Wen Bangchun[2]

(1. *Department of Mechanics, Nanling Campus, Jilin University, Changchun* 130025, *China*;
2. *School of Mechanical Engineering and Automation, Northeastern University, Shenyang* 110006, *China*)

[**Abstract**] Techniques from the second moment method and reliability optimization design method are employed to present the practical and effective method for the reliability optimization design for coil tube-spring on the condition of known probabilistic characteristics of basic random variables. The respective program can be used to obtain the reliability optimization design information of coil tube-spring accurately and quickly.

[**Key words**] coil tube-spring; reliability; optimization design; second moment method