学术论文

不完备模糊信息系统

杨习贝[1]，杨静宇[1]，吴　陈[2]，傅　凡[2]
（1. 南京理工大学计算机科学与技术学院，南京　210094；
2. 江苏科技大学电子与信息学院，江苏 镇江　212003）

［摘要］　以不完备模糊信息系统为研究对象，建立了其中的模糊相容关系及模糊粗糙上、下近似集。在此基础上，探讨了论域上的模糊覆盖问题并提出了覆盖的3种运算形式；定义了2种新的模糊粗糙熵以讨论不完备模糊信息系统中的不确定性因素，证明了不确定因素的变化与度量强度之间的重要关系；建立了一种度量部分模糊知识依赖的新方法，获得了一些新的定理结果证明。

［关键词］　不完备模糊信息系统；模糊相容关系；模糊粗糙集；模糊覆盖；模糊粗糙熵；模糊知识依赖
［中图分类号］ TP18　　［文献标识码］ A　　［文章编号］ 1009－1742（2006）07－0047－07

1　引言

粗糙集理论[1,2]（RST，rough set theory）是一种处理含糊和不精确性问题的新型数学工具。Pawlak提出的RST所处理的对象为信息系统[2]（IS，information system），然而按照Zadeh的观点：现实世界中绝大部分知识不是精确的，而是模糊的，因此在IS中有可能存在模糊知识（如气象观测信息系统），所以对于模糊信息系统[3]（FIS，fuzzy information system）的研究是必要的。再者，由于数据测量的误差、对数据理解或获取的限制等原因，FIS中也可能存在数据遗漏等不完备[4~6]、不确定的情况，因此有必要将模糊等价关系[7]弱化为其他类型的二元模糊关系，以对论域中的对象进行合理分类。文献[8]已对不完备模糊信息系统（IFIS，incomplete fuzzy information system）进行了初步的探讨，主要研究了其中的知识获取方法。

首先，将传统RST中的不可分辨关系（等价关系）推广为其他较弱的二元关系（如容差关系[4]、相似关系[5]等），论域覆盖[9]中的元素是清晰的；而在IFIS中，模糊关系所产生的模糊信息粒是一个模糊类。其次，对于IS中的不确定性度量[10,11]问题往往从知识和集合的不确定性两方面来考虑，所以笔者在IFIS中分别建立了2种新的模糊粗糙熵来度量上述概念。最后，已有学者对模糊关系数据库系统中的模糊函数依赖[12~14]及其公理化问题进行了研究，笔者主要讨论IFIS中的部分模糊知识依赖问题，定义了一种新的度量方法来研究部分模糊知识依赖的强度，并进行了相关性质的证明。

2　不完备模糊信息系统

一个FIS为二元组 $S=\langle U, A_T\rangle$，其中 U 是一个非空有限对象集合，称为论域，U 上的模糊子集族记为 $F(U)$，A_T 为模糊属性集合。对于 $\forall a\in A_T$，有 $a: U\rightarrow V_a$，V_a 表示模糊属性 a 的值域；对于 $\forall x\in U$，$a(x)$ 表示 x 在模糊属性 a 上的取值，即为 V_a 的一模糊子集；对于 $\forall v\in V_a$，$a(x)(v)$[8] 表示 x 在模糊属性 a 上取值为 v 的可能性程度且 $a(x)(v)\in[0,1]$。

定义1　对于一个模糊信息系统 $S=\langle U, A_T\rangle$，当且仅当至少存在一个不确定值 d 使得 $a(x)(v)=$

［收稿日期］　2005－05－26；修回日期　2006－03－01
［基金项目］　“八六三”高技术研究发展计划资助项目（2003AA312090）
［作者简介］　杨习贝（1980－），男（回族），江苏镇江市人，南京理工大学博士研究生，研究方向：粗糙集理论，数据挖掘

d,其中 $a \in A_T$ 且 $x \in U$, 称为不完备模糊信息系统(IFIS)。

由于模糊信息系统中出现了数据不完备的情况，因此模糊等价关系[7]将不再适用于论域中对象的分类，取而代之的可能是其他模糊关系或仅满足自反性的一般二元模糊关系。

给定一个 IFIS, 对常用的逻辑连接词采用如下的函数表示，这种函数表示的方法曾被 Stefanowski 用于定义量化容差关系[5]。

定义 2 逻辑非（否定）函数：$N:[0,1] \to [0,1]$,要求 $N(0) = 1, N(1) = 0$。通常将逻辑非函数表示为 $N(x) = 1 - x$。

定义 3 T-norm 函数为一个连续非降函数 $T(x,y):[0,1]^2 \to [0,1]$, 要求 $T(x, 1) = x$。T-norm 函数代表合取，常用以下 3 种表示方式：

1) 最小值 $T(x, y) = \min(x, y)$;

2) 乘积 $T(x, y) = xy$;

3) Lukasiewicz T-norm $T(x, y) = \max(x + y - 1, 0)$。

定义 4 T-conorm 函数为一个连续非降函数 $W(x, y):[0, 1]^2 \to [0, 1]$,要求 $W(0, y) = y$。T-conorm 函数代表析取，常用以下 3 种表示方式：

1) 最大值 $W(x, y) = \max(x, y)$;

2) 乘积 $W(x, y) = x + y - xy$;

3) Lukasiewicz T-conorm $W(x, y) = \min(x + y, 1)$。

定义 5 $I(x, y)$ 是 x 蕴涵 y 的程度函数 $I(x, y):[0, 1]^2 \to [0, 1]$。函数 $I(x, y)$ 需满足条件：

$$I(x, y) = W(N(x), y);$$

$$x \leqslant y \Rightarrow I(x, y) = 1。$$

定义 6 设 IS 为一 IFIS, 对于 $\forall a \in A_T$,由 a 决定的一个二元模糊关系表示为R_a，即对于 $\forall x, y \in U$, 有

$$R_a(x, y) = W_{v \in V_a}\{T(a(x)(v), a(y)(v))\},$$

其中 $a(x)(v) = d \Rightarrow a(x)(v) = 1$。$a(x)(v) = d \Rightarrow a(x)(v) = 1$ 表示 x 在模糊属性a上确实有可能取值为 v,只是由于某些原因目前无法确定这种可能性有多大,所以假设这种可能性程度为 1。关系 $R_a(x, y)$ 表示对象 x 与y 在模糊属性a 上取值的相似程度。对于 $\forall x, y \in U$,有 $R_a(x, y) \in [0, 1]$。容易验证 R_a 满足自反性和对称性,但并不一定满足传递性,因此称 R_a 为一个模糊相容关系。同时，选择不同的逻辑表示函数可以定义满足不同语义需求的模糊相容关系。

定理 1 设 IS 为一 IFIS, 其中 $A \subseteq A_T$, 对于 $\forall x, y \in U$,有 $R_A(x, y) = T_{a \in A_T}\{R_a(x, y)\}$。

定理 2 设 IS 为一 IFIS, 对于 $\forall x, y \in U$,如果 $B \subseteq A \subseteq A_T$,那么就有 $R_B(x, y) \geqslant R_A(x, y)$。

定义 7 设 IS 为一 IFIS, 若 $A \subseteq A_T$,则由模糊属性 A 决定的模糊相容矩阵表示为 $\boldsymbol{M}_A = [r_{ij}]$,其中 $r_{ij} = R_A(x_i, x_j), (x_i, x_j \in U)$。

由于模糊相容关系具有自反性和对称性，因此模糊相容矩阵是一个对角线上元素都为 1 的对称矩阵，即在矩阵的计算过程中，只需计算矩阵的上三角或下三角即可。

对于模糊粗糙[3, 15]模型的建立有很多不同的方法。根据新建立的模糊相容关系，分别定义 IFIS 中模糊粗糙上、下近集的似隶属度函数如下所示。

定义 8 令 IS 为一 IFIS, 其中 $A \subseteq A_T$, 对于 $\forall F \in F(U)$, F 的下近似和上近似隶属度函数分别定义为

$$\mu_{\underline{R_A}(F)}(x) = T_{y \in U}(I(R_A(x, y), \mu_F(y))),$$

$$\mu_{\overline{R_A}(F)}(x) = W_{y \in U}(T(R_A(x, y), \mu_F(y))),$$

称 $\langle \underline{R_A}(F), \overline{R_A}(F) \rangle$ 为 F 的一对模糊粗糙集合。

定义 8 中的模糊粗糙集合是基于模糊相容关系的，当然也可以将这种定义方法推广到其他的二元模糊关系中。此外，亦可以将模糊粗糙集与概率相结合，定义概率模糊近似空间中的模糊粗糙集模型。

3 模糊覆盖

定义 9 设 IS 为一 IFIS, 对于 $\forall x \in U$,如果 $A \subseteq A_T$,那么 x 基于模糊相容关系 R_A 的模糊类记为 $\delta_{R_A}(x)$ 且 $\delta_{R_A}(x) = \sum_{y \in U} R_A(x, y)/y$。

对于 $\forall x \in U$,有 $R_A(x, x) = 1$,因此 $\delta_{R_A}(x)$ 是一个自反模糊信息粒。很明显,在 IFIS 中,所有的 $\delta_{R_A}(x)$ 构成了论域上的一个覆盖,即对于 $\forall x \in U$, 有

$$\delta_{R_A}(x) \neq \varnothing \text{ 且 } \bigcup_{x \in U} \delta_{R_A}(x) = U,$$

因此将其称为模糊覆盖。若用 U/R_A 表示 U 上基于模糊相容关系 R_A 的模糊覆盖，则

$$U/R_A = \{\delta_{R_A}(x) : x \in U\}。$$

当 $U/R_A = \{\{x\}\}(x \in U)$ 时,表示对于 $\forall x, y \in U$ 且 $x \neq y$,有 $R_A(x, y) = 0$,即论域中的所有元素在现有模糊知识 A 下都可以被完全分开,所以形成最细粒度的覆盖。

当 $U/R_A = \{U\}$ 时,表示对于 $\forall x, y \in U$,有 $R_A(x, y) = 1$,即论域中的所有元素在现有模糊知识 A 下都不可分开,所以形成最粗粒度的覆盖。

不同的模糊覆盖具有不同的粒度层次,并非细粒度覆盖好于粗粒度覆盖,反之亦然。在实际问题求解的过程中,应根据不同的需要建立不同粒度层次的模糊覆盖。

定义 10　给定一 IFIS, ψ_1, ψ_2 分别表示论域 U 上的 2 种不同模糊覆盖,若对于 $\forall \varphi_1 \in \psi_1$,必定 $\exists \varphi_2 \in \psi_2$ 使得 $\varphi_1 \subseteq \varphi_2$,并且对于 $\forall \varphi_2 \in \psi_2$,必定 $\exists \varphi_1 \in \psi_1$ 使得 $\varphi_2 \supseteq \varphi_1$,则称模糊覆盖 ψ_1 比 ψ_2 更为精细,或者说 ψ_2 比 ψ_1 更为粗糙,表示为 $\psi_1 \sqsupseteq \psi_2$ 或 $\psi_2 \sqsubseteq \psi_1$。

定理 3　设 IS 为一 IFIS, 如果 $B \subseteq A \subseteq A_T$,那么 $U/R_A \sqsupseteq U/R_B$。

证明　由定理 2, 因为 $B \subseteq A \subseteq A_T$, 所以 $R_A(x, y) \leqslant R_B(x, y)$,其中 $x, y \in U$。再由定义 9 可得到 $\delta_{R_A}(x) \subseteq \delta_{R_B}(x)$。又因为 x 为论域中任意取得,所以上述结果满足定义 10 中所需条件,即 $U/R_A \sqsupseteq U/R_B$ 成立。

推论 1　设 IS 为一 IFIS, 如果 $B \subseteq A \subseteq A_T$,则对于 $\forall M \in U/R_A$,必定 $\exists N \in U/R_B$ 使得 $M \subseteq N$,反之亦然。

定义 11　设 IS 为一 IFIS, 若 $A, B \subseteq A_T$,则 U/R_A, U/R_B 表示论域 U 上的 2 个模糊覆盖, 可分别定义运算如下:

$$\sim(U/R_A) = \{N'(\delta_{R_A}(x)) : x \in U\},$$

$$U/R_A \otimes U/R_B = \{T'(\delta_{R_A}(x), \delta_{R_B}(x)) : x \in U\},$$

$$U/R_A \oplus U/R_B = \{W'(\delta_{R_A}(x), \delta_{R_B}(x)) : x \in U\},$$

其中 $N'(\delta_{R_A}(x)) = \sum_{y \in U} N(R_A(x, y))/y$, $T'(\delta_{R_A}(x), \delta_{R_B}(x)) = \sum_{y \in U} T(R_A(x, y), R_B(x, y))/y$, $W'(\delta_{R_A}(x), \delta_{R_B}(x)) = \sum_{y \in U} W(R_A(x, y), R_B(x, y))/y$ 且 $y \in U$。

定义 11 中, $\sim$ 表示取模糊覆盖中的每个元素的补集; $\otimes$表示对任意 2 个处于不同模糊覆盖中的模糊集合的隶属度进行 T-norm 函数的操作; $\oplus$表示对任意 2 个处于不同模糊覆盖中的模糊集合的隶属度进行 T-conorm 函数的操作。这 3 种运算形式达到了使得模糊覆盖在不同粒度层次上变换的目的, 运算结果都形成了新的模糊覆盖。

定理 4　设 IS 为一 IFIS, 其中 $A, B, C \subseteq A_T$, 则模糊覆盖上的运算满足下列性质:

交换律　$U/R_A \otimes U/R_B = U/R_B \otimes U/R_A$,

$$U/R_A \oplus U/R_B = U/R_B \oplus U/R_A;$$

结合律

$$(U/R_A \otimes U/R_B) \otimes U/R_C = U/R_A \otimes (U/R_B \otimes U/R_C),$$

$$(U/R_A \oplus U/R_B) \oplus U/R_C = U/R_A \oplus (U/R_B \oplus U/R_C);$$

分配律

$$U/R_A \otimes (U/R_B \oplus U/R_C) = (U/R_A \otimes U/R_B) \oplus (U/R_A \otimes U/R_C),$$

$$U/R_A \oplus (U/R_B \otimes U/R_C) = (U/R_A \oplus U/R_B) \otimes (U/R_A \oplus U/R_C);$$

德摩根律

$$\sim(U/R_A \otimes U/R_B) = (\sim U/R_A) \oplus (\sim U/R_B),$$

$$\sim(U/R_A \oplus U/R_B) = (\sim U/R_A) \otimes (\sim U/R_B);$$

双重否定律　$\sim(\sim(U/R_A)) = U/R_A$。

定理 5　令 IS 为一 IFIS。如果 $A, B \subseteq A_T$, 那么就有

$$U/R_A \otimes U/R_B \sqsupseteq U/R_A,$$

$$U/R_A \otimes U/R_B \sqsupseteq U/R_B;$$

$$U/R_A \oplus U/R_B \sqsubseteq U/R_A,$$

$$U/R_A \oplus U/R_B \sqsubseteq U/R_B。$$

上述定理说明运算$\otimes$减小了模糊覆盖的粒度层次, 而$\oplus$却增大了模糊覆盖的粒度层次。

引理　设 IS 为一 IFIS。如果 $a, b \in A_T$,那么就有 $U/R_{\{a,b\}} = U/R_a \otimes U/R_b$。

证明　对于 $\forall x, y \in U$, 由定理 1 可得 $R_{\{a,b\}}(x, y) = T(R_a(x, y), R_b(x, y))$。根据定义 9 及定义 11, 可推出

$$T'(\delta_{R_a}(x), \delta_{R_b}(x)) = \sum_{y \in U} T(R_a(x, y), R_b(x, y))/y = \sum_{y \in U} R_{\{a,b\}}(x, y)/y = \delta_{R_{\{a,b\}}}(x),$$

其中 $x \in U$。又因为 x 为论域中任意取得,所以 $U/R_{\{a,b\}} = U/R_a \otimes U/R_b$。

定理6 设 IS 为一 IFIS，若 $A \subseteq A_T$，则

$$U/R_A = U/R_{a_1} \otimes U/R_{a_2} \otimes \cdots \otimes U/R_{a_m} = \bigotimes_{i=1}^{m} U/R_{a_i} = \bigotimes_{a\in A} U/R_a,$$

其中 $a_i \in A(1 \leqslant i \leqslant m)$。

定理7 设 IS 为一 IFIS。如果 $A, B \subseteq A_T$，那么就有

$$U/R_{A\cup B} = U/R_A \otimes U/R_B。$$

证明 由定理6可做以下形式的推导：

$$U/R_A \otimes U/R_B = (\bigotimes_{a\in A} U/R_a) \otimes (\bigotimes_{b\in B} U/R_b) = (\bigotimes_{a\in A-A\cap B} U/R_a) \otimes (\bigotimes_{a\in A\cap B} U/R_a) \otimes (\bigotimes_{b\in B-A\cap B} U/R_b) \otimes (\bigotimes_{b\in A\cap B} U/R_b) = U/R_{A\cup B}。$$

4 不确定性度量方法

4.1 模糊知识的不确定性

在 IFIS 中，模糊知识的不确定性可以由知识的模糊粗糙熵来表示，并且模糊知识的不确定性表示了 IFIS 的稳定程度[10]。

定义12 设 IS 为一 IFIS，若 $A \subseteq A_T$，则模糊知识 A 的模糊粗糙熵记为 $E(A)$ 且

$$E(A) = -\sum_{x\in U}\{(|\delta_{R_A}(x)|/|U|)\cdot \mathrm{lb}\,(1/|\delta_{R_A}(x)|)\},$$

其中 $|F|$ 表示模糊集合 F 的基数，即对于 $\forall F \in F(U)$，$|F| = \sum_{x\in U}\mu_F(x)$。

当 $U/R_A = \{\{x\}\}(x \in U)$ 时，$E(A)$ 达到最小值0，此时 IFIS 的不确定性最大；当 $U/R_A = \{U\}$ 时，$E(A)$ 达到最大值 $\mathrm{lb}\,|U|$，即 IFIS 没有不确定性。

定理8 设 IS 为一 IFIS，若 $B \subseteq A \subseteq A_T$，则 $E(A) \leqslant E(B)$。

推论2 设 IS 为一 IFIS，如果 $A, B \subseteq A_T$，那么

$$E(A \cup B) \leqslant \min\,(E(A), E(B)),$$

$$E(A \cap B) \geqslant \max\,(E(A), E(B))。$$

由定理8可以看出，模糊知识越丰富，模糊粗糙熵就越小。

4.2 模糊集合的不确定性

在 Pawlak 提出的 RST 中，集合的不确定性是由粗糙度来表示的。在 IFIS 中，对于 $\forall F \in F(U)$，若 $\underline{R_A}(F) = F = \overline{R_A}(F)$，则称模糊集 F 是基于 R_A 粗糙可定义的，否则是不可定义的，因此模糊集合的不确定性亦可用粗糙度来度量。

定义13 设 IS 为一 IFIS，$A \subseteq A_T$，对于 $\forall F \in F(U)$，F 的模糊精确度 $\alpha_A(F)$ 和模糊粗糙度 $\rho_A(F)$ 分别定义为

$$\alpha_A(F) = |\underline{R_A}(F)|/|\overline{R_A}(F)|,$$

$$\rho_A(F) = 1 - \alpha_A(F)。$$

定理9 设 IS 为一 IFIS，对于 $\forall F \in F(U)$，如果 $B \subseteq A \subseteq A_T$，那么

$$\alpha_A(F) \geqslant \alpha_B(F),\ \rho_A(F) \leqslant \rho_B(F)。$$

证明 由定理2，因为 $B \subseteq A \subseteq A_T$，所以 $R_B(x, y) \geqslant R_A(x, y)$。对于 $\forall x \in U$，因为 W 是一个连续非降函数且 $I(x, y) = W(N(x), y)$ $(N(x) = 1 - x)$，故必有

$$I(R_A(x, y), \mu_F(y)) \geqslant I(R_B(x, y), \mu_F(y)),$$

其中 $y \in U$。再由定义3可知 T 为一个连续非降函数，所以 $\mu_{\underline{R_A}(F)}(x) \geqslant \mu_{\underline{R_B}(F)}(x)$，即 $\underline{R_A}(F) \supseteq \underline{R_B}(F)$。同理可以证得 $\overline{R_A}(F) \subseteq \overline{R_B}(F)$。综上所述，$\alpha_A(F) \geqslant \alpha_B(F)$，$\rho_A(F) \leqslant \rho_B(F)$ 成立。

定理9说明了模糊集的模糊粗糙度随着模糊知识的增加而单调减少，即模糊知识越充分，模糊集合的不确定性越小。然而在有些情况下，粗糙度并不能客观地度量集合的不确定性[10]，因为一模糊集合有可能在不同的模糊知识表示下具有相同的模糊粗糙度，引入一种新的模糊粗糙熵来对模糊集合的不确定性进行更为精确的度量。

定义14 设 IS 为一 IFIS，其中 $A \subseteq A_T$，对于 $\forall F \in F(U)$，F 的模糊粗糙熵 $E_A(F)$ 定义如下所示：

$$E_A(F) = -\sum_{x\in U}\{(|\delta_{R_A}(x) \cap F|/|U|)\cdot \mathrm{lb}(1/|\delta_{R_A}(x) \cap F|)\}。$$

由定义14可以看出，模糊集的模糊粗糙熵仅与对象的模糊信息粒有关，而无需求得集合的粗糙度和知识的粗糙熵，因而大大降低了计算量。

定理10 设 IS 为一 IFIS，对于 $\forall F \in F(U)$，若 $B \subseteq A \subseteq A_T$，则 $E_A(F) \leqslant E_B(F)$。

证明 对于 $\forall x \in U$，类似于定理3的证明，可得 $\delta_{R_A}(x) \subseteq \delta_{R_B}(x)$，于是就有

$$-\{(|\delta_{R_A}(x) \cap F|/|U|)\cdot \mathrm{lb}(1/|\delta_{R_A}(x) \cap F)\} \leqslant$$

$$-\{(|(\delta_{R_B}(x) \cap F|/|U|)\cdot$$

$\mathrm{lb}(1/|\delta_{R_B}(x)\cap F|)\}$，

扩充这个不等式就可以得到 $E_A(F)\leqslant E_B(F)$。

推论 3　设 IS 为一 IFIS，对于 $\forall F\in F(U)$，如果 $A,B\subseteq A_T$，那么

$$E_{A\cup B}(F)\leqslant\min(E_A(F),E_B(F)),$$

$$E_{A\cap B}(F)\geqslant\max(E_A(F),E_B(F))。$$

定理 11　设 IS 为一 IFIS，如果 $A\subseteq A_T$，那么对于 $\forall F,G\in F(U)$ 且 $F\subseteq G$，有 $E_A(F)\leqslant E_B(G)$。

推论 4　设 IS 为一 IFIS，如果 $A\subseteq A_T$，那么对于 $\forall F,G\in F(U)$，有

$$E_A(F\cup G)\geqslant\max(E_A(F),E_A(G)),$$

$$E_A(F\cap G)\leqslant\min(E_A(F),E_A(G))。$$

5　模糊知识依赖

粗糙集理论中的知识依赖概念，实质上表示的是一种高阶规则[16]。在 IFIS 中，由于存在的是模糊知识，因此，研究模糊知识之间的部分依赖关系，可为挖掘 IFIS 中的高阶规则进行模糊知识推理建立一定的理论基础。为简便起见，使用如下方式来定义 IFIS 中的模糊知识依赖。模糊知识依赖的相关性质可以参考文献[12，14]中的模糊函数依赖公理。

定义 15　令 IS 为一 IFIS，A，$B\subseteq A_T$，模糊知识之间的依赖关系可表示为 $A\rightarrow B$ 当且仅当对于 $\forall x,y\in U$，有 $R_A(x,y)\leqslant R_B(x,y)$。

定义 16　令 IS 为一 IFIS，$A,B\subseteq A_T$，模糊知识之间的等价依赖关系可表示为 $A\leftrightarrow B$ 当且仅当对于 $\forall x,y\in U$，有 $R_A(x,y)\leqslant R_B(x,y)$ 且 $R_A(x,y)\geqslant R_B(x,y)$，即 $R_A(x,y)=R_B(x,y)$。

知识的部分依赖性表明知识推导也可以是部分的，即有部分知识 B 是可由 A 推导的。在经典 RST 中，知识的部分可导性可用知识的正域[1，2]来表示，然而在 IFIS 中，使用满足模糊知识依赖的对象组的数量相比，对于模糊知识的正域来说具有更为直观的意义。

定义 17　令 IS 为一 IFIS，A，$B\subseteq A_T$，模糊知识 B 以程度 k 依赖于模糊知识 A，表示为 $A\rightarrow B(k)$，其中 $k=|\{\{x,y\}:R_A(x,y)\leqslant R_B(x,y)\}|/|U|^2$ $(x,y\in U)$。

定理 12　令 IS 为一 IFIS，若 $B\subseteq A\subseteq A_T$，则 $A\rightarrow B$。

定理 13　令 IS 为一 IFIS，A，B，$C\subseteq A_T$，若 $A\rightarrow C(k_1)$ 且 $A\cup B\rightarrow C(k_2)$，则 $k_1\leqslant k_2$。

证明　令 $\Gamma=\{\{x,y\}:R_A(x,y)\leqslant R_C(x,y)\}$ 且 $\Delta=\{\{x,y\}:R_{A\cup B}(x,y)\leqslant R_C(x,y)\}$。由定理 1 可知 $R_A(x,y)\geqslant R_{A\cup B}(x,y)$，所以 $\Gamma\subseteq\Delta$，即 $k_1\leqslant k_2$。

定理 14　令 IS 为一 IFIS，$A,B,C\subseteq A_T$，若 $A\rightarrow C(k_1)$ 且 $A\rightarrow B\cup C(k_2)$，则 $k_1\geqslant k_2$。

证明　令 $\Gamma=\{\{x,y\}:R_A(x,y)\leqslant R_C(x,y)\}$ 且 $\Delta=\{\{x,y\}:R_A(x,y)\leqslant R_{B\cup C}(x,y)\}$。由定理 1 可知 $R_C(x,y)\geqslant R_{B\cup C}(x,y)$，所以 $\Gamma\supseteq\Delta$，即 $k_1\geqslant k_2$。

定理 13 和定理 14 说明，当部分模糊知识依赖的前提和结论发生变化时，模糊知识依赖的强度也会发生相应的变化，此可用以研究模糊知识动态变化情况下的部分模糊知识依赖。

定理 15　令 IS 为一 IFIS，A，B，$C\subseteq A_T$，若 $A\rightarrow B$，$B\rightarrow C(k_1)$，则有 $A\rightarrow C(k_2)$ 且 $k_1\leqslant k_2$。

证明　因为 $A\rightarrow B$，所以对于 $\forall x,y\in U$，有 $R_A(x,y)\leqslant R_B(x,y)$。若令 $\Gamma=\{\{x,y\}:R_B(x,y)\leqslant R_C(x,y)\}$，则必定 $\exists x,y\in U$ 使得 $R_A(x,y)\leqslant R_C(x,y)$，所以 $A\rightarrow C(k_2)$ 成立。令 $\Delta=\{\{x,y\}:R_A(x,y)\leqslant R_C(x,y)\}$，则有可能存在 $\{x,y\}$ 使得 $\{x,y\}\in\Delta$ 且 $\{x,y\}\notin\Gamma$，所以 $\Gamma\subseteq\Delta$，即 $k_1\leqslant k_2$。

定理 16　令 IS 为一 IFIS，$A\subseteq B$，$C\subseteq A_T$，若有 $B\rightarrow C(k_1)$，则有 $A\rightarrow C(k_2)$ 且 $k_1\geqslant k_2$。

证明　令 $\Gamma=\{\{x,y\}:R_B(x,y)\leqslant R_c(x,y)\}$，因为 $A\subseteq B$，所以对于 $\forall x,y\in U$，有 $R_A(x,y)\geqslant R_B(x,y)$。换言之，可能存在 $\{x,y\}\in\Gamma$ 使得 $R_A(x,y)\leqslant R_C(x,y)$，即 $A\rightarrow C(k_2)$ 成立。若令 $\Delta=\{\{x,y\}:R_A(x,y)\leqslant R_C(x,y)\}$，则有 $\Gamma\supseteq\Delta$，，即 $k_1\geqslant k_2$。

定理 15 和定理 16 讨论了知识部分依赖的度量在知识传递过程中的变化。

6　实例分析

表 1 是一个气象模糊信息系统，共有 6 个对象 $o_i(1\leqslant i\leqslant 6)$，分别代表 6 个不同的日期；模糊属性集合 $A_T=\{$Outlook，Temperature，Humidity$\}$，记 $a=\{$Outlook$\}$，$b=\{$Temperature$\}$，$c=\{$Humidity$\}$；$V_a=\{$Sunny，Overcast，Rain$\}$；$V_b=$

{Hot, Mild, Cool}; V_c = {High, Normal}。由于表1中有不确定值 d 存在，因此这是一个不完备模糊信息系统。用定义6中的模糊相容关系进行对象分类，为简便起见，T-norm 函数取最小值表示方式，T-conorm 取最大值表示方式。

表1 不完备模糊信息系统

Table 1 Incomplete fuzzy information system

	Outlook			Temperature			Humidity	
	Su	Ov	Ra	Ho	Mi	Co	Hi	No
o_1	0.9	0.1	0.0	0.9	0.1	0.0	0.8	0.2
o_2	0.1	d	0.2	d	0.1	0.1	0.9	d
o_3	0.9	0.1	d	0.8	d	0.1	0.9	0.2
o_4	0.0	1.0	0.0	0.0	0.1	d	d	0.9
o_5	0.8	0.2	0.0	0.0	0.4	0.6	0.0	1.0
o_6	0.0	0.1	0.9	0.0	0.2	0.9	0.1	0.9

$$\delta_{R_a}(o_1) = 1/o_1 + 0.1/o_2 + 0.9/o_3 + 0.1/o_4 + 0.8/o_5 + 0.1/o_6;$$

$$\delta_{R_a}(o_2) = 0.1/o_1 + 1/o_2 + 0.2/o_3 + 1/o_4 + 0.2/o_5 + 0.2/o_6;$$

$$\delta_{R_a}(o_3) = 0.9/o_1 + 0.2/o_2 + 1/o_3 + 0.1/o_4 + 0.8/o_5 + 0.9/o_6;$$

$$\delta_{R_a}(o_4) = 0.1/o_1 + 1/o_2 + 0.1/o_3 + 1/o_4 + 0.2/o_5 + 0.1/o_6;$$

$$\delta_{R_a}(o_5) = 0.8/o_1 + 0.2/o_2 + 0.8/o_3 + 0.2/o_4 + 1/o_5 + 0.1/o_6;$$

$$\delta_{R_a}(o_6) = 0.1/o_1 + 0.2/o_2 + 0.9/o_3 + 0.1/o_4 + 0.1/o_5 + 1/o_6。$$

这6个模糊信息粒组成了模糊覆盖 U/R_a。

$$\delta_{R_b}(o_1) = 1/o_1 + 0.9/o_2 + 0.8/o_3 + 0.1/o_4 + 0.1/o_5 + 0.1/o_6;$$

$$\delta_{R_b}(o_2) = 0.9/o_1 + 1/o_2 + 0.8/o_3 + 0.1/o_4 + 0.1/o_5 + 0.1/o_6;$$

$$\delta_{R_b}(o_3) = 0.8/o_1 + 0.8/o_2 + 1/o_3 + 0.1/o_4 + 0.4/o_5 + 0.2/o_6;$$

$$\delta_{R_b}(o_4) = 0.1/o_1 + 0.1/o_2 + 0.1/o_3 + 1/o_4 + 0.6/o_5 + 0.9/o_6;$$

$$\delta_{R_b}(o_5) = 0.1/o_1 + 0.1/o_2 + 0.4/o_3 + 0.6/o_4 + 1/o_5 + 0.6/o_6;$$

$$\delta_{R_b}(o_6) = 0.1/o_1 + 0.1/o_2 + 0.2/o_3 + 0.9/o_4 + 0.6/o_5 + 1/o_6。$$

这6个模糊信息粒组成了模糊覆盖 U/R_b。

根据上述计算结果，再由定理7可求得由模糊知识 A = {Outlook, Temperature} 所产生的模糊覆盖如下：

$$\delta_{R_A}(o_1) = 1/o_1 + 0.1/o_2 + 0.8/o_3 + 0.1/o_4 + 0.1/o_5 + 0.1/o_6;$$

$$\delta_{R_A}(o_2) = 0.1/o_1 + 1/o_2 + 0.2/o_3 + 0.1/o_4 + 0.1/o_5 + 0.1/o_6;$$

$$\delta_{R_A}(o_3) = 0.8/o_1 + 0.2/o_2 + 1/o_3 + 0.1/o_4 + 0.4/o_5 + 0.2/o_6;$$

$$\delta_{R_A}(o_4) = 0.1/o_1 + 0.1/o_2 + 0.1/o_3 + 1/o_4 + 0.2/o_5 + 0.1/o_6;$$

$$\delta_{R_A}(o_5) = 0.1/o_1 + 0.1/o_2 + 0.4/o_3 + 0.2/o_4 + 1/o_5 + 0.1/o_6;$$

$$\delta_{R_A}(o_6) = 0.1/o_1 + 0.1/o_2 + 0.2/o_3 + 0.1/o_4 + 0.1/o_5 + 1/o_6。$$

从这一分析可以看出，已知由部分模糊属性所形成的模糊覆盖，可以求得由全部模糊属性所形成的模糊覆盖。作为模糊覆盖的一种合成方法，运算 $\otimes$ 揭示了 IFIS 中不同层次的粒度结构之间的关系，并且这种不同层次的粒度结构是由所拥有的不同知识决定的。

由定义12求模糊知识 A_T 的模糊粗糙熵 $E(A_T)$，例中 $E(A_T) = 2.256$。若有模糊集合 $F = 0.6/o_1 + 0.3/o_4 + 0.7/o_6$，则由定义14可求得 F 在模糊知识 A_T 下的模糊粗糙熵 $E_{A_T}(F) = -0.347$。

进行部分模糊知识依赖的计算，可得到：

$a \to b(0.61)$，$\{a, b\} \to c(0.94)$，满足定理13；

$a \to c(0.72)$，$a \to \{b, c\}(0.61)$，满足定理14；同理亦可以验证定理16的正确性。

7 结语

IFIS 是一种既具有模糊知识又具有不确定性信息的特殊信息系统。笔者在 IFIS 中对 RST 的一些基本概念给出了新的定义。在此基础上，用一些新方法对 IFIS 中的模糊覆盖、不确定性度量及部分模糊知识依赖进行了研究，取得了一些重要结论。下一步的工作是利用所建立的模糊相容关系在 IFIS

中设计相关的知识约简算法以获取模糊规则，进行决策分析。

参考文献

[1] Pawlak Z. Rough set theory and its applications to data analysis [J]. Journal of Cybernetics and Systems, 1998, 29: 661 ~ 688
[2] Pawlak Z. Rough sets and intelligent data analysis [J]. Journal of Information Sciences, 2002, 147: 1 ~ 12
[3] Mieszkowicz-Rolka A, Rolka L. Fuzziness in information systems [J]. Electronic Notes in Theoretical Computer Science, 2003, 82(4): 1 ~ 10
[4] Kryszkiewicz M. Rough set approach to incomplete information systems [J]. Journal of Information Sciences, 1998, 112: 39 ~ 49
[5] Stefanowski J. Incomplete information tables and rough classification [J]. Journal of Computational Intelligence, 2001, 17(3): 545 ~ 566
[6] 王国胤. Rough 集理论在不完备信息系统中的扩充[J]. 计算机研究与发展, 2002, 39(10): 1238 ~ 1243
[7] 张 铃, 张 钹. 模糊商空间理论(模糊粒度计算方法)[J]. 软件学报, 2003, 14(4): 770 ~ 776
[8] Wu Weizhi, Zhang Wenxiu, Li Huaizu. Knowledge acquisition in incomplete fuzzy information systems via the rough set approach [J]. Expert Systems, 2003, 20(5): 280 ~ 286
[9] 祝 峰, 王飞跃. 关于广义覆盖粗集的一些基本结果[J]. 模式识别与人工智能, 2002, 15(1): 6 ~ 13
[10] Liang Jiye, Shi Zhongzhi. The information entropy, rough entropy and knowledge granulation in rough set theory [J]. International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge Based Systems, 2004, 12(1): 37 ~ 46
[11] Li Qiang, Li Jianhua, Li Xiang, et al. Evaluation incompleteness of knowledge in data mining [A]. In Advanced Workshop on Content Computing, 2004, Lecture Notes in Computer Science 3309 [C]. Berlin, Springer-Verlag, 2004. 278 ~ 284
[12] Tyagia B K, Sharfuddinb A, Dutta R N, et al. A complete axiomatization of fuzzy functional dependencies using fuzzy function [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2005, 151: 363 ~ 379
[13] Yahia S B, Ounalli H, Jaoua A. An extension of classical functional dependency: dynamic fuzzy functional dependency [J]. Journal of Information Sciences, 1999, 119: 219 ~ 234
[14] Sozat M I, Yazici A. A complete axiomatization for fuzzy functional and multivalued dependencies in fuzzy database relations [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 117: 161 ~ 181
[15] Radzikowska A M, Kerre E E. A comparative study of fuzzy and rough sets [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2002, 126: 137 ~ 155
[16] Yao Yiyu. Probabilistic approaches to rough sets [J]. Expert Systems, 2003, 20: 287 ~ 297

Incomplete Fuzzy Information System

Yang Xibei[1], Yang Jingyu[1], Wu Chen[2], Fu Fan[2]

(1. *School of Computer Science and Technology*, *Nanjing University of Science and Technology*, *Nanjing* 210094, *China*; 2. *School of Electronics and Information*, *Jiangsu University of Science and Technology*, *Zhenjiang*, *jiangsu* 212003, *China*)

[Abstract] In this paper, incomplete fuzzy information system is studied. In order to deal with it by rough set theory, fuzzy compatible relation and fuzzy rough approximation are defined by logic function. Furthermore, fuzzy covering on universe is proposed, three different operations on the coverings are formed and then some significant results are gained. Besides, with the two new definitions of fuzzy rough entropies, uncertain factors could be effectively measured, some important relationships between the varieties of uncertain factors and the strength of those entropies are discussed carefully. Finally, knowledge dependency in rough set theory is transformed to fuzzy knowledge dependency in the incomplete fuzzy information system. A new method for measuring the strength of partial fuzzy knowledge dependency is proposed. Some immediate theorems are proved.

[Key words] incomplete fuzzy information system; fuzzy compatible relation; fuzzy rough set; fuzzy covering; fuzzy rough entropy; fuzzy knowledge dependency