非等间距 GM(1,1)幂模型及其工程应用

王正新[1]，党耀国[2]，刘思峰[2]
(1. 浙江财经学院经济与国际贸易学院,杭州 310018; 2. 南京航空航天大学经济与管理学院,南京 210016)

[摘要] 针对工程中大量存在的非等间距序列的建模问题,提出了非等间距GM(1, 1)幂模型。以平均相对误差绝对值最小化为目标,以模型参数之间的关系为约束,构建了一个非线性优化模型实现非等间距GM(1, 1)幂模型的参数估计。结果表明,非等间距 GM(1, 1)幂模型的形式较为灵活,非等间距 GM(1, 1)模型和灰色 Verhulst 模型均是非等间距 GM(1, 1)幂模型的特殊情形,幂指数的优化有利于提高建模精度。最后通过一个工程实例验证了非等间距 GM(1, 1)幂模型的有效性与实用性。

[关键词] 灰色系统;非等间距序列;GM(1, 1)幂模型;参数优化
[中图分类号] N941.5 [文献标识码] A [文章编号] 1009－1742(2012)07－0098－05

1 前言

近年来,灰色系统预测方法[1,2]被广泛应用于非等间距序列的建模与预测,其应用范围主要集中在建筑物变形[3,4]、材料实验[5,6]、岩石力学[7]、资源勘探[8]等工程领域。由于灰建模不需要大量样本数据就能建模预测,且建模过程简单、易于操作,在小样本序列的短期预测中具有独特的优势,经典灰色预测模型同样具有较高的工程应用价值[9,10]。现有的非等间距灰色预测模型主要是经典 GM(1,1)模型和灰色 Verhulst 模型的简单推广,模型改进主要集中在背景值的优化。邓聚龙教授在分析非等间距序列的灰导数及其背景值的基础上,提出了非等间距 GM(1,1)模型[11]。文献[12]利用文献[13]优化的背景值构建非等间距 GM(1,1)模型,其建模精度高于直接建模法。文献[14]则将具有最优背景值[15]的 GM(1,1)模型拓展为非等间距模型,获得了较高的预测精度。文献[4]则通过优化非等间距灰色 Verhulst 模型的背景值,改善传统建模方法的模拟和预测精度。

GM(1,1)幂模型[1]是一种重要的非线性灰色模型,可以通过寻找与实际数据最匹配的幂指数,从而使得模型能够较好地反映数据的非线性特征。但是自从邓聚龙教授提出该模型以来,人们对它的关注甚少。笔者在文献[16]中首次提出了经典 GM(1,1)幂模型的求解方法,研究了模型解的性质。目前,经典 GM(1,1)幂模型还难以被应用到工程中大量存在的非等间距序列的建模中。文章将首先分析非等间距序列的生成方法,在此基础上将经典 GM(1,1)幂模型[16]拓展为非等间距 GM(1,1)幂模型,并研究模型中参数的优化问题。由于 GM(1,1)模型和灰色 Verhulst 模型均是 GM(1,1)幂模型的特殊形式。因此,只要能够通过恰当的手段找到非等间距 GM(1,1)幂模型的最优幂指数,其建模精度一定可以超越非等间距 GM(1,1)模型和灰色 Verhulst 模型。

2 非等间距 GM(1,1)幂模型

2.1 非等间距序列生成

序列生成是灰色系统建模的前提和基础,笔者首先给出非等间距序列的灰色累加生成、累减还原

[收稿日期] 2010－09－16
[基金项目] 国家自然科学基金项目(71101132,71071077)
[作者简介] 王正新(1981—),男,江苏高邮市人,浙江财经学院讲师,博士,研究方向为灰色系统理论、优化与决策;
E－mail: jenkin226@163.com

及均值生成的定义。

1）定义1：设序列

$X^{(0)}(t_k)=\{x^{(0)}(t_1),x^{(0)}(t_2),\cdots,x^{(0)}(t_n)\}$，

若间距 $\Delta t_k=t_k-t_{k-1}\neq \text{const}$，$k=2,3,\cdots,n$，则称序列 $X^{(0)}(t_k)$ 为非等间距序列。

2）定义2：设序列 $X^{(0)}(t_k)$ 为非等间距序列，若 $x^{(1)}(t_k)=\begin{cases}x^{(0)}(t_1) & k=1\\ \sum_{i=2}^{k}x^{(0)}(t_i)\Delta t_i & k=2,3,\cdots,n\end{cases}$，则称序列

$X^{(1)}(t_k)=\{x^{(1)}(t_1),x^{(1)}(t_2),\cdots,x^{(1)}(t_n)\}$ 为非等间距序列 $X^{(0)}(t_k)$ 的一阶累加生成（1－AGO，1－accumulated generating operation）序列。

3）定义3：设序列 $X^{(1)}(t_k)$ 如定义2所述，若

$$x^{(0)}(t_k)=\begin{cases}x^{(1)}(t_1) & k=1\\ \dfrac{x^{(1)}(t_k)-x^{(1)}(t_{k-1})}{\Delta t_k} & k=2,3,\cdots,n\end{cases},$$

则称序列

$X^{(0)}(t_k)=\{x^{(0)}(t_1),x^{(0)}(t_2),\cdots,x^{(0)}(t_n)\}$ 为非等间距序列 $X^{(1)}(t_k)$ 的一阶累减还原（1－IAGO，1－inverse AGO）序列。

4）定义4：设序列 $X^{(1)}(t_k)$ 为一阶累加生成序列，若 $z^{(1)}(t_k)=0.5\{x^{(1)}(t_k)+x^{(1)}(t_{k-1})\}$，$k=2,3,\cdots,n$。则称序列

$Z^{(1)}(t_k)=\{z^{(1)}(t_2),z^{(1)}(t_3),\cdots,z^{(1)}(t_n)\}$ 为非等间距序列 $X^{(1)}(t_k)$ 的紧邻均值生成序列。

2.2 非等间距GM(1,1)幂模型的建立

根据邓聚龙教授关于灰导数[1]的定义，可以得到非等间距序列的灰导数为：

$$\delta(t_k)=\frac{x^{(1)}(t_k)-x^{(1)}(t_{k-1})}{\Delta t_k}=\frac{\sum_{i=1}^{k}x^{(0)}(t_i)\Delta t_i-\sum_{i=1}^{k-1}x^{(0)}(t_i)\Delta t_i}{\Delta t_k}=x^{(0)}(t_k) \tag{1}$$

灰导数 $\delta(t_k)$ 的白化背景值为 $X^{(1)}(t_k)$ 的紧邻均值生成序列 $Z^{(1)}(t_k)$。

1）定义5：设 $X^{(0)}(t_k)$ 为非等间距序列，$x^{(0)}(t_k)$ 为灰导数，$Z^{(1)}(t_k)$ 为灰导数背景值，则称

$$x^{(0)}(t_k)+aZ^{(1)}(t_k)=b\{Z^{(1)}(t_k)\}^{\gamma} \tag{2}$$

为非等间距GM(1,1)幂模型的灰色微分方程（为了更好地区别模型中的发展系数 a，文章用 γ 表示文献[16]中的 α）。

当 $\gamma=0$ 时，式(2)为非等间距GM(1,1)模型；当 $\gamma=2$ 时，式(2)则为非等间距灰色Verhulst模型。由此可见，只要处理好幂指数 γ 的选取问题，非等间距GM(1，1)幂模型完全可以覆盖非等间距GM(1，1)模型和灰色Verhulst模型的应用范围，并超越它们的预测精度。

2）定理1：若 $\hat{a}=\{a,b\}^{\mathrm{T}}$ 为非等间距GM(1,1)幂模型的参数向量，则非等间距GM(1,1)幂模型参数的最小二乘估计为：

$$\hat{a}=\{\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y} \tag{3}$$

式(3)中，$\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}x^{(0)}(t_2)\\x^{(0)}(t_3)\\\vdots\\x^{(0)}(t_n)\end{bmatrix}$，

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-z^{(1)}(t_2) & 1\\-z^{(1)}(t_3) & 1\\\vdots & \vdots\\-z^{(1)}(t_n) & 1\end{bmatrix}$$

3）定义6：设 $X^{(0)}$ 为非等间距序列，$X^{(1)}(t_k)$ 为 $X^{(0)}(t_k)$ 的1－AGO序列，$\hat{a}=\{a,b\}^{\mathrm{T}}$，则称

$$\frac{\mathrm{d}x^{(1)}\{t\}}{\mathrm{d}t}+ax^{(1)}\{t\}=b\{x^{(1)}\{t\}\}^{\gamma} \tag{4}$$

为非等间距GM(1，1)幂模型的白化方程。

4）定理2：设 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{Y},\hat{a}$ 如定理1所述，$\hat{a}=[a,b]^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}$，则非等间距GM(1,1)幂模型的白化方程的解为：

$$\hat{x}^{(1)}(t)=\left\{\frac{b}{a}+c\mathrm{e}^{-(1-\gamma)at}\right\}^{\frac{1}{1-\gamma}} \tag{5}$$

若以 $x^{(1)}(t_k)$ 为初始值，非等间距GM(1，1)幂模型的时间响应序列为：

$$\hat{x}^{(1)}\{t_k\}=\left\{\frac{b}{a}+\left[\{x^{(0)}(t_1)\}^{1-\gamma}-\frac{b}{a}\right]\mathrm{e}^{-a(1-\gamma)(t_k-t_1)}\right\}^{\frac{1}{1-\gamma}} \tag{6}$$

还原值为：

$$\hat{x}^{(0)}(t_k)=\begin{cases}\hat{x}^{(1)}(t_1) & k=1\\ \dfrac{\hat{x}^{(1)}(t_k)-\hat{x}^{(1)}(t_{k-1})}{\Delta t_k} & k=2,3,\cdots,n\end{cases} \tag{7}$$

2.3 模型参数的确定

在实际应用中，可以利用非线性规划的方法来求解幂指数 γ。一旦 γ 确定，式(2)中的参数 a 和 b 也就确定了。首先将非等间距GM(1,1)幂模型中的参数 a

和 b 的代数表达式进行展开，经整理得：

$$a=\frac{\sum_{k=2}^{n}\left[z^{(1)}(t_k)\right]^{\gamma+1}\sum_{k=2}^{n}x^{(0)}(t_k)\left[z^{(1)}(t_k)\right]^{\gamma}-\sum_{k=2}^{n}\left[z^{(1)}(t_k)\right]^{2\gamma}\sum_{k=2}^{n}x^{(0)}(t_k)z^{(1)}(t_k)}{\sum_{k=2}^{n}\left[z^{(1)}(t_k)\right]^{2\gamma}\sum_{k=2}^{n}\left[z^{(1)}(t_k)\right]^{2}-\left[\sum_{k=2}^{n}\left[z^{(1)}(t_k)\right]^{\gamma+1}\right]^{2}} \tag{8}$$

$$b=\frac{\sum_{k=2}^{n}\left[z^{(1)}(t_k)\right]^{2}\sum_{k=2}^{n}x^{(0)}(t_k)\left[z^{(1)}(t_k)\right]^{\gamma}-\sum_{k=2}^{n}\left[z^{(1)}(t_k)\right]^{\gamma+1}\sum_{k=2}^{n}x^{(0)}(t_k)z^{(1)}(t_k)}{\sum_{k=2}^{n}\left[z^{(1)}(t_k)\right]^{2\gamma}\sum_{k=2}^{n}\left[z^{(1)}(t_k)\right]^{2}-\left[\sum_{k=2}^{n}\left[z^{(1)}(t_k)\right]^{\gamma+1}\right]^{2}} \tag{9}$$

以平均相对误差最小化为目标，以参数之间的关系为约束条件，可建立以下优化模型，以便求出最优的幂指数 γ 的值。

$$\underset{\gamma}{\mathrm{Min}}\,\bar{\Delta}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\hat{x}^{(0)}(t_k)-x^{(0)}(t_k)}{x^{(0)}(t_k)}\right|$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\gamma\neq 1\\ \hat{x}^{(1)}(t_1)=x^{(1)}(t_1)\\ \hat{x}^{(0)}(t_k)=\dfrac{\hat{x}^{(1)}(t_k)-\hat{x}^{(1)}(t_{k-1})}{\Delta t_k},k=2,3,\cdots,n\\ \hat{x}^{(1)}\left(t_k\right)=\left\{d+\left[\left(x^{(0)}(t_1)\right)^{1-\gamma}-d\right]e^{-a(1-\gamma)(t_k-t_1)}\right\}^{\frac{1}{1-\gamma}}\\ d=\dfrac{\sum_{k=2}^{n}\left[z^{(1)}(t_k)\right]^{2}\sum_{k=2}^{n}x^{(0)}(t_k)\left[z^{(1)}(t_k)\right]^{\gamma}-\sum_{k=2}^{n}\left[z^{(1)}(t_k)\right]^{\gamma+1}\sum_{k=2}^{n}x^{(0)}(t_k)z^{(1)}(t_k)}{\sum_{k=2}^{n}\left[z^{(1)}(t_k)\right]^{\gamma+1}\sum_{k=2}^{n}x^{(0)}(t_k)\left[z^{(1)}(t_k)\right]^{\gamma}-\sum_{k=2}^{n}\left[z^{(1)}(t_k)\right]^{2\gamma}\sum_{k=2}^{n}x^{(0)}(t_k)z^{(1)}(t_k)}\\ z^{(1)}(t_k)=0.5\left[x^{(1)}(t_k)+x^{(1)}(t_{k-1})\right]\end{cases} \tag{10}$$

为了去掉以上优化模型目标函数中的绝对值，引入以下定理。

引理 1[17]：对于任意 n 个实数 $f_1,f_2,\cdots,f_n$，有：

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\left|f_i\right|&=\sum_{i=1}^{n}\max\left\{f_i,-f_i\right\}\\&=\max\left\{\sum_{i=1}^{n}f_i,\sum_{i=1}^{n}f_i-2f_1,\sum_{i=1}^{n}f_i-2f_2,\cdots,\right.\\&\qquad\left.\sum_{i=1}^{n}f_i-2f_n,\cdots,\sum_{i=1}^{n}\left(-f_i\right)\right\}\\&=\max\left\{\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{B}_n\right\}\end{aligned} \tag{11}$$

其中，$\boldsymbol{A}_n=\left(f_1,f_2,\cdots,f_n\right)$，$\boldsymbol{B}_n$ 为 $n\times 2^n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}_n$ 的每一列都是 1 或 −1 允许重复的排列。

因此，文章优化模型中的目标函数可以转化为以下等价目标：

$$\mathrm{MinARPE}=\mathrm{MinMax}\left\{\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{B}_n\right\} \tag{12}$$

$$\boldsymbol{A}_n=\left(\frac{\hat{x}^{(0)}(t_1)-x^{(0)}(t_1)}{x^{(0)}(t_1)},\frac{\hat{x}^{(0)}(t_2)-x^{(0)}(t_2)}{x^{(0)}(t_2)},\cdots,\frac{\hat{x}^{(0)}(t_n)-x^{(0)}(t_n)}{x^{(0)}(t_n)}\right)$$

，$\boldsymbol{B}_n$ 的每一列都是 1 或 −1 允许重复的排列。

通过运筹学软件 LINGO（或 MATLAB、EXCEL 等）可以很方便地求解以上模型，得到参数 γ、a 和 b 的优化值。将以上方式获得的参数值代入非等间距 GM(1,1) 幂模型求解过程，便可以获得理论上误差最小的模拟结果。

3 工程实例

P. G. 福雷斯研究了温度对钛合金疲劳强度的影响，罗佑新从福雷斯所给实验曲线中采集到钛合金疲劳强度随温度变化的数据，如表 1 所示[5]。

表 1 钛合金疲劳强度随温度变化关系

Table 1 The relationship between the fatigue strength of titanium alloy and temperature

温度/℃	σ_{-1}
100	560
130	557.54
170	536.10
210	516.10
240	505.60
270	486.10
310	467.40
340	453.80
380	436.40

为了便于计算，对原始数据作如下线性变换 $T = 50 + 50t_k$，$k = 2,3,\cdots,9$；$x^{(0)} = (\sigma_{-1} - 400)/50$，变换后的数据见表2。

表2　钛合金疲劳强度随温度变化数据处理后的关系

Table 2　The data processed relationship between the fatigue strength of titanium alloy and temperature

t_k	$x^{(0)}$
1	3.2
1.6	3.151
2.4	2.722
3.2	2.32
3.8	2.112
4.4	1.722
5.2	1.348
5.8	1.076
6.6	0.728

1）非等间距 GM(1,1)模型[5]。文献[5]建立的 GM(1,1)模型时间响应式为：

$$\begin{cases} \hat{x}^{(0)}(t_1) = 3.2 \\ \hat{x}^{(0)}(t_k) = b_k e^{-0.258\,6(t_k-1)}, k \neq 1 \\ b_k = -19.659\,7\left[1 - e^{0.258\,6\Delta t_k}\right] \end{cases} \tag{13}$$

2）非等间距 GM(1, 1)幂模型。最优值 $\gamma = 0.003\,593$，$a = 0.250\,91$，$b = 4.291\,305$，可得时间响应式为：

$$\hat{x}^{(1)}(t_k) = \left[17.102\,98 - 13.916\,3 e^{-0.250\,01(t_k-1)}\right]^{1.003\,606} \tag{14}$$

还原值为：

$$\hat{x}^{(0)}(t_k) = \begin{cases} \hat{x}^{(1)}(t_1) & k = 1 \\ \dfrac{\hat{x}^{(1)}(t_k) - \hat{x}^{(1)}(t_{k-1})}{\Delta t_k} & k = 2,3,\cdots,9 \end{cases} \tag{15}$$

$$\hat{\sigma}_{-1}(t_k) = 400 + 50\hat{x}^{(0)}(t_k), k = 1,2,\cdots,9 \tag{16}$$

两种模型的模拟值与实际值的比较见表3。

由表3可看到，文献[5]的方法和文章提出的非等间距 GM(1, 1)幂模型都取得了较高的建模精度，但是非等间距 GM(1, 1)幂模型的误差显著小于文献[5]的方法。除第一个时点外，文章方法在每个时点的模拟误差都小于文献[5]的方法，总体来看，文章方法的平均误差仅为0.94 %，显著小于文献[5]的2.77 %。笔者认为，主要原因就在于非等间距 GM(1, 1)幂模型的形式较为灵活，可根据数据的特点调整模型的幂指数的大小。非等间距 GM(1, 1)模型直接取幂指数 $\gamma = 0$，而文章的优化结果显示 $\gamma = 0.003\,593$ 更适合本例中的原始数据。

表3　两种模型的模拟值与实际值的比较

Table 3　Comparison of the modeling results of the two grey models

t_k	σ_{-1} 实际值	文献[5]的方法		非等间距 GM(1,1)幂模型	
		模拟值	相对误差/%	模拟值	相对误差/%
1	560	560	0	560	0
1.6	557.54	541.28	2.92	562.12	0.81
2.4	536.10	557.30	-3.95	536.10	-0.01
3.2	516.10	527.91	-2.29	511.34	-0.92
3.8	505.60	479.99	5.07	493.33	-2.43
4.4	486.10	468.48	3.62	480.29	-1.20
5.2	467.40	476.26	-1.89	467.40	0
5.8	453.80	447.69	1.35	456.50	0.60
6.6	436.40	453.09	-3.82	447.43	2.53
平均绝对相对误差/%		—	2.77	—	0.94

4　结语

当非等间距 GM(1, 1)幂模型中的幂指数取0和2时，分别等价于 GM(1,1)模型和灰色 Verhulst 模型。非等间距 GM(1, 1)幂模型中的幂指数 γ 取值的多样性赋予了该模型形式的灵活性的特点，只要通过合适的方法获得最佳幂指数 γ 的值，则一定可以获得理想的建模精度，其应用范围已经覆盖了非等间距 GM(1, 1)模型和灰色 Verhulst 模型。由此可见，非等间距 GM(1, 1)幂模型在工程中有着更为广泛的应用前景。

参考文献

[1] 邓聚龙. 灰理论基础［M］. 武汉:华中科技大学出版社, 2002.

[2] Liu Sifeng, Lin Y. Grey Information Theory and Practical Applications[M]. London:Springer－Verlag, 2006.

[3] 齐长鑫,汪树玉. 灰色系统模型在坝基位移预测中的应用[J]. 水利学报,1996(9):49－52.

[4] 偶昌宝,俞亚南,王战国. 不等时距灰色 Verhulst 模型及其在沉降预测中的应用[J]. 江南大学学报(自然科学版),2005,4(1):63－65.

[5] 罗佑新,周继荣. 非等间距 GM(1,1)模型及其在疲劳试验数据处理和疲劳试验在线监测中的应用[J]. 机械强度, 1996,18(3):60－63.

[6] 郭丽萍,孙　伟,郑克仁,等. 非等时距 GM(1,1)直接模型及其在材料试验数据处理中的应用[J]. 东南大学学报(自然科学版),2004,34(6):833－837.

[7] 陈有亮. 非等距时序灰色预测方法及其在岩石力学与工程中的应用[J]. 系统工程理论与实践,2003,23(11):130－134.

[8] 田　敏. 煤层气资源量预测中的灰色系统理论研究［D］. 北京:中国石油大学,2008.

[9] 陈子锦,王福亮,陆守香. 灰色预测模型 GM(1,1)的适用性分析及在火灾风险预测中的应用[J]. 中国工程科学,2007,9(5):91－98.

[10] 毛占利,朱　毅,杨伯忠,等. 火灾事故的灰色－马尔可夫模型预测研究[J]. 中国工程科学, 2010, 12(1):98－101.

[11] Deng J L. A novel GM(1,1) model for non－equigap series[J]. The Journal of Grey System,1997,9(2):111－116.

[12] 戴文战,李俊峰. 非等间距 GM(1,1)模型建模研究[J]. 系统工程理论与实践,2005,25(9):89－93.

[13] 罗　党,刘思峰,党耀国. 灰色模型 GM(1,1)优化[J]. 中国工程科学,2003,5(8):50－53.

[14] 王叶梅,党耀国,王正新. 非等间距 GM(1,1)模型背景值的优化[J]. 中国管理科学,2008,16(4):159－161.

[15] 王正新,党耀国,刘思峰. 基于离散指数函数优化的 GM(1,1)模型[J]. 系统工程理论与实践,2008,28(2):61－67.

[16] 王正新,党耀国,刘思峰,等. GM(1,1)幂模型求解方法及其解的性质[J]. 系统工程与电子技术,2009,31(10):2380－2383.

[17] 王义闹,吴利丰. 基于平均相对误差绝对值最小的 GM(1,1)建模[J]. 华中科技大学学报(自然科学版),2009,37(10):29－31.

Non-equidistant GM(1,1) power model and its application in engineering

Wang Zhengxin[1], Dang Yaoguo[2], Liu Sifeng[2]

(1. School of Economics & International Trade, Zhejiang University of Finance & Economics, Hangzhou 310018, China; 2. College of Economics and Management, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

[**Abstract**] Aiming at the problem of modeling for non-equidistant sequence, the non-equidistant GM(1,1) power model was proposed. A non-linear optimization model is constructed with the objective of minimum average relative error, the constraints of relationships between parameters in order to optimize the power exponent and the background value. The results showed that the form of non-equidistant GM(1,1) power model was more flexible than the traditional ones. Both non-equidistant GM(1,1) model and Grey Verhulst model were the special cases of non-equidistant GM(1,1) power model. Optimization of power exponent helped to improve modeling accuracy. Finally, an engineering example of non-equidistant sequence shows modeling accuracy in traditional modeling, which was significantly improved by non-equidistant GM(1,1) power model.

[**Key words**] grey system; non-equidistant sequence; GM(1,1) power model; parameter optimization