

工程结构可靠性分析的高阶矩法研究

官凤强, 李夕兵, 邓建

(中南大学资源与安全工程学院, 长沙 410083)

[摘要] 提出了工程结构可靠性分析的高阶矩方法。主要是基于数值逼近原理, 以切比雪夫正交函数族 $\{T_k(x)\}$ 做基, 利用功能函数的高阶矩信息, 通过计算功能函数概率密度函数的逼近表达式, 然后根据工程结构可靠性的一般表达式来计算结构的失效概率, 进行可靠性分析。通过经典分布函数的数值检验和结构构件失效概率的计算结果比较, 表明了该方法在理论上的正确性和工程中的实用性。

[关键词] 结构可靠性; 高阶矩; 切比雪夫多项式; 失效概率

[中图分类号] O159; TU923 **[文献标识码]** A **[文章编号]** 1009-1742(2006)05-0069-05

1 引言

在工程结构的可靠性分析中, 一次二阶矩法(包括中心点法、JC法、映射变换法和实用分析法)以及二次二阶矩法得到了广泛应用^[1,2]。一次(二次)二阶矩法主要利用随机变量的均值和方差信息以及分布概型来计算结构的失效概率, 属于低阶矩法。使用低阶矩法的前提是: 采用的随机变量的分布概型是正确的, 随机变量的有关统计参数是准确的。然而, 在实际工程中, 获得的样本数量往往很小, 在一定的置信度下, 2个或者几个不同的分布概型都有可能被接受, 随机变量的统计参数可能与真实值差别较大。此外, 目前采用的随机变量分布概型几乎都是理想的数学模型, 现实中的问题由于受多种因素影响可能并不严格符合理想的数学模型, 而是服从某种未知的分布或几种分布组合而成的分布^[3,4]。为了全面反映和利用随机变量的统计信息, 利用随机变量的高阶矩对工程结构进行可靠性分析是一条新思路^[5]。四阶矩分析法用到了随机变量的前四阶矩信息, 对结构功能函数非线性程度不高的结构可靠性分析问题, 比较适用^[6]。以 $\{1, x, \dots, x^n\}$ 为基的多项式逼近法在多项式的阶数

不是很高的情况下, 可以较好地逼近功能函数的概率密度函数^[4]。当阶数较高时容易产生龙格现象, 计算结构失效概率时误差较大。因此, 在实际工程中, 如何利用已有的统计信息, 对结构的失效做出符合实际情况的概率测度, 在结构可靠性研究中很有必要。作者基于数值逼近原理, 充分考虑随机变量的高阶矩信息, 利用切比雪夫正交多项式来逼近计算功能函数的概率密度函数, 进而可以利用数值积分计算结构的可靠度, 并给出了计算实例。

2 随机变量概率密度函数的正交多项式逼近

根据工程结构可靠度的定义^[1,2], 结构功能函数可以用 $Z = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ 表示, X_1, X_2, \dots, X_n 表示结构的基本随机变量。假定结构的抗力随机变量为 R 和荷载效应随机变量为 S 是两个独立的连续随机变量, 其相应的概率密度函数为 $f_R(r), f_S(s)$, 则结构的失效概率 p_f 为:

$$p_f = P(Z < 0) = \iint_{Z < 0} f_R(r) f_S(s) dr ds \quad (1)$$

在实际问题中, 有时功能函数是非线性的, 比较复杂, 对 $f_R(r)$ 或 $f_S(s)$ 积分难以得到显式表达

[收稿日期] 2005-01-07

[基金项目] 国家“九七三”计划资助项目(2002CB412703); 国家自然科学基金资助项目(50490274, 50404010)

[作者简介] 官凤强(1979-), 男, 山东临朐县人, 中南大学资源与安全工程学院研究生

式,因此直接通过数值积分计算结构的失效概率,在实际工程中难以实现。正交多项式逼近法是采用正交函数族做基,利用功能函数的高阶矩信息,通过计算得到功能函数概率密度函数的近似表达式,进而可以利用数值积分计算结构的失效概率。其具体推导过程如下:

设 $f(x), g(x)$ 是闭区间 $[a, b]$ 上关于 x 的连续函数, $\eta(x)$ 是 $[a, b]$ 上的权函数,积分

$$(f(x), g(x)) = \int_a^b \eta(x) f(x) g(x) dx \quad (2)$$

称为函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上的内积。满足内积定义的函数空间 $C[a, b]$ 称为内积空间。并且在 $C[a, b]$ 上首项系数 $a_n \neq 0$ 的 n 次多项式满足

$$\int_a^b \omega(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ A_k > 0, & i = j \end{cases} \quad (i, j = 0, 1, \dots) \quad (3)$$

称 $\{\varphi_n(x)\}$ 是 $C[a, b]$ 上带权 $\omega(x)$ 的正交多项式^[7]。设 $f(x) \in C[a, b], \varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ 为空间 $C[a, b]$ 中的一个线性无关系, $a_0, a_1, \dots,$

a_n 为任意实数,则 $S(x) = \sum_{i=0}^n \omega(x) a_i \varphi_i(x)$ 是 $C[a, b]$ 中是的一个子集。根据函数最佳平方逼近原理^[7],存在最佳平方逼近函数 $S^*(x)$,使得

$$\|f(x) - S^*\|_2^2 = \inf_{S \in C} \|f(x) - S\|_2^2 = \inf_{S \in C} \int_a^b \eta(x) [S(x) - f(x)]^2 dx \quad (4)$$

即求 $I = \int_a^b \eta(x) \left[\sum_{i=0}^n \omega(x) a_i \varphi_i(x) - f(x) \right]^2 dx$ 的最小值。

由于 $\{\varphi_i(x)\}$ 为 $C[a, b]$ 上的一个无关系,利用多元函数求极值的方法,可得方程:

$$\frac{\partial I}{\partial a_k} = 2 \int_a^b \eta(x) \left[\sum_{i=0}^n \omega(x) a_i \varphi_i(x) - f(x) \right] \cdot \varphi_k(x) dx = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

即

$$\int_a^b \left[\sum_{i=0}^n \omega(x) a_i \varphi_i(x) \right] \varphi_k(x) dx = \int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n) \quad (5)$$

系数 a_i 满足方程组

$$\left. \begin{aligned} \omega(\varphi_0, \varphi_0) a_0 + \omega(\varphi_0, \varphi_1) a_1 + \dots + \omega(\varphi_0, \varphi_n) a_n &= (\varphi_0, f) \\ \omega(\varphi_1, \varphi_0) a_0 + \omega(\varphi_1, \varphi_1) a_1 + \dots + \omega(\varphi_1, \varphi_n) a_n &= (\varphi_1, f) \\ \dots\dots\dots \\ \omega(\varphi_n, \varphi_0) a_0 + \omega(\varphi_n, \varphi_1) a_1 + \dots + \omega(\varphi_n, \varphi_n) a_n &= (\varphi_n, f) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

这是关于 a_0, a_1, \dots, a_n 的线性方程组。因为 $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ 线性无关,故系数行列式 $G(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n) \neq 0$,方程组(6)有唯一解。

根据函数族 $\{\varphi_n(x)\}$ 的正交性,方程组(6)左边系数矩阵除对角线上元素外,其余都为0,所以得到方程组(6)的解,即:

$$a_k = \frac{(\varphi_k, f)}{\omega(\varphi_k, \varphi_k)} \quad (7)$$

则 $f(x)$ 的 n 次最小二次方逼近多项式为

$$S_k = \sum_{k=0}^n \frac{(\varphi_k, f)}{\omega(\varphi_k, \varphi_k)} \varphi_k(x) = \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(x) \quad (8)$$

考虑 $f(x) \in C[-1, 1]$,利用切比雪夫正交多项式 $\{T_k(x)\}$ 逼近 $f(x)$,其中权函数 $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,并且满足如下关系:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, T_1(x) = x, \\ T_{n+1}(x) &= 2xT_n(x) - T_{n-1}(x). \end{aligned}$$

$$\int_{-1}^1 \frac{T_m(x) T_n(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{\pi}{2}, & m = n \neq 0 \\ \pi, & m = n = 0 \end{cases} \quad (9)$$

式(6)的右边可写为

$$(\varphi_k, f) = (T_k, f) = \int_{-1}^1 T_k(x) f(x) dx \quad (10)$$

其中 $T_k(x)$ 为一般多项式,设其形式为 $B_{k0} + B_{k1}x + \dots + B_{kk}x^k$,代入式(10),有

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 T_k(x) f(x) dx &= \int_{-1}^1 (B_{k0} + B_{k1}x + \dots + B_{kk}x^k) f(x) dx \\ &= B_{k0} \int_{-1}^1 f(x) dx + \\ &+ B_{k1} \int_{-1}^1 x f(x) dx + \dots + B_{kk} \int_{-1}^1 x^k f(x) dx \end{aligned}$$

记

$$\left. \begin{aligned} \mu &= \int_{-1}^1 x f(x) dx \\ \mu_k &= \int_{-1}^1 x^k f(x) dx \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

则 μ, μ_k 分别为随机变量 x 的均值和 k 阶原点矩。

把式 (11) 代入式 (10), 则有

$$(\varphi_k, f) = (T_k, f) = \int_{-1}^1 T_k(x) f(x) dx = B_{k0}\mu_0 + B_{k1}\mu_1 + \dots + B_{kk}\mu_k = \sum_{i=0}^k B_{ki}\mu_i \quad (12)$$

式 (6) 的左边可写为:

$$\omega(\varphi_k, \varphi_k) = \omega(T_k, T_k) = \int_{-1}^1 \frac{T_k(x) T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} \pi, & k = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & k \neq 0 \end{cases} \quad (13)$$

所以

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{(T_0, f)}{\omega(T_0, T_0)} = \frac{B_{00}\mu_0}{\pi}, \\ a_1 &= \frac{(T_1, f)}{\omega(T_1, T_1)} = \frac{B_{10}\mu_0 + B_{11}\mu_1}{\pi/2}, \dots, \\ a_k &= \frac{(T_k, f)}{\omega(T_k, T_k)} = \frac{\sum_{i=0}^k B_{ki}\mu_i}{\pi/2}, \dots \end{aligned} \quad (14)$$

得到概率密度函数 $f(x)$ 的多项式逼近表达式

$$f_n(x), \text{ 即 } f(x) \approx f_n(x) = \sum_{k=0}^n \omega(x) a_k T_k(x).$$

一般情况下, $f(x) \in C[a, b]$ 。因为切比雪夫多项式定义在区间 $[-1, 1]$ 上, 所以求解在 $[a, b]$ 上的逼近多项式, 需做区间变换

$$x = \frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2} \quad (-1 \leq t \leq 1)$$

$x-t$ 之间为线性关系, 当 x 在区间 $[a, b]$ 上变化时, 对应的 t 在区间 $[-1, 1]$ 上变化, 则

$$\begin{aligned} T_0(t) &= T_0\left(\frac{2x-(b+a)}{b-a}\right) = 1, \\ T_1(t) &= t = \frac{2x-(b+a)}{b-a}, \\ T_2(t) &= \frac{3t^2-1}{2} = \frac{3\left(\frac{2x-(b+a)}{b-a}\right)^2-1}{2}, \dots \end{aligned}$$

最后, 得到 $f(x)$ 的多项式逼近表达式 $f_n(x)$, 即

$$f(x) \approx f_n(x) = \sum_{k=0}^n \omega(t) a_k T_k(t) = \sum_{k=0}^n a_k \omega\left(\frac{2x-(b+a)}{b-a}\right) T_k\left(\frac{2x-(b+a)}{b-a}\right) \quad (15)$$

在结构可靠性分析中, 以切比雪夫正交多项式做基, 利用功能函数的高阶矩 (即 $f(x)$ 的前 k 阶原

点矩), 求解方程组 (6), 得到各项系数 a_k , 即可求得功能函数概率密度函数的逼近表达式, 对结构的可靠性进行分析。

3 结构可靠性分析的高阶矩法

基于数值逼近的结构可靠性高阶矩法是以切比雪夫正交多项式 $\{T_k(x)\}$ 做基, 利用功能函数 $f(x)$ 的高阶原点矩, 求解线性方程组, 得到功能函数概率密度函数的逼近表达式 $f_n(x)$, 然后估算结构的失效概率。具体计算步骤如下:

1) 分析工程结构的实际情况, 建立功能函数 $Z = g(X) = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ 。

2) 根据结构随机变量的统计特征或分布概型, 对 $g(X)$ 进行抽样。

3) 考虑正交多项式性质, 区间做适当变换, 计算功能函数 $g(X)$ 的各阶样本矩。

4) 以切比雪夫正交多项式 $\{T_k(x)\}$ 做基, 利用得到的各阶样本矩, 求解功能函数概率密度函数 $f(x)$ 的近似多项式 $f_n(x)$ 。

5) 计算结构的失效概率, 对工程结构进行可靠性分析。

在计算失效概率时^[1,2], 引入标准化随机变量 z , 即 $(\mu_z = 0, \sigma_z = 1)$:

$$z = (Z - \mu_z) / \sigma_z$$

把 $f(x)$ 的近似多项式 $f_n(x)$ 代入式 (1), 得

$$P_f = P(Z < 0) = P(z < -\mu_z / \sigma_z) = \int_{-\infty}^{-\frac{\mu_z}{\sigma_z}} f_n(x) dx \quad (15)$$

在实际情况中, 随机变量不可能无限制地趋于 $-\infty$, 因此, 对上式积分时, 积分下界可根据工程结构的实际情况估计一个界值, 使误差在可接受的范围之内。

4 结构可靠性高阶矩法的检验

4.1 经典分布函数的数值检验

以工程结构随机变量最常服从的正态分布和对数正态分布为例, 检验高阶矩法拟合各种经典分布曲线的优良性。首先根据经典概率密度函数的解析表达式, 画出其理论分布曲线, 然后用积分的方法计算出理论分布的各阶原点矩, 采用切比雪夫正交多项式为基, 做拟合曲线并进行比较, 观察后者拟合性能的优劣。

图 1, 图 2 分别是用切比雪夫正交多项式为基对正态分布、对数正态分布 (具体表达式见表 1) 的拟合曲线。从图中可以看出, 拟合曲线与两种经典分布已经基本重合。通过数值检验说明, 只要已知随机变量的前 n 阶原点矩, 采用切比雪夫正交多项式为基生成的概率密度函数具有良好的拟合性能。

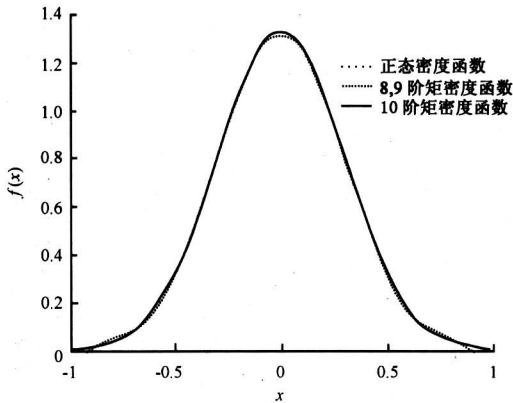


图 1 正态密度函数的数值检验

Fig.1 Numerical test of normal density function

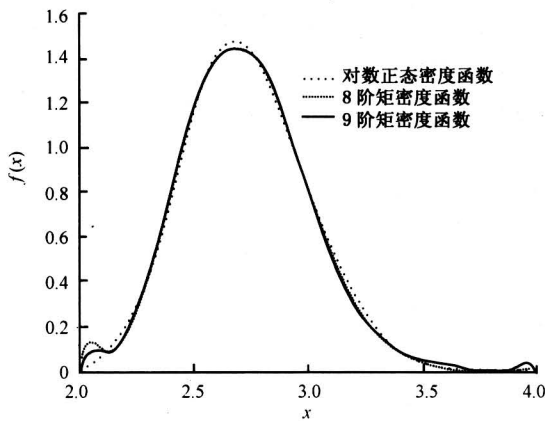


图 2 对数正态密度函数的数值检验

Fig.2 Numerical test of log-normal density function

表 1 两种经典分布曲线及其表达式

Table 1 Two classical distributions and their expressions

名称	正态分布	对数正态分布
表达式	$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 0.3} e^{-\frac{x^2}{2 \cdot (0.3)^2}}$	$y = \frac{1}{0.1\sqrt{2\pi}x} \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{\ln x - 1}{0.1} \right]^2 \right\}$
置信区间	$[-1, 1]$	$[2, 4]$
置信度 $\beta/\%$	99.91	99.89

4.2 工程结构失效概率的计算

某结构构件正截面强度的功能函数为 $Z =$

$(R, S) = R - S$, 其中抗力 R 和荷载效应 S 均服从正态分布, 平均值 $\mu_R = 100 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $\mu_S = 50 \text{ kN} \cdot \text{m}$, 变异系数 $\delta_R = 0.12$, $\delta_S = 0.15$ 。试求结构构件的失效概率。

因为抗力 R 和荷载效应 S 均服从正态分布, 所以 $\sigma_R = \mu_R \cdot \delta_R = 12$, $\sigma_S = \mu_S \cdot \delta_S = 7.5$ 。功能函数 Z 也服从正态分布, 并且 $\mu_z = 50 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $\sigma_z^2 = 200.25$ 。 $-\mu_z/\sigma_z = -3.5333$, 因此在区间 $[-5, -3]$ 上进行概率密度函数的逼近, 同时将功能函数随机变量 Z 标准化为 z 。根据正交多项式逼近法, 利用样本数据的前 n 阶矩, 计算得到在区间 $[-5, -3]$ 上标准化功能函数 z 的概率密度函数各阶近似表达式 $f_n(t)$ 。近似表达式的各项系数见表 2, 把 $t = x + 4$ 代入, 即可求得 $f_n(x)$ 的具体表达式。

表 2 切比雪夫多项式生成函数各项系数及计算结果
Table 2 The coefficients of generated probability density functions and result of p_f

各项系数	$f_7(x)$	$f_8(x)$	$f_9(x)$	$f_{10}(x)$
a_0	0.000 429 6	0.000 429 6	0.000 429 6	0.000 429 6
a_1	0.000 616 3	0.000 616 3	0.000 616 3	0.000 616 3
a_2	0.000 144 9	0.000 144 9	0.000 144 9	0.000 144 9
a_3	-0.000 167 6	-0.000 167 6	-0.000 167 6	-0.000 167 6
a_4	-0.000 236 3	-0.000 236 3	-0.000 236 3	-0.000 236 3
a_5	-0.000 184 4	-0.000 184 4	-0.000 184 4	-0.000 184 4
a_6	-0.000 120 5	-0.000 120 5	-0.000 120 5	-0.000 120 5
a_7	-7.812×10^{-5}	-7.812×10^{-5}	-7.812×10^{-5}	-7.812×10^{-5}
a_8		-5.428×10^{-5}	-5.428×10^{-5}	-5.428×10^{-5}
a_9			-4.044×10^{-5}	-4.044×10^{-5}
a_{10}				-3.166×10^{-5}
p_f	2.032×10^{-5}	2.053×10^{-5}	2.058×10^{-5}	2.058×10^{-5}

根据结构可靠性分析失效概率的定义, 利用样本数据的前 n 阶矩计算得到的 $f_n(x)$, 分别进行数值积分求解失效概率 p_f , 计算结果见表 2 第 13 行。可以看出, 当 $n \geq 7$ 时, 计算结果已经基本趋于稳定。利用中心点法、验算点法以及蒙特卡罗模拟^[1] 的计算结果分别为 2.078×10^{-4} , 2.05×10^{-4} 和 2.05×10^{-4} , 从中可以看出该方法的正确性和实用性。

5 结论

1) 提出了工程结构可靠性分析的高阶矩法。该方法基于数值逼近原理, 以切比雪夫正交多项式做基, 利用功能函数的高阶矩信息, 通过求解线性方程组, 得到功能函数的逼近概率密度函数表达式 $f_n(x)$, 然后利用工程结构可靠性分析的一般式计

算结构的失效概率，对工程结构的可靠性进行分析。

2) 高阶矩分析法能充分利用结构随机变量的统计信息，避免了复杂的数值寻优计算，很大程度地提高了计算效率，并且可以按任意指定的高阶矩信息，达到满意的计算精度。通过计算，可以依次得到多项式各项系数，计算难度和复杂性不随矩阶数的增加而增加，数值计算结果稳定。根据结构构件失效概率的计算，表明可靠性分析的高阶矩数值逼近法是正确而且实用的。

参考文献

- [1] 赵国藩, 金伟良, 贡金鑫. 结构可靠度理论[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2000
- [2] 谢康和, 周健. 岩土工程有限元分析理论与应用[M]. 北京: 科学出版社, 2002
- [3] 邓建, 李夕兵, 古德生. 岩石力学参数概率分布的信息熵推断[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(13): 2177 ~ 2181
- [4] 邓建, 李夕兵, 古德生. 结构可靠性分析的多项式数值逼近法[J]. 计算力学学报. 2002, 19(2): 212 ~ 216
- [5] Han Pinghong, Lind N C. Approximate reliability analysis using normal polynomial and simulation results [J]. Structural Safety, 1996, 18(4): 329 ~ 339
- [6] 李云贵, 赵国藩. 结构可靠度的四阶矩分析法[J]. 大连理工大学学报, 1992, 32(4): 455 ~ 459
- [7] 李庆扬, 王能超, 易大义. 数值分析[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2001

Higher Moment Method in Reliability Analysis of Engineering Structure

Gong Fengqiang, Li Xibing, Deng Jian

(School of Resources and Safety Engineering, Central South University, Changsha 410083, China)

[Abstract] A higher moment method with the basis of Chebyshev polynomial $\{T_k(x)\}$ is presented, which is used in the reliability analysis of engineering structures. The equations of optimal probability density function of stochastic variable or limit state function are derived by use of the higher moments of the function. Subsequently, a reliability index or failure probability of the engineering structures can be calculated. From the comparison of the classical distribution function and the failure probability for the components, this method is proved to be valuable and practicable in engineering application.

[Key words] structure reliability; higher moment; Chebyshev polynomial; failure probability