学术论文

一类灰色模糊决策问题的熵权分析方法

罗　党，刘思峰
（南京航空航天大学经济管理学院，南京　210016）

[摘要]　以灰色系统理论和模糊数学为基础，探讨了不确定型决策问题的特性，分析了一些相关成果中所给方法在直接处理灰色模糊数方面的优势与不足。运用优化理论和熵极大化准则，建立了基于灰色模糊关系的多属性群体决策方法，分别对属性权重向量已知和未知两种情况给出了简便实用的算法，通过算例说明了算法的合理性。

[关键词]　灰色模糊关系；熵；多属性决策
[中图分类号] C934　[文献标识码] A　[文章编号] 1009-1742（2004）10-0048-04

1　引言

不确定型决策问题在社会、经济、环境和管理等各个领域中普遍存在，并且是一项复杂的系统工程，由于人的参与使相关数据与信息系统中的不确定性更加显著，不确定性通常分为2类，一个是所谓“主观”不确定性，即人的思维模糊性，另一个是信息不完全、不充分所造成的客观不确定性，即灰性。在一个信息不完全的问题中，往往存在许多模糊的因素，或具有模糊因素的一个问题不具备完全充分的数据与信息，即在一个不确定型决策问题中既存在模糊性，又具有灰性。灰色是量的概念，模糊是质的范畴。因此用灰色模糊概念来探讨不确定型多属性决策问题，能够更好地构建具有柔性的决策模型，且使决策结果更加接近实际。对于可靠性要求较高的较复杂的系统，通常邀请多位专家共同做出判断，由于各自的经历、地位、知识水平、个人偏好等方面的差异，个人对同一具体问题的判断（或决策）结果既具有灰色模糊性，又不尽相同。许多学者对此进行了研究，取得了一些相关的成果[1~6]。文献[1]对灰色模糊数进行排序，是先将其转化为三参数区间数，进而对区间数进行排序。由文献[2]知，这样做是合理的，但文献[1]中给出的比较区间数的可能性“公式(8)”仅限于 $a^u \geqslant b^u$ 时 $p(\tilde{a} \geqslant \tilde{b})$ 的计算，其中 $\tilde{a} = [a^l, a^*, a^u]$，$\tilde{b} = [b^l, b^*, b^u]$，当 $a^u < b^u$ 时，如何计算 $p(\tilde{a} \geqslant \tilde{b})$? 文献[1]中没有给出，所举算例也只是特殊情况。文献[3]利用文献[4]给出的比较三角模糊数的可能度公式构造了三角模糊互补判断矩阵及排序方法。文献[4]给出的定义

$$v(\tilde{p}_1 \geqslant \tilde{p}_2) = \begin{cases} \dfrac{l_1 - u_1}{(m_2 - u_2) - (m_1 - l_1)} & m_1 < m_2 \\ 1 & m_1 \geqslant m_2 \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\tilde{p}_1 = (l_1, m_1, u_1)$，$\tilde{p}_2 = (l_2, m_2, u_2)$，式(1)称为 $\tilde{p}_1 \geqslant \tilde{p}_2$ 的可能度。对 $n+1$ 个三角模糊数 $\tilde{p}, \tilde{p}_1, \cdots, \tilde{p}_n$，定义 $\tilde{p} \geqslant \tilde{p}_1, \cdots, \tilde{p}_n$ 的可能度为

$$v(\tilde{p} \geqslant \tilde{p}_1, \cdots, \tilde{p}_n) = \min\{v(\tilde{p} \geqslant \tilde{p}_1), v(\tilde{p} \geqslant \tilde{p}_2), \cdots, v(\tilde{p} \geqslant \tilde{p}_n)\} \tag{2}$$

由式(1)易知，对 $\forall \tilde{p}_1, \tilde{p}_2$，当 $m_1 < m_2$ 时，

[收稿日期]　2003-11-11；修回日期　2004-01-31
[基金项目]　国家自然科学基金资助项目（10071074）；教育部博士学科点科研基金资助项目（20020287001）；河南省教育厅科研基金资助项目（2003120012）
[作者简介]　罗　党（1959-），男，河南汝南县人，华北水利水电学院副教授，南京航空航天大学博士生

$v(\tilde{p}_1 \geqslant \tilde{p}_2) = 1 + (m_2 - m_1)/[(m_1 - l_1) + (u_2 - m_2)] > 1$；当 $m_1 \geqslant m_2$ 时，$v(\tilde{p}_1 \geqslant \tilde{p}_2) = 1$。其定义不甚合理，尤其是，当 m_1，m_2 分别为 $\tilde{p}_1$，$\tilde{p}_2$ 的中间点时更为明显。式（2）对较大的 n 会使很多有用的信息丢失。

另一方面，若将灰色模糊数转化为 3 参数区间数，再用文献［5］中给出的比较区间数的可能度公式，计算可能度矩阵，进而计算其排序向量对灰色模糊数进行排序，其不妥之处在于，这些等价的可能度公式的一个重要的特性是：$p(\tilde{a} \geqslant \tilde{b}) \geqslant 1/2$ 当且仅当 $a^u + a^l \geqslant b^u + b^l$，且 $p(\tilde{a} \geqslant \tilde{b}) = 1/2$ 当且仅当 $a^u + a^l = b^u + b^l$。注意到 $a^* = (a^u + a^l)/2$，$b^* = (b^u + b^l)/2$ 恰为 2 区间数的中点，由灰色模糊数对应的 3 参数区间数的特点可知，直接利用已有的处理 3 参数区间数方法进行灰色模糊数的比较，不能客观地反应隶属度的灰性。笔者在上述文献的基础上，运用优化理论和熵的极大化准则，对灰色模糊多属性群体决策问题进行了探讨，分别给出了属性权重已知与属性权重未知的灰色模糊群体决策算法。给出的算例说明了算法的合理性。

2　决策算法

设 X，U，D 分别为方案集、属性集和决策者集。决策者 $d_k \in D$ 给出方案 $x_i \in X$ 在属性 $u_j \in U$ 下的属性值是灰色模糊数 $(\mu_{ij}^{(k)}, \nu_{ij}^{(k)})$，$i = 1, 2, \cdots, m$，$j = 1, 2, \cdots, n$。对于给定的决策者 d_k，对应一个方案集 X 与属性集 U 之间的灰色模糊关系 $\tilde{R}^{(k)}$，使得对于任意方案 x_i 与属性 u_j 对模糊关系 $\tilde{R}^{(k)}$ 的隶属度 $\mu_R^{(k)}(x_i, u_j) \triangleq \mu_{ij}^{(k)}$，有点灰度 $\nu_R^{(k)}(x_i, u_j) \triangleq \nu_{ij}^{(k)}$，记为 $(\mu_{ij}^{(k)}, \mu_{ij}^{(k)})$。则由决策者 d_k 决定的灰色模糊关系 $\tilde{R}(k)$，用灰色模糊关系矩阵表示为

$$\tilde{\boldsymbol{R}}^{(k)} = ((\mu_{ij}^{(k)}, \mu_{ij}^{(k)}))_{m \times n}, (k = 1, 2, \cdots, l) \tag{3}$$

设决策者的灰色模糊权重向量为

$$\bar{\lambda} = ((\lambda_1, \pi_1), (\lambda_2, \pi_2), \cdots, (\lambda_l, \pi_l)) \tag{4}$$

其中 $\lambda_k \geqslant 0$，$\sum_{k=1}^{l} \lambda_k = 1$；$0 \leqslant \pi_k \leqslant 1$，$k = 1, 2, \cdots, l$，则决策群体对应的灰色模糊关系矩阵为

$$\tilde{\boldsymbol{R}} = ((\mu_{ij}, \nu_{ij}))_{m \times n} \tag{5}$$

其中，$\mu_{ij} = \sum_{k=1}^{l} \lambda_k \mu_{ij}^{(k)}, \nu_{ij} = \left[\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{l}(\pi_k + \nu_{ij}^{(k)})\right] \wedge 1, (i = 1, 2, \cdots, m, j = 1, 2, \cdots, n)$。

2.1　属性权重向量已知的灰色模糊群体决策方法

设已知各属性的权重及相应的点灰度构成权重向量为

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = ((\alpha_1, \nu_1), (\alpha_2, \nu_2), \cdots, (\alpha_n, \nu_n)) \tag{6}$$

集结各方案的综合属性值，即计算

$$\tilde{\boldsymbol{B}} = \tilde{\boldsymbol{R}}\tilde{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}} = ((\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{\nu}_{b_i}))_{m \times 1} \tag{7}$$

其中 $b_i = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu_{ij}, \nu_{b_i} = \left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(\nu_j + \nu_{ij})\right] \wedge 1, i = 1, 2, \cdots, m$。$a_j > 0, \sum_{j=1}^{n} a_j = 1, 0 \leqslant \nu_j \leqslant 1, j = 1, 2, \cdots, n$。

$\tilde{\boldsymbol{B}}$ 的排序向量 $\beta = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m)$ 定义为

$$\beta_i = P((b_i, \nu_{b_i})) = \alpha b_i + (1 - \alpha)(1 - \nu_{b_i}), \quad i = 1, 2, \cdots, m \tag{8}$$

其中 α 为平衡系数（$0 < \alpha < 1$）。式（8）的意义是 β_i 的取值体现了第 i 方案的综合隶属度越大越好，而其综合点灰度越小越好。平衡系数 α 可根据实际问题预先给出，或由下述方法确定：

求解优化问题

$$\max G(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{m}[x_1 b_i + x_2(1 - \nu_{b_i})] - \sum_{i=1}^{2} x_i \ln x_i,$$
$$\text{s.t. } x_1 + x_2 = 1, x_1 > 0, x_2 > 0 \tag{9}$$

其中目标函数的第一项表示 x_1，x_2 的选取，应使各备选方案的综合属性值的隶属度最大，且点灰度又尽可能小，第二项表示要尽可能地消除 x_1，x_2 选取的随机不确定性。最优化问题式（9）的唯一解是

$$x_1 = \exp\left[\sum_{i=1}^{m}(b_i + \nu_{b_i} - 1)\right] \Big/ \left[1 + \exp\left[\sum_{i=1}^{m}(b_i + \nu_{b_i} - 1)\right]\right],$$
$$x_2 = 1 \Big/ \left[1 + \exp\left[\sum_{i=1}^{m}(b_i + \nu_{b_i} - 1)\right]\right] \tag{10}$$

事实上，求函数

$$F(x_1, x_2, \lambda) = \sum_{i=1}^{m}[x_1 b_i + x_2(1 - \nu_{b_i})] - \sum_{i=1}^{2} x_i \ln x_i + \lambda(1 - x_1 - x_2)$$

的极值点即得式（10）。

综上所述，在属性权重向量已知的情况下可给出一种实用的决策方法，其步骤如下：

Step 1　对给定的决策者 $d_k \in D$，建立由 d_k 决定的灰色模糊关系矩阵式（3）；

Step 2 根据已知的决策者权重向量式（4），计算决策群体对应的灰色模糊关系矩阵式（5）；

Step 3 根据已知的属性权重向量式（6），集结各方案的综合灰色模糊属性值，即算式（7）；

Step 4 按公式（8）计算式（7）的排序向量 $\boldsymbol{\beta}=(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m)$；

Step 5 按分量 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 的大小，由大到小对相应方案进行排序，其中最大分量对应的方案为最优方案。

2.2 属性权重向量未知的灰色模糊群体决策方法

设有灰色模糊数 $p_1=(\mu_1, \nu_1), p_2=(\mu_2, \nu_2)$，则称 $d(p_1, p_2)=|\mu_1-\mu_2|+|\nu_1-\nu_2|$ 为灰色模糊数 p_1，p_2 的相离度。

记群体灰色模糊关系矩阵式（5）中元素 $(\mu_{ij}, \nu_{ij})=r_{ij}$，$(i=1, 2, \cdots, m, j=1, 2, \cdots, n)$，假设属性权重向量为 $\boldsymbol{w}=(w_1, w_2, \cdots, w_n)$，则由文献［6］知，$\boldsymbol{w}$ 应使总偏差函数 $D(\boldsymbol{w})=\sum_{j=1}^{n} D_j(\boldsymbol{w})=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} d(r_{ij}, r_{kj})w_j$ 取最大值。同时由信息熵的物理意义知，$H(\boldsymbol{w})=-\sum_{j=1}^{n} w_j \ln w_j$ 取最大值时，$\boldsymbol{w}=(w_1, w_2, \cdots, w_n)$ 的随机不确定性最小。因此，属性的权重应是最优化问题

$$\max G(\boldsymbol{w})=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} d(r_{ij}, r_{kj})w_j-\sum_{j=1}^{n} w_j \ln w_j,$$

$$\text{s.t.} \sum_{j=1}^{n} w_j=1, w_j \geqslant 0, j=1, 2, \cdots, n \tag{11}$$

的解。由拉格朗日乘数法可得式（11）的唯一解为

$$w_j=\exp\Big[\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} d(r_{ij}, r_{kj})\Big]\Big/\Big[\sum_{j=1}^{n}\exp\Big[\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} d(r_{ij}, r_{kj})\Big]\Big], j=1, 2, \cdots, n \tag{12}$$

若记属性权重向量

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}=((w_1, 0), (w_2, 0), \cdots, (w_n, 0)) \tag{13}$$

则由式（12）和式（5）可计算各方案的综合灰色模糊属性值，即计算式（7）。

综上所述，在属性权重向量未知情况下可给出一种实用的决策算法：

Step 1, Step 2 这两步与属性权重向量已知的情况相同；

Step 3 依据式（5）和式（12）计算属性权重向量式（13）；

Step 4 利用式（13），集结各方案的综合灰色模糊属性值，即计算式（7），此时

$$b_i=\sum_{j=1}^{n} w_j\mu_{ij}, \nu_{b_i}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\nu_{ij}, i=1, 2, \cdots, m;$$

Step 5, Step 6 这两步与属性权重已知时决策算法中的 Step 4, Step 5 两步相同。

3 算法分析

对属性权重向量未知的情况，算例如下：

某系年终分配一名校级优秀教师名额，现有4名候选人。学校首先统一制定了6项评估指标：思想品德（u_1）、文化素质（u_2）、本职工作完成情况（u_3）、教书育人（u_4）、科研能力（u_5）、身心素质（u_6）。现有3位评估者 d_k（$k=1, 2, 3$），其权重向量 $\bar{\lambda}=((0.4, 0.2), (0.3, 0.5), \cdots, (0.3, 0.5))$，根据上述6项指标对该系的4名候选人 x_i（$i=1, 2, 3, 4$）的评估结果如表1至表3所示，试确定优秀教师人选。

表1 评估者 d_1 给出的灰色模糊关系矩阵

Table 1 Grey fuzzy relational matrix given by expert d_1

	x_1	x_2	x_3	x_4
u_1	(0.9, 0.3)	(0.8, 0.3)	(0.6, 0.3)	(0.8, 0.3)
u_2	(0.6, 0.1)	(0.9, 0.1)	(0.8, 0.1)	(0.6, 0.1)
u_3	(0.9, 0)	(0.5, 0)	(0.9, 0)	(0.4, 0)
u_4	(0.8, 0.3)	(0.8, 0.3)	(0.9, 0.3)	(0.5, 0.3)
u_5	(0.6, 0.1)	(0.9, 0.1)	(0.9, 0.1)	(0.9, 0.1)
u_6	(0.5, 0.2)	(0.6, 0.2)	(0.5, 0.2)	(0.5, 0.2)

表2 评估者 d_2 给出的灰色模糊关系矩阵

Table 2 Grey fuzzy relational matrix given by expert d_2

	x_1	x_2	x_3	x_4
u_1	(0.8, 0.4)	(0.5, 0.4)	(0.5, 0.4)	(0.5, 0.4)
u_2	(0.4, 0.2)	(0.6, 0.2)	(0.4, 0.2)	(0.5, 0.2)
u_3	(0.8, 0.1)	(0.4, 0.1)	(0.9, 0.1)	(0.5, 0.1)
u_4	(0.9, 0.3)	(0.8, 0.3)	(0.8, 0.3)	(0.8, 0.3)
u_5	(0.6, 0.1)	(0.9, 0.1)	(0.9, 0.1)	(0.6, 0.1)
u_6	(0.4, 0.3)	(0.4, 0.3)	(0.8, 0.3)	(0.5, 0.3)

利用评估者权重集及公式（5）计算群体评估灰色模糊关系矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{R}}$ 见表4

利用表4及式(12)计算指标(属性)权重向量为

$\boldsymbol{w}=(w_1, w_2, \cdots, w_6)=(0.091,$

表 3　评估者 d_3 给出的灰色模糊关系矩阵

Table 3　Grey fuzzy relational matrix given by expert d_3

	x_1	x_2	x_3	x_4
u_1	(0.8, 0.3)	(0.5, 0.3)	(0.8, 0.3)	(0.5, 0.3)
u_2	(0.5, 0.1)	(0.6, 0.1)	(0.9, 0.1)	(0.5, 0.1)
u_3	(0.8, 0.1)	(0.5, 0.1)	(0.6, 0.1)	(0.4, 0.1)
u_4	(0.8, 0.3)	(0.4, 0.3)	(0.8, 0.3)	(0.8, 0.3)
u_5	(0.9, 0.1)	(0.6, 0.1)	(0.9, 0.1)	(0.5, 0.1)
u_6	(0.5, 0.2)	(0.6, 0.2)	(0.6, 0.2)	(0.4, 0.2)

表 4　群体评估者灰色模糊关系矩阵

Table 4　Grey fuzzy relational matrix given by the group

	x_1	x_2	x_3	x_4
u_1	(0.84, 0.73)	(0.62, 0.73)	(0.63, 0.73)	(0.62, 0.73)
u_2	(0.51, 0.53)	(0.72, 0.53)	(0.71, 0.53)	(0.54, 0.53)
u_3	(0.84, 0.47)	(0.47, 0.47)	(0.81, 0.47)	(0.43, 0.47)
u_4	(0.83, 0.70)	(0.68, 0.70)	(0.84, 0.70)	(0.68, 0.70)
u_5	(0.69, 0.5)	(0.81, 0.5)	(0.9, 0.5)	(0.69, 0.5)
u_6	(0.47, 0.63)	(0.54, 0.63)	(0.62, 0.63)	(0.47, 0.63)

0.112, 0.543, 0.083, 0.105, 0.066)。

由式（7）及式（13）集结各候选人的综合评估值得

$$\widetilde{\boldsymbol{R}} = ((0.762, 0.593),(0.582, 0.593),(0.782, 0.593),(0.501, 0.593)),$$

由式（10）得 $\alpha = 0.73$。

再由式（8）计算各候选人的排序向量得

$$\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = (0.666, 0.535, 0.681, 0.476),$$

故 $x_3 > x_1 > x_2 > x_4$ 即候选人 x_3 当选为优秀教师。

4　结语

以灰色系统理论[7]和灰色模糊集合[8]为基础，探讨了不确定型决策问题的特征，分析了一些相关成果中所给出的方法在直接处理灰色模糊数方面的优势和不足。运用优化理论和熵的极大化准则，建立了基于灰色模糊关系的多属性群体决策方法，分别对属性权重向量已知与未知的 2 种情况，给出了简便实用的算法，通过算例说明了算法的合理性。笔者提出的算法中将隶属度和灰度融合于决策过程，使决策方法更接近实际，适用范围更加广泛。

参考文献

[1]　卜广志，张宇文．基于灰色模糊关系的灰色模糊综合评判［J］．系统工程理论与实践，2002，22(4)：141～144

[2]　何大义，邱菀华．运用熵极大化准则求解连续型不确定性决策问题［J］．系统工程理论与实践，2002，22(9)：97～100

[3]　姜艳萍，樊治平．三角模糊数互补判断矩阵排序的一种实用方法［J］．系统工程，2002，20(2)：89～92

[4]　Chang D Y. Applications of the extent analysis method on fuzzy AHP [J]. European Journal of Operational Research，1996，95：649～655

[5]　徐泽水，达庆利．区间数排序的可能度法及其应用［J］．系统工程学报，2003，18(1)：67～70

[6]　徐泽水．求解不确定型多属性决策问题的一种新方法［J］．系统工程学报，2002，17(2)：177～181

[7]　Liu Sifeng，Liu Yi. An Introduction to Grey Systems: Foundations，Methodologies and Applications [M]. Slippery Rock，IIGSS Academic Publisher，1998

[8]　陈大为．灰色模糊集合引论［M］．哈尔滨：黑龙江科学出版社，1994

Analytic Method to a Kind of Grey Fuzzy Decision Making Based on Entropy

Luo Dang，Liu Sifeng

(*School of Economics and Management*，*Nanjing University of Aeronautics and Astronautics*，*Nanjing*　210016，*China*)

[**Abstract**]　Based on grey system theory and fuzzy theory，uncertain decision making problems and several relative articles were studied，then points out the advantage and shortage of them when dealing with grey fuzzy set were pointed out. In this paper，using optimization theory and the maximum entropy formulism，a method for multi-attribute group decision making based on the theory of grey fuzzy relation is established. Furthermore，two practical algorithms are given，in which attribute weights are known or unknown respectively. Finally，an example demonstrates the validity of this method.

[**Key words**]　grey fuzzy relation；entropy；multi-attribute decision making