

线性分配方法的逆序问题研究

章 玲,周德群

(南京航空航天大学经济与管理学院,南京 210016)

[摘要] 指出了线性分配方法的决策结果可能产生逆序,然后提出排序向量和相对分配比的概念,以分析线性分配方法决策结果产生逆序的原因,并在此基础上构建顺序线性分配方法,最后通过算例验证顺序线性分配方法决策结果的保序性。

[关键词] 决策分析;线性分配方法;逆序;保序

[中图分类号] N945.25 [文献标识码] A [文章编号] 1009-1742(2008)02-0050-04

所谓逆序,就是当使用某个决策方法时,对 n 个方案 x_1, x_2, \dots, x_n 决策结果是方案 x_i 优于方案 x_j ($i \neq j$),但若增加(或减少)若干个方案后,该方法得出的结果却出现方案 x_j 优于方案 x_i 的结论^[1]。对逆序问题的探讨可以追溯到 R. D. Luce 和 H. Raifa 等^[2],他们首次发现 AHP(层次分析)方法决策结果可能产生逆序,引起了学者们对 AHP 方法中逆序问题的深入研究^[3~8]。逆序问题并不仅存在于 AHP 方法中, TOPSIS(逼近于理想点的排序)方法^[9,10]、最小隶属度偏差法、改进最短距离法^[11]、ELECTRE 方法^[11]以及加权平均方法^[12]的决策结果均可能产生逆序。为了消除逆序,学者们提出了各种改进的决策分析方法使其决策结果满足保序或者严格保序^[1,3,5,7~10]。本文指出线性分配方法的决策结果同样可能产生逆序,分析其逆序产生的原因,并在传统线性分配方法的基础上构建顺序线性分配方法,以消除方案集的变动对原有方案排序结果的影响。

1 线性分配方法的原理

线性分配方法是一种依据协调规则进行决策分析的决策方法,是针对客观事物的复杂性和可比较性提出的^[13]。该方法所需的基本信息是一组指标

权重和各方案在单个指标下的优先顺序。其基本思想是,如果某方案按几个重要指标都排在前面,从总体来看,它当然地排在前面的可能性就很大^[13]。线性分配方法无需决策者确定方案在各评价指标下的具体取值。因此,与其他评价方法相比,线性分配方法具有参数少、使用简便、应用面广等优点。

方案的增加和减少均会引起线性分配方法的决策结果产生逆序。笔者仅以方案的增加为例说明线性分配方法的逆序问题,方案减少是方案增加的逆过程,逆序产生过程与方案增加时的类似,首先引用文献[14]中的案例说明线性分配方法的决策结果可能产生逆序。

2 线性分配方法的逆序实例

文献[13]中给出的决策问题指标集为 (f_1, f_2, f_3) ,方案集为 (a, b, c) ,假设指标的权重向量为 $(0.3, 0.3, 0.4)$ 。各方案在各指标下的排序结果见表 1。

运用线性分配方法(线性分配方法的算法和步骤详见文献[13])解上述决策问题,得到方案的排序为 $a \succ b \succ c$ 。假设在该决策问题的基础上增加方案 d ,则方案 $a-d$ 在各指标下的排序结果见表 2。

[收稿日期] 2006-10-16;修回日期 2007-03-07

[基金项目] 国家自然科学基金资助项目(90510010);教育部博士点基金资助项目(20050287026);国家软科学研究计划资助项目(2006GXQ3B184)

[作者简介] 章 玲(1979-),女,安徽肥东县人,南京航空航天大学博士研究生,研究方向为系统评价和决策;

周德群(1963-),男,江苏建湖市人,博士,南京航空航天大学教授,博士生导师,研究方向为系统评价和决策

表1 方案 $a-c$ 在各指标下的排序

Table 1 The rank of the alternatives $a-c$ in the case of all indexes

次序	f_1	f_2	f_3
第1	a	a	b
第2	b	c	a
第3	c	b	c

表2 方案 $a-d$ 在各指标下的排序

Table 2 The rank of the alternatives $a-d$ in the case of all indexes

次序	f_1	f_2	f_3
第1	a	d	b
第2	d	a	a
第3	b	c	d
第4	c	b	c

运用线性分配方法对4个方案进行排序,得 $b \succ a \succ d \succ c$ 。可见方案 d 的引入使得方案 a 和 b 发生逆序;方案 d 引入前 $a \succ b$ 成立;方案 d 引入后 $b \succ a$ 成立。笔者仍然以该决策问题为例分析线性分配方法产生逆序的原因。

3 线性分配方法中逆序产生的原因

不失一般性,假设上述决策问题中指标 $a-c$ 的权重分别为 w_1, w_2 和 w_3 。方案 d 引入前,各方案在各指标下的排序结果见表1。依据表1和指标的权重向量得到该决策问题对应的序权矩阵为 H ,

$$H = \begin{bmatrix} w_1 + w_2 & w_3 & 0 \\ w_3 & w_1 & w_2 \\ 0 & w_2 & w_1 + w_3 \end{bmatrix}$$

假设不等式 $w_1 + w_3 > w_2$ 和 $w_2 + w_1 > w_3$ 成立,则方案 $a-c$ 的排序结果为 $a \succ b \succ c$ 。方案 d 引入后,各方案在各指标下的排序结果见表2。依据表2和指标的权重向量得到方案 $a-d$ 对应的序权矩阵为 H' ,

$$H' = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 + w_3 & 0 & 0 \\ w_3 & 0 & w_1 & w_2 \\ 0 & 0 & w_2 & w_1 + w_3 \\ w_2 & w_1 & w_3 & 0 \end{bmatrix}$$

假设不等式 $w_1 + w_3 > w_2, w_2 + w_3 > w_1, w_3 > w_1$ 以及 $w_3 > w_2$ 成立,则方案 $a-d$ 的排序结果为 $b \succ a \succ d \succ c$ 。方案 d 的引入导致方案 a 和 b 间发生逆序。

分析线性分配方法的决策结果产生逆序的原因之前,首先定义排序向量和相对分配比两个概念。其中排序向量是指方案在序权矩阵中对应的向量。例如,矩阵 H 中方案 a 的排序向量为 $(w_1 + w_2, w_3, 0)$,矩阵 H' 中方案 a 的排序向量为 $(w_1, w_2 + w_3, 0, 0)$ 。相对分配比是指方案排序向量中非零元素之比。例如,矩阵 H 中方案 a 排在第一位与排在下一位的相对分配比为 $(w_1 + w_2) / w_3$ 。

线性分配方法中方案的变动不会改变单个指标下原有方案的排序。例如上述决策问题中方案 d 引入前后,在指标 f_1 下有 $a \succ b \succ c$ 成立,在指标 f_2 下有 $a \succ c \succ b$ 成立,在指标 f_3 下有 $b \succ a \succ c$ 成立。

线性分配方法中方案的变动会改变原有方案的排序向量维数。例如上述决策问题中方案 d 引入前,方案 $a-c$ 的排序向量均为三维;而方案 d 引入后,方案 $a-c$ 的排序向量均为四维。这是因为方案集的变化使得序权矩阵的维数发生改变,必然导致原有方案排序向量的维数发生变化。例如,上述决策问题中方案 d 引入前序权矩阵为 3×3 矩阵,每个方案的排序向量均包含3个元素;而方案 d 引入后序权矩阵为 4×4 矩阵,每个方案的排序向量均包含4个元素。

线性分配方法中方案的变动会改变原有方案的相对分配比。例如上述决策问题中方案 d 引入前,方案 a 相对分配比为 $(w_1 + w_2) / w_3$;方案 d 引入后,方案 a 相对分配比为 $w_1 / (w_2 + w_3)$ 。方案集的变化导致方案相对分配比发生变化,并且方案的排序向量元素之和始终为1,这使得方案排在相应位置上的可能性大小发生了改变,从而产生了逆序。

哈佛的心理学家 Arthur 在其著作中将判断分为两种类型:一是相对比较判断,即将事物与人们观察到的事物进行对比;二是绝对比较判断,即将事物与人们思维中存储的已有参照物或已有经验进行对比^[14]。Satty 将前者称之为相对测度,将后者称之为绝对测度^[4]。显然,线性分配方法用相对测度进行决策分析,方案集变动之前各指标下的最优方案与方案集变动之后各指标下的最优方案往往不一致,例如上述决策问题中方案 d 引入后,指标 f_2 下的最优方案由方案 a 改变为 d 。正是这些变动引起了原有方案相对分配比发生变化,从而导致逆序的产生。

以上分析过程可以推广到任意数量方案和任意数量指标的决策问题,即不管决策问题的指标集和方案集的数量是多少,利用线性分配方法求解决策

问题均可能产生逆序。

为了消除逆序,笔者在传统线性分配方法的基础上构建顺序线性分配方法。

4 顺序线性分配方法

假设运用传统线性分配方法对原有 n 个方案进行排序,得到方案集由优到劣序列为 $(k_{(1)}, \dots, k_{(n)})$, 即: $k_{(1)} \succ \dots \succ k_{(n)}$ 。顺序线性分配方法的基本思想是新方案 k_{new} 加入后,不再构建新的序权矩阵对所有的方案进行重新排序,而是首先将新方案 k_{new} 与 $k_{(1)}$ 利用线性分配方法进行排序:若 $k_{\text{new}} \succ k_{(1)}$, 则得新方案集的优劣次序为 $(k_{\text{new}}, k_{(1)}, \dots, k_{(n)})$; 否则将其与 $k_{(2)}$ 进行比较,以此类推,直到找到 $k_{(i)}$, $(1 \leq i \leq n)$ 满足 $k_{\text{new}} \succ k_{(i)}$ 为止,得到新方案集的优劣次序为 $(k_{(1)}, \dots, k_{\text{new}}, k_{(i)}, k_{(i+1)}, \dots, k_{(n)})$ 。若不存在 i , $(1 \leq i \leq n)$ 使 $k_{\text{new}} \succ k_{(i)}$ 成立,则新方案集的优劣次序为 $(k_{(1)}, \dots, k_{(n)}, k_{\text{new}})$ 。顺序线性分配方法的思想可用以下程序代码实现:

```
for  $i = 1: n$ 
  compare  $k_{\text{new}}$  and  $k_{(i)}$ 
  if  $k_{\text{new}} \succ k_{(i)}$  then break
end
```

可见,将方案 k_{new} 插入原有方案序中最多进行 n 次比较,最少进行 1 次比较,平均进行 $(n+1)/2$ 次比较。若有多个新方案加入,则按照上述思想,逐个将新方案排列到原有方案序中。当某个或者若干个方案从原有方案集中删除时,顺序线性分配方法也不再构建新的序权矩阵对删除方案后的方案集进行排序,而是从原有的排序结果中直接删除相应方案。依据顺序线性分配方法的排序过程,不难得出在顺序线性分配方法中,新方案的加入只会引起新方案与已有方案的比较,避开了原有方案之间的比较,从而避免了逆序的产生,使得排序结果保序。以下引用文献[10]的算例验证顺序线性分配方法的保序性。

5 算例

车间工艺选择是典型的多指标决策问题:某车间需要加工新零件,可供选择的工序方案有 3 种 ($x_1 - x_3$)。衡量工序优劣的指标为成本、寿命和时效,3 个指标的权重向量为 $(0.3, 0.4, 0.3)$ 。经技术人员核定得到方案 $x_1 - x_3$ 在各指标下的排序是:在成本

指标下 $x_3 \succ x_2 \succ x_1$ 成立;在寿命指标下 $x_1 \succ x_2 \succ x_3$ 成立;在时效指标下 $x_2 \succ x_1 \succ x_3$ 成立。利用线性分配方法对方案 $x_1 - x_3$ 进行排序得到 $x_1 \succ x_2 \succ x_3$ 。经过技术人员和管理人员的共同努力,发现另外 3 种工序方案 x_4, x_5 和 x_6 也可用于新零件加工,现在需要对这 6 种方案按照优劣次序进行排列。

按照顺序线性分配方法的步骤,首先比较方案 x_1 与 x_4 , 由于在成本指标、寿命指标和时效指标下均有 $x_1 \succ x_4$, 所以 $x_1 \succ x_4$ 成立;然后利用顺序线性分配方法比较方案 x_2 与 x_4 , 得到 $x_2 \succ x_4$ 成立;再利用顺序线性分配方法比较方案 x_3 与 x_4 , 得到 $x_3 \succ x_4$ 成立,则 $x_1 \succ x_2 \succ x_3 \succ x_4$ 成立。

同样,将方案 x_5 排入到已有方案序 $x_1 \succ x_2 \succ x_3 \succ x_4$ 中,经过 3 次比较得到 $x_1 \succ x_2 \succ x_5 \succ x_3 \succ x_4$ 成立。

最后按照顺序线性分配方法将方案 x_6 排入已有方案序 $x_1 \succ x_2 \succ x_5 \succ x_3 \succ x_4$ 中,经过 3 次比较得到 $x_1 \succ x_2 \succ x_6 \succ x_5 \succ x_3 \succ x_4$ 成立。故方案 x_1 为最优加工工序。

利用文献[13]的案例同样可以证明顺序线性分配方法是保序的:方案 d 引入之前,方案 $a - c$ 的排序结果为 $a \succ b \succ c$ 。方案 d 引入之后,首先利用线性分配方法将其与方案 a 进行比较,得到 $a \succ d$; 然后利用线性分配方法将 d 与方案 b 进行比较,得到 $d \succ b$, 则得到方案 d 引入之后,4 个方案的排序结果为 $a \succ d \succ b \succ c$ 。方案 d 引入前后,并没有引起原有方案排序的变化,达到保序的效果。

6 结语

线性分配方法需要决策者提供的基数信息较少,适合主观评价和决策。线性分配方法的决策结果可能产生逆序。笔者定义了排序向量和相对分配比的概念,分析了线性分配方法逆序产生的原因,最后在传统线性分配方法的基础上构建顺序线性分配方法,以确保决策结果保序。相对分配比等概念的提出以及顺序线性分配方法的构建扩展了多指标决策理论和方法,对消除其他决策方法的逆序问题提供了参考。

参考文献

- [1] 黄德才, 郑河荣. 两种多指标决策方法逆序的成因与消除[J]. 系统工程, 2001, 19(2): 93~96
- [2] Luce R D, Raifa H. Games and Decisions [M]. Wiley, New York,

- [3] Millet I, Saaty T L. On the relativity of relative measures — accommodating both rank preservation and rank reversals in the AHP [J]. *European Journal of Operational Research*, 2000, 121(1): 205~212
- [4] Satty T L. Rank from comparisons and from ratings in the analytic hierarchy/network processes [J]. *European Journal of Operational Research*, 2006, 168(2): 557~570
- [5] Stam A, Duarte Silva A P. On multiplicative priority rating methods for the AHP [J]. *European Journal of Operational Research*, 2003, 145(1): 92~108
- [6] 王莲芬, 朱枫涛. AHP中逆序问题的综述[J], *系统工程理论与实践*, 1994, (6): 1~7
- [7] 徐泽水. AHP中新元素导入的强保序性研究[J]. *控制与决策*, 2004, 19(4):433~436
- [8] 樊治平, 姜艳萍. 互补判断矩阵中导入新元素的强保序条件[J]. *系统工程学报*, 2003, 23(3): 37~40, 76
- [9] 余雁, 梁. 多指标决策 TOPSIS 方法的进一步探讨[J]. *系统工程*, 2003, 21(2):98~101
- [10] 黄德才, 郑河荣. 理想决策方法的逆序问题与逆序的消除[J]. *系统工程与电子技术*, 2001, 23(12):80~83
- [11] Wang X T, Triantaphyllou E. Ranking irregularities when evaluating alternatives by using some ELECTRE methods [J]. *Omega*(In Press, Available online 14 February 2006)
- [12] 章玲. 规范化公式对无关方案独立性的影响[J]. *系统工程*, 2005, 23(5): 28~29
- [13] 魏世孝, 周献中. 多属性决策理论方法及其在 C3I 系统中的应用[M]. 北京:国防工业出版社, 1998
- [14] Arthur B. *The Process of Cognition* [M]. Prentice Hall, Inc, Englewood Cliffs, New Jersey, 1977

Study on Rank Reversals in Liner Allocation Method

Zhang Ling, Zhou Dequn

(College of Economics and Management, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

[Abstract] The problem that the liner allocation method can result in rank reversal is pointed out. The concepts of sorting vectors and their relativity distribute ratios are proposed to explain the causes of rank reversal. The improved liner allocation method named sequence liner allocation method is analyzed to ensure rank preservation. Finally the conclusion is validated with specific data.

[Key words] decision making; liner allocation method; rank reversal; rank preservation