

暗挖海底隧道渗流量的解析解及其应用

皇甫明¹, 谭忠盛², 王梦恕², 王秀英²

(1. 中交隧道工程局有限公司, 北京 100011; 2. 北京交通大学土木建筑工程学院, 北京 100044)

[摘要] 基于复变函数保角变换的方法,在一定假设的前提下,推导了隧道周边为等水压、等水头及洞周为等水头(设注浆圈情况下)渗流量的解析解。运用所推导的渗流量计算公式,重点分析了渗流量与 $h/2r$ 和渗流量与注浆圈厚度的关系。

[关键词] 暗挖海底隧道;渗流量;解析解;保角变换

[中图分类号] U459 **[文献标识码]** A **[文章编号]** 1009-1742(2009)07-0066-05

1 前言

暗挖海底隧道位于海水之下,水压高,水源足,且不具备自然排水的条件,使其渗水问题远比陆地隧道严重得多。施工时渗流量的大小不仅会加大施工难度,影响施工进度,同时还会增加工程造价,严重时可能会导致灾难性的后果;后期运营时渗流量则决定了排水系统的规模,进而直接影响运营成本。因此,渗流量的计算对于暗挖海底隧道具有重要的意义,有必要对其进行分析。

目前,分析暗挖海底隧道渗流量时,通常采用数值分析方法、解析法及近似方法等,其中,数值方法对于复杂边界条件有很大的优势;解析法具有简洁方便、精度高及物理概念清晰等特点。EL. Tani M, K. H. Park、王建宇及王秀英等中外学者推导了不同情况圆形隧道渗流量的计算公式,但其实际应用时均有局限性^[1-5]。鉴于此,笔者运用复变函数的方法推导了不同情况下海底隧道渗流量计算公式,并加以分析,以为海底隧道施工和设计提供一些参考。

2 问题的描述

2.1 基本假设及研究思路

根据暗挖海底隧道的特点,建立几何模型(见图1),并提出以下假设条件:a. 隧道周边地层为各向同性的多孔连续介质;b. 渗流为无旋稳定;c. 地下水不可压缩;d. 隧道断面假设为圆形。

对于图1所示的渗流区域,复变函数的实部可描述势的分布,因而可用于描述水头分布;其虚部是流函数;速度分布由复势函数的导数给出。对于某些较为复杂边界形状内的流动,也可通过保角变换化成具有简单规则边界内的流动。笔者基于复变函数的方法对暗挖海底隧道渗流量进行求解,具体研究思路和步骤如下:

1) 将 z 平面上较复杂的问题借助保角变换映射到 ζ 平面上,在 ζ 平面上,复势函数的边界条件类型不变、渗流量不变;

2) 在 ζ 平面上解 Laplace 方程求出复势函数;

3) 用反变换求出 z 平面上的复势函数,即可得所需的全部结果。

2.2 平面稳定渗流的基本方程

根据地下水渗流的连续性原理,可得到均质、各向同性潜水含水地层二维稳定渗流的偏微分方程^[6],即

[收稿日期] 2009-02-04

[基金项目] 国家自然科学基金资助项目(50878019)

[作者简介] 皇甫明(1974-),男,内蒙古化德县人,博士,高级工程师,主要从事隧道与地下工程的施工管理与研究工作;

E-mail: hfm009@sina.com

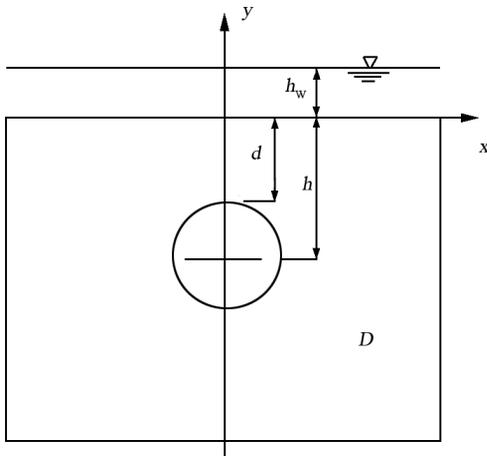


图1 海底隧道地层渗流区域的几何模型

Fig. 1 Geometry of the problem

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

式(1)中, $\varphi(x, y) = \varphi(z)$ 称为势函数。

根据达西 (Darcy) 定律, 渗流区域 D 中点 z 处的势函数可表示为

$$\varphi(x, y) = \varphi(z) = -kH = -k(y + p/\gamma_w) \quad (2)$$

式(2)中, k 为渗透系数; H 为水头或测压水头; p 为孔隙水压力; γ_w 为水容重。

2.3 保角变换

根据对称性, 取一半结构进行计算分析, 这样也可将多连通区域转变为单连通区域。基于映射函数(3)和(4)可将 z 平面区域映射为 ζ 平面矩形区域^[7,8], 具体见图2, 图中 φ_e, φ_w 分别指 AB 边和 CD 边的势函数。

$$w = u + iv = \frac{z + i \sqrt{h^2 - r^2}}{z - i \sqrt{h^2 - r^2}} \quad (3)$$

$$\zeta = \xi + i\eta = (Q_w/2\pi) \ln w = (Q_w/2\pi) \ln(u + iv) \quad (4)$$

式(3), (4)中, h 为隧道中心至基岩表面的深度; r 为隧道半径; Q_w 为渗流量。

将式(3)代入式(4), 并化简得

$$\zeta = \xi + i\eta = (Q_w/2\pi) \left[\ln(\rho/g) + i \cdot \operatorname{arctg} \frac{y + \sqrt{h^2 - r^2}}{x} - i \cdot \operatorname{arctg} \frac{y - \sqrt{h^2 - r^2}}{x} \right], (x \neq 0) \quad (5)$$

式(5)中

$$\rho = \sqrt{x^2 + (y + \sqrt{h^2 - r^2})^2},$$

$$g = \sqrt{x^2 + (y - \sqrt{h^2 - r^2})^2} \quad (6)$$

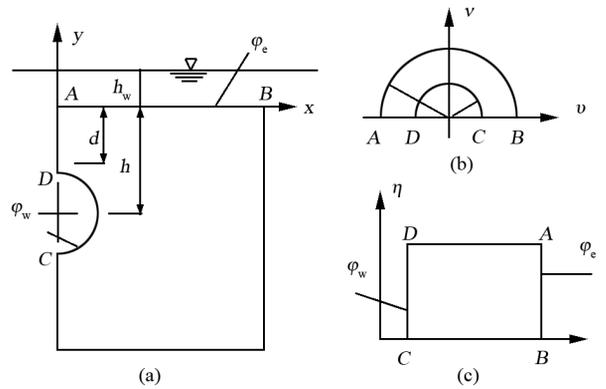


图2 保角映射示意图

Fig. 2 Plane of conformal transformation

通过以上变换, 可将 z 平面的渗流区域映射为 ζ 平面上的一个矩形, 在 ζ 平面上需首先确定势函数 $\varphi(\xi, \eta)$, 使得在矩形区域内其满足 Laplace 方程, 即

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} = 0 \quad (7)$$

3 问题的求解

3.1 洞周为等水头

当洞周为等水头时, 在满足 Darcy 定律的前提下, 势函数 $\varphi(\xi, \eta)$ 在 ζ 平面中的解可表示为

$$\varphi(\xi, \eta) = \varphi_w + \frac{\varphi_w - \varphi_e}{\xi_w - \xi_e} [\xi - \xi_w] \quad (8)$$

式(8)中, φ_w, φ_e 分别为图中 CD 边和 AB 边的势函数数值; ξ_w, ξ_e 分别为 ζ 平面中 CD 边和 AB 边对应的 ξ 值; h 为隧道中心至基岩表面的深度; r 为隧道半径; Q_w 为渗流量。

返回到 z 平面, 上式变为

$$\varphi(x, y) = \varphi_w + \frac{\varphi_w - \varphi_e}{(\ln \rho - \ln g)_w - (\ln \rho - \ln g)_e} \cdot [(\ln \rho - \ln g) - (\ln \rho - \ln g)_w] \quad (9)$$

在 z 平面中, 边界条件

$$y = 0: (\ln \rho - \ln g)_e = 0 \quad (10)$$

$$x^2 + (y + h)^2 = r^2: (\ln \rho - \ln g)_w = 2 \ln \left[\frac{h}{r} - \sqrt{\left(\frac{h}{r}\right)^2 - 1} \right] \quad (11)$$

将式(6), (10), (11)代入式(9), 简化后, 可得 z 平面势函数 $\varphi(x, y)$

$$\varphi(x, y) = \varphi_e + \frac{\varphi_w - \varphi_e}{2 \ln [h/r - \sqrt{(h/r)^2 - 1}]}$$

$$\left[\ln \frac{x^2 + (y + \sqrt{h^2 - r^2})^2}{x^2 + (y - \sqrt{h^2 - r^2})^2} \right] \quad (12)$$

同样地,流函数 ψ 也满足 Laplace 方程,根据以上变换,且在满足 Darcy 定律的前提下,可求得 ζ 平面中流函数 ψ 的解为

$$\psi(\xi, \eta) = \psi_w + \frac{\psi_w - \psi_c}{\eta_w - \eta_c} [\eta - \eta_w] \quad (13)$$

根据 ζ 平面的边界条件,并将流函数返回到 z 平面中,则得 z 平面流函数 $\psi(x, y)$

$$\psi = \frac{Q_w}{\pi} \times \left[\operatorname{arctg} \frac{y + \sqrt{h^2 - r^2}}{x} - \operatorname{arctg} \frac{y - \sqrt{h^2 - r^2}}{x} \right], \quad x \neq 0 \quad (14)$$

复势函数满足 Cauchy-Riemann 方程,即有

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (15)$$

将式(12)和(14)代入式(15),得渗流量 Q_w

$$Q_w = -\frac{k\pi(H_w - h_w)}{\ln[h/r - \sqrt{(h/r)^2 - 1}]} \quad (16)$$

值得强调的是, H_w 为洞周的水头值, h_w 为水深,在具体计算中需要给定。另外,以上计算结果仅为地层流量的一半,需要乘以系数 2,故隧道的渗流量 Q_w 为

$$Q_w = -\frac{2k\pi(H_w - h_w)}{\ln[h/r - \sqrt{(h/r)^2 - 1}]} \quad (17)$$

3.2 洞周为等水压

事实上, p 也满足 Laplace 方程,但在求解 p 时需要考虑地下水的容重,即与 y 值有关,不满足复变函数保角变换的条件,故不能用复变函数保角变换求解地层孔隙水压力分布函数 $p(x, y)$ 。为此,这里先假设不考虑地下水的自重场。

同样地,利用如上述复变函数保角变换的方法,可以推导出不考虑地下水自重作用下隧道渗流量(为了简便,这里仅考虑水压力为零的情况):

$$p'(x, y) = h_w \cdot \gamma_w + \frac{-\gamma_w h_w}{2\ln[h/r - \sqrt{(h/r)^2 - 1}]} \cdot \left[\ln \frac{x^2 + (y + \sqrt{h^2 - r^2})^2}{x^2 + (y - \sqrt{h^2 - r^2})^2} \right] \quad (18)$$

如上所述,孔隙水压力大小还与该点的坐标值 (x, y) 及水的容重 γ_w 有关,故孔隙水压力分布函数的表达式又可写为

$$p(x, y) = h_w \gamma_w + X(x, y) + \frac{-\gamma_w h_w + Y(x, y)}{2\ln[h/r - \sqrt{(h/r)^2 - 1}]} \cdot$$

$$\left[\ln \frac{x^2 + (y + \sqrt{h^2 - r^2})^2}{x^2 + (y - \sqrt{h^2 - r^2})^2} \right] \quad (19)$$

式(19)中, $X(x, y)$ 和 $Y(x, y)$ 为待定函数,其表达式由模型的边界条件确定。

当 $x \rightarrow \infty$ 或 $y \rightarrow \infty$ 时,有 $p(x, y) = h_w \cdot \gamma_w + X(x, y) = h_w \cdot \gamma_w - y \cdot \gamma_w$,故得

$$X(x, y) = -y \cdot \gamma_w \quad (20)$$

当 $x^2 + (y + h)^2 = r^2$ 时,有 $p(x, y) = 0 = -y \cdot \gamma_w + Y(x, y)$,则

$$Y(x, y) = y \cdot \gamma_w = \gamma_w \cdot \left[r \cdot \sin \left[\operatorname{arctg} \frac{h+y}{x} \right] - h \right] \quad (21)$$

将式(20)和(21)代入式(19),则得水压力为零时 $p(x, y)$

$$p = (h_w - y)\gamma_w + \frac{\gamma_w r \sin(\operatorname{arctg} \frac{h+y}{x}) - \gamma_w (h_w + h)}{2\ln[h/r - \sqrt{(h/r)^2 - 1}]} \cdot \left[\ln \frac{x^2 + (y + \sqrt{h^2 - r^2})^2}{x^2 + (y - \sqrt{h^2 - r^2})^2} \right] \quad (22)$$

由公式(2)可知势函数 $\varphi(x, y)$ 的表达式为

$$\varphi = kh_w + \frac{krsin(\operatorname{arctg} \frac{h+y}{x}) - k(h + h_w)}{2\ln[h/r - \sqrt{(h/r)^2 - 1}]} \cdot \left[\ln \frac{x^2 + (y + \sqrt{h^2 - r^2})^2}{x^2 + (y - \sqrt{h^2 - r^2})^2} \right] \quad (23)$$

为了便于求解水压力为零时隧道的渗流量,通过坐标变换,可将直角坐标系变换为极坐标,极坐标原点位于隧道的中心,然后按照饱和流中定义流函数的方法,沿洞周进行积分并整理得隧道渗流量 Q_w

$$Q_w = \frac{2k\pi \sqrt{h^2 - r^2}}{\ln r - \ln(h - \sqrt{h^2 - r^2})} - 4kh_w \cdot \frac{\operatorname{arctg} \left(\frac{r-h}{\sqrt{h^2 - r^2}} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{r+h}{\sqrt{h^2 - r^2}} \right)}{\ln r - \ln(h - \sqrt{h^2 - r^2})} \quad (24)$$

3.3 洞周为等水头(设注浆圈)

在穿越富水软弱破碎地段时,通常采用注浆加固围岩使其成为承载和堵水的主要结构,目前是解决海底隧道涌水突泥的主要措施之一,几何模型见图 3。结合以上所推导的计算公式,可得洞周为等水头且设置注浆圈的情况下隧道渗流量的解析解

$$Q_w = -\frac{2k_1 k_2 \pi (H_{in} - h_w)}{k_2 \ln[h/r_1 - \sqrt{(h/r_1)^2 - 1}] - k_1 \ln[r_1/r_2]} \quad (25)$$

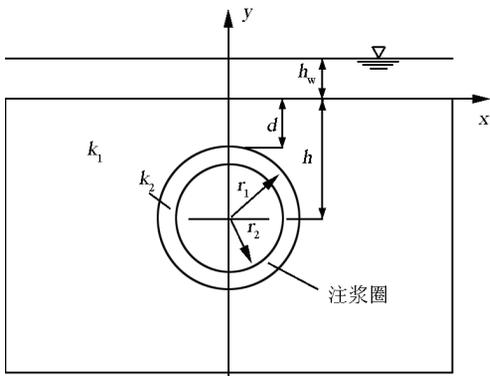


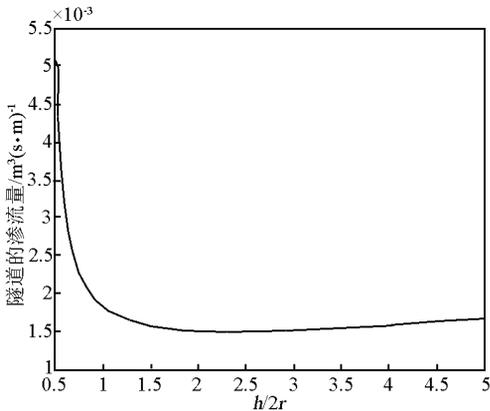
图3 渗流区域的几何模型
Fig. 3 Geometry of the problem

式(25)中, k_1 为初始地层的渗透系数; k_2 为注浆后地层的渗透系数; r_2 为隧道的半径; r_1 为注浆圈的外径, 则注浆圈的厚度为 $(r_1 - r_2)$ 。

4 参数分析

4.1 渗流量与覆盖层厚度的关系

在计算中, 假设海底隧道的工程条件为: $r = 5 \text{ m}$, $k = 10^{-5} \text{ m/s}$, 水深 $h_w = 30 \text{ m}$ 。图4为洞周水压为零的情况下隧道渗流量与覆跨比 $h/(2r)$ 之间的关系曲线, 其主要依据为公式(24)。



注: 地层渗透系数为 $k = 0.00001 \text{ m/s}$, 洞周的孔隙水压力值为零

图4 隧道渗流量与 $h/2r$ 的关系

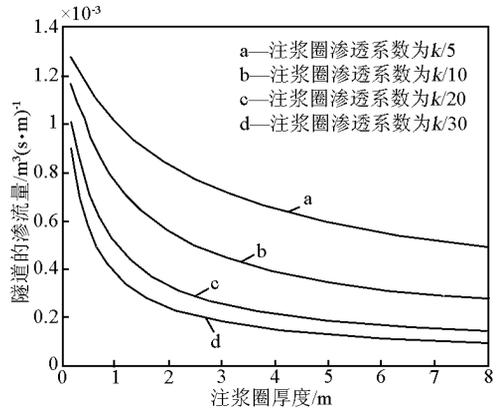
Fig. 4 Relation between water inflow and $h/2r$

从图4中可以看出, 当隧道覆跨比 $h/(2r)$ 小于 $2.0 \sim 2.5$ 时, 随着海底隧道覆跨比的逐渐增大, Q_w 则逐渐减少, 尤其是当覆跨比较小的情况下, Q_w 是成倍减小; 当覆跨比约等于 $2.0 \sim 2.5$ 时, Q_w 则为最小; 当 $h/(2r)$ 大于 $2.0 \sim 2.5$ 时, Q_w 虽有增大的趋势, 但变化量不大。以上结果表明, 在给定的地层情况下, 可以通过选择合理的隧道岩石覆盖层厚度来

减小施工过程中隧道的 Q_w 。

4.2 渗流量与注浆圈厚度的关系

不同注浆效果 Q_w 与注浆圈厚度之间的关系曲线如图5所示, 可看出随着注浆圈厚度的增大, Q_w 是逐渐减小的, 并趋向某一固定值, 这说明只有注浆圈厚度达到一定值时, 才能明显地起到堵水的效果, 进而满足隧道的安全开挖施工要求。此外, 图5也表明, 注浆效果越好, 所需注浆圈的厚度也就越小。由此可以看出, 在设计注浆圈时, 不仅需要考虑注浆圈的厚度, 更要考虑实际注浆堵水的效果。应该指出, 在同样的注浆水平下, 注浆圈厚度增至一定程度后, 其堵水效果就不太明显了。



注: 地层渗透系数为 $k = 0.00001 \text{ m/s}$, $r = 5 \text{ m}$,
水深 30 m , 埋深 20 m

图5 渗流量与注浆圈厚度之间的关系

Fig. 5 Relation between water inflow and grouting ring thickness

5 结语

基于复变函数的方法, 推导了暗挖海底隧道渗流量的计算公式, 其中包括隧道周边为等水头、等水压及洞周为等水头且设注浆圈的情况。这里特别值得一提的是, 在推导解析过程中, 笔者仅考虑了水面位于基岩上方这一情况, 事实上, 该公式还可用于水面位于基岩下方的情况, 在具体应用时仅需将公式中 h_w 设为零, h 变为隧道中心至水面的深度。此外, 重点研究及分析了 Q_w 与覆盖层厚度的关系、 Q_w 与注浆圈厚度的关系。通过以上研究, 得出以下几点主要结论:

1) 随着暗挖海底隧道覆跨比的增大, Q_w 是逐渐减小的, 当隧道覆跨比 $h/(2r)$ 约等于 $2.0 \sim 2.5$ 时, Q_w 达到最小值, 之后, 则 Q_w 则有增大的趋势, 但其变化量不大;

2)在穿越富水软弱破碎地段时,只有注浆圈的注浆厚度和注浆效果达到合理值时,才能起到良好的堵水效果。

参考文献

- [1] EL. Tani M. Circle tunnel in a semi - infinite aquifer[J]. Tunnelling and Underground Space Technology, 2003, 18(1): 49 - 55
- [2] Park K H, Owatsiriwon G A, Lee J G. Analytical solution for steady - state groundwater inflow into a drained circle tunnel in a semi - infinite aquifer: a revisit [J]. Tunnelling and Underground Space Technology, 2007, 22(4): 1 - 4
- [3] 王建宇. 再谈隧道衬砌水压力[J]. 现代隧道技术, 2003, (3): 5 - 9.
- [4] 王秀英, 王梦恕, 张 弥. 山岭隧道堵水限排衬砌外水压力研究[J]. 岩土工程学报, 2005, 27(1): 124 - 127
- [5] 王秀英. 山岭隧道堵水限排衬砌外水压力及结构设计研究[D]. 北京: 北京交通大学, 2005
- [6] Jacob Bear. Dynamics of Fluids in Porous Media[M]. Elsevier Publishing Company, 1972
- [7] Lei Shizhong. An analytical solution for steady flow into a tunnel [J]. Ground Water, 1999, 37(1): 23 - 26
- [8] 潘永亮. 复变函数[M]. 北京: 科学出版社, 2004

Analytical solutions for water inflow into an underwater tunnel and its application

Huang Fuming¹, Tan Zhongsheng², Wang Mengshu², Wang Xiuying²

(1. CCCC Tunnel Construction Engineering Company Ltd., Beijing 100011, China;

2. School of Civil Engineering, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

[Abstract] Based on the conformal mapping of the complex variable methods, analytical solutions for water inflow into an underwater tunnel are derived for a constant hydraulic head, constant water pressure and constant hydraulic head as well as grouting ring boundary condition at the tunnel perimeter. According to the proposed formula, relation between water inflow and $h/2r$, as well as grouting ring thickness, some valuable conclusions are proposed.

[Key words] underwater tunnel; water inflow; analytical solutions; conformal mapping