Contents lists available at ScienceDirect

Engineering

journal homepage: www.elsevier.com/locate/eng

Research
Metamaterials—Review

工程化饱和介质中光学涡旋的调制不稳定性

D.G. Pires , N.M. Litchinitser *

Department of Electrical and Computer Engineering, Duke University, Durham, NC 27708, USA

ARTICLE INFO

Article history:
Received 28 November 2021
Revised 29 March 2022
Accepted 20 April 2022
Available online 24 August 2022

关键词
光学涡旋
轨道角动量
调制不稳定性
混浊介质

摘要

光束在水下环境、雾、云或生物组织等混浊介质中的传播在科学和技术中有着越来越重要的应用，包括生物成像、水下和自由空间通信技术。虽然这些应用在传统上依赖于常规的线性偏振高斯光束，但光具有许多未被发掘的自由度，如自旋角动量（SAM）和轨道角动量（OAM）。本文提出了具有"旋转"自由度的复杂光束在工程化非线性胶体介质中的非线性光-物质相互作用。利用变分法和摄动法，我们考虑了非圆柱光学涡旋、椭圆光学涡旋和高阶贝塞尔光束在时间上的积分（HOBBIT），来预测这些光束演化的动力学行为和稳定性。这些结果可应用于许多强散射环境下涉及光透射的情况。

1. 引言

自从提出定义明确的轨道角动量（OAM）[1]以来，具有OAM的光束被证明是光子学进步的一大重要工具。以存在方位相$e^{im\theta}$（其中，指数m被称为拓扑电荷，θ是方位角[2]）为特征的OAM光束可以实现许多应用，包括信息传输[3]、光镊[4–5]、量子隐形传态[6]和计算[7]。带有OAM的光，也被称为光学涡旋，通常具有环形的强度分布，可以通过许多光学技术测量其拓扑电荷，如干涉测量法[8]、狭缝衍射法[9–11]和倾斜透镜法[12]等。

在实验室中制造光学涡旋最常见的方法之一是使用空间光调制器（SLM）[13–14]。这种基于液晶的装置可接收通过计算机生成的相位掩模作为全息图，因此易于生成任意类型的光束。其他方法包括螺旋相位板（SPP）[15–16]和Q-PLATE，后者是另一种液晶装置，其横断面的局部光轴分布不均匀[17–18]。在集成光学领域，为了制造具有OAM的光束，需要有易于在芯片上集成的小型装置。为了满足这一需求，最新提出的产生光学涡旋的方法依赖于超表面，包括电介质[19]和等离子体[20–21]结构。

最常用的光学涡旋是环形的，但也有其他具有OAM且形状不同的光束。贝塞尔光束（BB）就是其中之一[22–23]，其强度分布由无限多同心环构成，且其具有自愈特性[24–26]。此外，高阶BB可应用于粒子捕获[27–28]和成像系统[29–30]。椭圆涡旋（EV）是另一类具有强度对称性且具有OAM的光束。Bandres和Gutiérrez-Vega [31–32]以及Schwarz等[33]首先对此进行了研究，通过求解椭圆坐标下的自由空间近轴波动方程发现了因斯-高斯

* Corresponding author.
E-mail address: natalia.litchinitser@duke.edu (N.M. Litchinitser).

2095-8099/© 2022 Published by Elsevier Ltd. on behalf of Chinese Academy of Engineering. This is an open access article under the CC BY-NC-ND license (http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).
英文原文：Engineering 2022, 17(10): 31–43
引用本文：D.G. Pires, N.M. Litchinitser. Modulational Instability of Optical Vortices in Engineered Saturable Media. *Engineering*, https://doi.org/10.1016/j.eng.2022.04.022

（IG）光束。将IG光束的偏心参数改为0和∞，IG光束可分别与拉盖尔-高斯光束（LG）和厄米-高斯光束（HG）联系起来。另一方面，通过改变LG模式中的变量可以产生EV [34]。椭圆参数η（假设值在0~1之间）的引入简化了EV的分析研究。椭圆形的马蒂厄光束（MB）与BB相似，其强度轮廓由无数个同心椭圆构成[35]。严格来说，实验室中并不能得到精确的BB和MB，因为它们的横剖面是无限的，这意味着需要无穷多的能量。但是实验室可以生成截断的BB和MB，并用于实验研究[36–37]。

近日有研究人员开发了非对称光束，他们使用声光偏转器（AOD）和对数极坐标光学，生成高阶贝塞尔光束在时间上的积分（HOBBIT）[38–39]。由于AOD的损伤阈值极高，这种方法能够生成可快速调谐的OAM光束，在亚微秒级响应时间和高功率激光系统下，其转换速度可达数十兆赫。这些特性使得HOBBIT适用于通过光路快速扫描OAM状态和探测湍流[40]，并且可能有助于需要快速转换OAM模式和高功率水平的通信协议。

光学涡旋领域最引人注目的研究方向之一是探索各种线性和非线性介质中光-物质的相互作用。尤其是在OAM光束存在的情况下，对二次谐波的产生[41]、光学克尔效应[42–43]、自聚焦[44–45]和光参量振荡[46]等非线性过程的研究。此外，纳米光子学的快速发展为“工程化”非线性介质开辟了新途径，以调整许多非线性光-物质相互作用，包括自聚焦、调制不稳定性（MI）和空间孤子的形成[47]。用变分法和摄动法可以对这些孤子进行稳定性分析[48]。精密设计的纳米胶体悬浮液促进了调节线性和非线性传播的新方法。有研究表明球形介电纳米粒子的液体悬浮液可以表现出极强的光学非线性[47]。纳米粒子悬浮液具有非线性的原因是当存在连续波时，光场介质纳米粒子受到一个与液体中的粒子极化性成正比的光学偶极力。对于折射率n_p高于周围液体n_b的粒子，其极化率为正，粒子会受到电致伸缩体积力，进入高强度的空间区域，从而增加了局部密度和局部折射率。对于光学涡旋的研究，已有预测和实验证明，方位角MI可能导致不同的非线性光束成形方式，这取决于介质的性质和OAM光束的初始参数。特别地，一种被称为项链光束（NB）的构成已经得到了证明[49–51]。

以往关于胶体悬浮液中非线性光-物质相互作用的研究大多聚焦于对称OAM光束，包括对称光涡旋中NB的形成[49,51]。同时也研究了这些NB的动力学，重点讨论了稳定性、轨迹和新光束结构的形成[50]。本文中，我们报道了几种形状复杂的OAM光束在负极化纳米胶体悬浮液中的行为。

本文结构如下：在第2节中，回顾了各种类型的OAM光束，包括LG光束、EV光束和HOBBIT光束；在第3节中，描述了全介质以及基于等离子体的具有饱和非线性的工程化胶体介质；在第4节中，进行线性稳定性分析，然后对每种光束进行完整的数值模拟；最后，在第5节中，总结了在饱和非线性纳米胶体介质中对非线性OAM光束传播的研究结果。

2. 具有轨道角动量的光束

2.1. 拉盖尔-高斯模式

让我们来考虑由LG模型定义的带有OAM的光束正交集，LG模型由指数p和m表征，二者分别表示径向阶数和拓扑电荷。当$p = 0$时，光模型可写作式（1）[1–2]：

$$\mathrm{LG}_m(r,\theta,z) = \frac{1}{\sqrt{\pi|m|!}}\frac{1}{w(z)}\left[\frac{r\sqrt{2}}{w(z)}\right]^{|m|}\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{w^2(z)}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left[m\theta+\frac{kr^2}{2R(z)}-\Psi_m(z)\right]} \tag{1}$$

式中，$w(z)=w_0\sqrt{1+\left(z/z_\mathrm{R}\right)^2}$是光束宽度；$R=z\left[1+\left(z_\mathrm{R}/z\right)^2\right]$是波前曲率半径；$\Psi_m(z)=\left(|m|+1\right)\arctan\left(z/z_\mathrm{R}\right)$是古依相位；$z_\mathrm{R}$是瑞利范围。这组光学模型是圆柱坐标下近轴近似亥姆霍兹方程的一个解集，图1显示了m值的强度分布。如果想获取OAM的行为、相互作用或特征，则通常令$z = 0$，研究m阶光涡旋[49]：

$$\mathrm{LG}_m(r,\theta,z=0)=A_m\left(\frac{r}{w_0}\right)^{|m|}\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{w_0^2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta} \tag{2}$$

其他具有OAM的光束还包括高阶贝塞尔光束[52]和圆形艾里光束[53]，它们分别构成圆柱坐标下亥姆霍兹方程和近轴波动方程的解。

2.2. 椭圆涡旋

从实验的角度来看，已经证明将轴对称光束斜射到光学元件（如锥形轴棱镜或二元衍射轴棱镜）上可以产生椭圆光束[54–55]。理论上，可以得到MB的亥姆霍兹方程的精确解[35]，它具有与BB相似的自愈特性。另一方面，在近轴近似下，因斯-高斯模型以解集的形式出现[31]。它们的偏心参数ε调节光束横向的椭圆度，当ε趋于零（无穷大）时转变为LG（HG）模型。尽管这些解的性能良好，但不容易对它们进行分析处理。因此，人们开发出了EV的另一种生成方法。经证明，仅增加椭圆度参数η（$0\leqslant\eta\leqslant1$），m阶椭圆光学涡旋有如下表达式[34]：

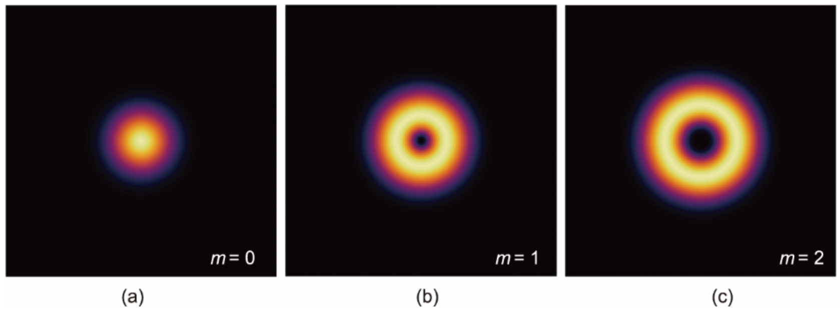

图1. LG模型的强度分布，拓扑电荷分别为$m = 0$（a）、$m = 1$（b）、$m=2$（c）。

$$U\left(r,\theta;\eta\right)=A_{m,\eta}\left(\frac{\eta r}{\sqrt{\cos^2\theta+\eta^2\sin^2\theta}}\right)^{|m|}\mathrm{e}^{\frac{-\eta^2 r^2}{2w_{m,\lambda}^2\left(\cos^2\theta+\eta^2\sin^2\theta\right)}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda z} \tag{3}$$

式中，$A_{m,\eta}$为振幅；$w_{m,\lambda}$为光束宽度；λ为传播常数。利用式（3）中的椭圆坐标，可以清晰地显示径向变量与角度有关，其中，$\tilde{r}=\frac{r}{\sqrt{\cos^2\theta+\eta^2\sin^2\theta}}$，$\theta=\arctan\left[y/(\eta x)\right]$。图2为不同椭圆度参数$\eta$下EV的强度分布。由于与常规的圆柱形光学涡旋相似，当圆柱形对称变为椭圆对称时，可以用这种方法来分析研究光学效应。

2.3. 时间积分的高阶贝塞尔光束

HOBBIT系统由一系列光学装置组成，专门用来制备撞击在对数极坐标光学元件上的入射光束。它将阵列中的每个高斯光束经过多次变换后转化为非对称的高阶贝塞尔-高斯光束，使得带有OAM的共传播高阶贝塞尔-高斯光束不断叠加。该技术应用广泛，包括量子通信协议、光束整形、丝状形成以及大气湍流和水下系统的感应方法。

当$z = 0$时，带有拓扑电荷m的HOBBIT系统的近场输出可表示为[38–40]

$$U\left(r,\theta\right)=A_{m,\lambda}\mathrm{e}^{-\left(r-r_0\right)^2/\left(2w_{m,\lambda}^2\right)}\mathrm{e}^{-\theta^2/\left(\beta^2\pi^2\right)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\theta} \tag{4}$$

式中，r_0为环半径；β为非对称参数；$A_{m,\lambda}$为振幅；$w_{m,\lambda}$为光束宽度。这样会形成一个非对称环形光束，其中不对称性由β控制。图3 [38]显示了拓扑电荷$m = \pm3$、±1.2和0时HOBBIT的振幅和相位分布图。参考文献[38]中提道，AOD与对数极坐标系统的耦合效率高达60%，这表明当输入功率为30 W时，输出功率约为18 W。

3. 饱和非线性介质

3.1. 自聚焦饱和非线性

最初，饱和非线性被引入作为对立方薛定谔方程（CSE）的修正，该方程是描述传统色散系统中慢变包络的一般方程[56]。与这些系统相互作用的光场由归一化方程描述[57–58]：

$$\mathrm{i}\partial_z\varphi+\frac{1}{2}\nabla_\perp^2\varphi+f\left(\left|\varphi\right|^2\right)\varphi=0 \tag{5}$$

式中，$\nabla_\perp^2=\partial_x+\partial_y$是拉普拉斯算子；$f\left(\left|\varphi\right|^2\right)$是与系统非线性响应有关的函数。例如，自聚焦饱和非线性可以表示为

$$f\left(\left|\varphi\right|^2\right)=\frac{\left|\varphi\right|^2}{1+\alpha_s\left|\varphi\right|^2} \tag{6}$$

式中，α_s是饱和参数。当$\alpha_s = 0$时，达到克尔极限。通过这种方法，可以证明带有OAM [57]、自俘获效应[58]和NB [59]的孤子解是存在的，此外还有其他发现。在图4中，笔者展示了带有OAM的孤子在饱和自聚焦介质中传播时方位角不稳定性的演变[57]。

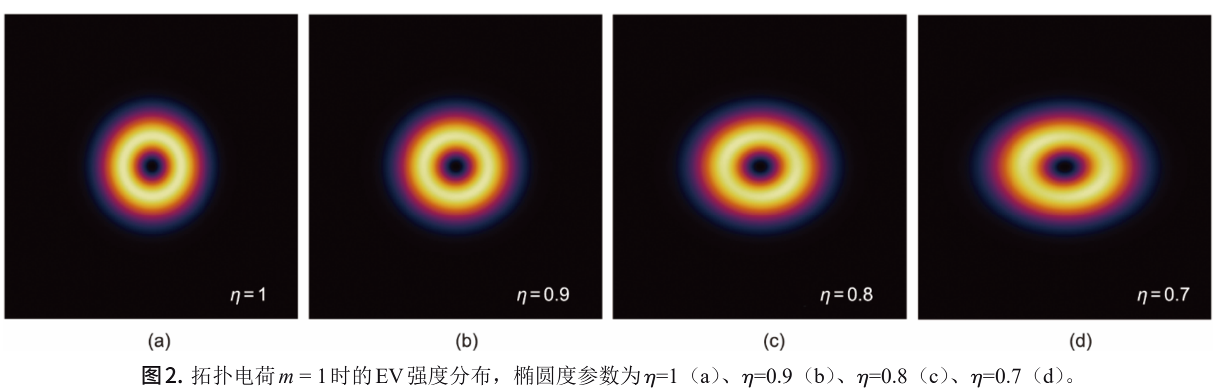

图2. 拓扑电荷$m = 1$时的EV强度分布，椭圆度参数为$\eta=1$（a）、$\eta=0.9$（b）、$\eta=0.8$（c）、$\eta=0.7$（d）。

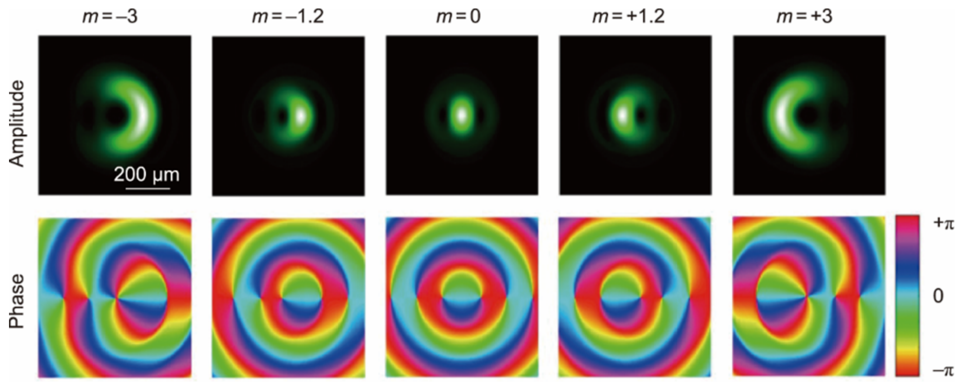

图3. 拓扑电荷$m = \pm3$、±1.2和0时HOBBIT的振幅和相位分布。此处β =0.66，$W_{m,\lambda}$=329 μm，r_0=850 μm [38]。

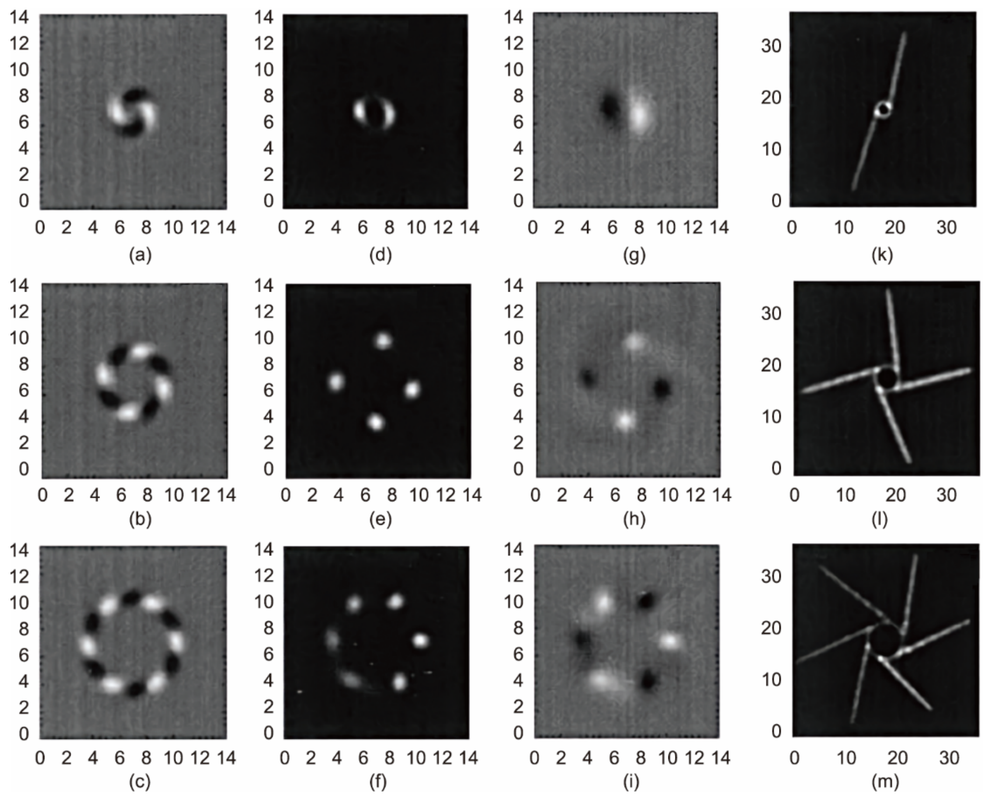

图4. 输入拓扑电荷为$l = 1$（上）、$l = 2$（中）、$l = 3$（下）时方位角调制不稳定性的发展和孤子轨迹。饱和参数和传播常数分别为$\alpha = 0.1$，$\kappa = 1$。（a）～（c）扰动场中增长率最大的实部；（d）～（f）孤子已经形成后光强的数值计算；（g）～（i）同一点处的电场实部，突出孤子之间的相位差；（k）～（m）在不同传播位置的叠加横向强度[57]。

3.2. 工程胶体悬浮液

El-Ganainy等[47]在2007年首次研究了纳米颗粒悬浮液的非线性响应。从粒子流连续性方程出发，利用能斯特-普朗克方程可以得到粒子流密度的表达式[47,60]：

$$\boldsymbol{J} = \rho \boldsymbol{v} - D\nabla\rho \tag{7}$$

式中，D表示扩散系数；$\boldsymbol{v}$表示粒子对流速度；ρ表示粒子浓度。这里，$\boldsymbol{v}$与作用在纳米颗粒上的光学力$\boldsymbol{F}$相关，$\boldsymbol{v} = \mu\boldsymbol{F}$，其中，$\mu$为粒子的迁移率。该模型忽略了粒子间的相互作用并假设了液体为高度稀释的混合物。将这些表达式组合起来，得到斯莫鲁霍夫斯基方程[47,60]:

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \left(\rho \boldsymbol{v} - D\nabla\rho\right) = 0 \tag{8}$$

为了解这个方程需要一些假设。首先，考虑稳态解（$\partial_t = 0$）。其次，当系统处于平衡状态时，扩散（$\boldsymbol{J} = 0$）主要起到平衡粒子运动的作用。最后，如果我们考虑瑞利条件（波长大于粒子尺寸），可以在偶极近似下得到外部光作用力，并表示为$\boldsymbol{F} = \alpha\nabla I/4$，其中，$I = |\varphi|^2$为光强，$\alpha$为粒子极化率[47]。在偶极近似下，可以将具有折射率n_p的球形粒子的极化率表示为[47,61]

$$\alpha = 3V_\mathrm{p}\varepsilon_0 n_\mathrm{b}^2\left(\frac{m_\mathrm{r}^2 - 1}{m_\mathrm{r}^2 + 2}\right) \tag{9}$$

式中，V_p为粒子的体积；ε_0为自由空间的介电常数；$m_r=n_p/n_b$为粒子的折射率n_p与周围环境的折射率n_b之比。注意，如果$m_r>1$（$m_r<1$），则极化率为正（负）。求解式（8），利用麦克斯韦-加内特公式，可以得到局部指数的变化[47,61–62]。在相对较小的指数对比度范围内（$|m_r<1|$），纳米悬浮液的光学非线性为[47]

$$\Delta n_{\mathrm{NL}}=\left(n_p-n_b\right)V_p\rho_0\left(\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{4k_BT}I}-1\right) \tag{10}$$

散射损耗也可以计算在内。在瑞利条件下，散射截面可表示为

$$\sigma=\frac{128\pi^5a^2n_b^4}{3}\left(\frac{a^4}{\lambda}\right)^4\left(\frac{m^2-1}{m^2+2}\right)^2 \tag{11}$$

式中，a代表粒子半径。通过纳米悬浮液体系可以得到光束演化方程的分量。在修改亥姆霍兹方程后，$\nabla^2\varphi+k_0^2n_{\mathrm{eff}}^2\varphi=0$，其中，$k_0=2\pi/\lambda$，该系统的非线性薛定谔方程（NLSE）为[47]

$$\mathrm{i}\partial_z\varphi+\frac{1}{2k_0n_b}\nabla_\perp^2\varphi+k_0\left(n_p-n_b\right)V_p\rho_0\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{4k_BT}|\varphi|^2}\varphi+\frac{\mathrm{i}}{2}\sigma\rho_0\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{4k_BT}|\varphi|^2}\varphi=0 \tag{12}$$

无论极化率为正还是负，非线性响应都是自聚焦的。极化率为正时，粒子的折射率高于周围环境（$n_p>n_b$），导致粒子向光移动，增加了散射损失。当极化率为负时（$n_p<n_b$），粒子向光束外部移动，减少了散射损失，从而使粒子在系统中的传播更加稳定。图5是具有正、负极化率的纳米悬浮液体系的粒子动态示意图[47]。

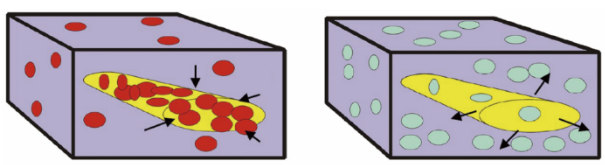

图5. 正极化率（a）和负极化率（b）下，高强度光束相互作用下的纳米粒子动态[47]。

3.3. 等离子体悬浮液

在上述全介质饱和非线性介质中，通常需要高功率照明来引发非线性响应。然而，用金属纳米粒子代替介电纳米粒子可以放宽对连续波（CW）激光器输入功率的要求[63]。参考文献[63]的作者利用各种金属结构，包括金纳米棒、硅-金纳米壳和金、银球，证明了非线性动态是由作用在粒子上的热响应、散射和光学力控制的。对于这一体系，可以通过引入热效应来扩展NLSE，经过一些代数运算后，它可以写成[63]：

$$\mathrm{i}\partial_z\varphi+\frac{1}{2k_0n_b}\nabla_\perp^2\varphi+k_0\left(n_p-n_b\right)V_p\rho\varphi-k_0\left|\Delta n_T\right|\varphi+\frac{\mathrm{i}}{2}\sigma\rho\varphi=0 \tag{13}$$

式中，ρ是粒子浓度；Δn_T是由热效应引起的折射率变化。热效应和非线性胶体响应之间的相互作用导致了非线性（与三次-五次饱和非线性介质相比）。

在参考文献[63]中，作者用实验证明了在正、负极化率金属纳米悬浮液中传播的高斯光束存在自俘获行为。图6是由金纳米棒组成的负极化率纳米悬浮液体系中的光束自俘获，图7是充满金[图7（a）～（d）]、银[图7（e）～（h）]粒子的正极化率介质中的相互作用[63]。

4. 方位角调制不稳定性

4.1. 圆形光学涡旋中NB光束的产生

在本节中我们将介绍研究光学涡旋在胶体介质中传播的调制不稳定性的理论模型。首先引入一些参数，$\xi=z/\left(2k_0n_bw^2\right)$、$X=x/w$、$Y=y/w$、$w^{-2}=2k_0^2n_b\left|n_p-n_b\right|V_p\rho_0$，来归一化式（12）。代入后，式（12）写为

$$\mathrm{i}\partial_\xi U+\nabla_\perp^2U+\left(a+\mathrm{i}\delta\right)\mathrm{e}^{a|U|^2}U=0 \tag{14}$$

式中，U为归一化场振幅；δ为损耗系数；ξ为归一化纵轴。这里，$a=1$（$a=-1$）表示极化率为正（负）。利用变分法[48]，可以推导出给定拓扑电荷m的光束宽度（$w_{m,\lambda}$）和光束振幅（$A_{m,\lambda}$）的表达式。将系统简化为（2+1）维问题后，无损耗情况下的哈密顿量表示为

$$H_{m,\lambda}=\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\left[\left|\partial_rU\right|^2+\left|\frac{\partial_\theta U}{r}\right|^2-\int_0^{|U|^2}f(u)\mathrm{d}u\right]r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \tag{15}$$

功率积分为

$$P_{m,\lambda}=\int_0^\infty\int_0^{2\pi}|U|^2r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \tag{16}$$

这里，非线性项是$f\left(|U|^2\right)=a\mathrm{e}^{a|U|^2}$。因为式（3）和式（4）是NLSE的不变量，可以求解变分问题$\delta S_{m,\lambda}=0$，其中，$S_{m,\lambda}=H_{m,\lambda}+\lambda P_{m,\lambda}$是作用量积分，用来确定$w_{m,\lambda}$和$A_{m,\lambda}$。让我们考虑沿平均半径$\bar{r}=\left(\int|U|^2r^2\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta/P_m\right)^{1/2}$下的摄动和振幅$U_0(\theta)=U\left(r=\bar{r}_m,\theta\right)$。对于圆形光学涡旋，摄动解可表示为

$$U_p(\xi,\theta)=\left[\left|U_0\right|+a_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(M\theta+\mu\xi)}+a_2^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(M\theta-\mu^*\xi\right)}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\xi+\mathrm{i}m\theta} \tag{17}$$

式中，$|U_0(\theta)|$是非摄动场；a_j是摄动振幅$\left[a_1(\theta),a_2^*(\theta)\ll\left|U_0(\theta)\right|\right]$，$j=1,2$。拓扑电荷指数$m$和$M$、传播常数$\lambda$和$\mu$

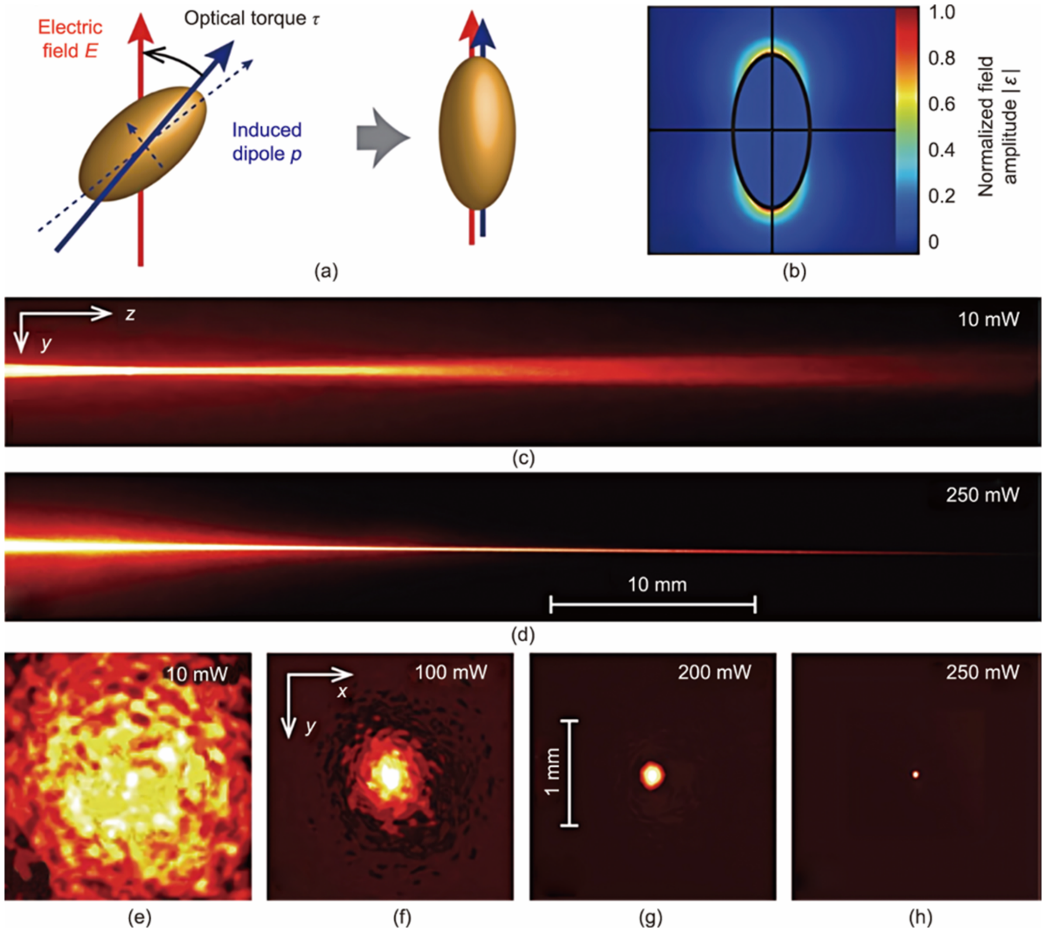

图6. （a）在线性极化电场作用下金纳米棒的定位，其主直径和次直径分别为100 nm和50 nm。（b）纵向等离子体共振下纳米棒周围的归一化场振幅。（c）低功率光束（10 mW）在含有悬浮金纳米棒的水溶液中的传播。（d）在负极化率胶体溶液中传播5 cm后，250 mW下形成稳定丝状结构。（e）～（h）输入功率不同的光束在传播（5 cm）后的横向光束轮廓，随着功率的增加，自俘获效应逐渐突出。输出轮廓已分别归一化到最大强度[63]。

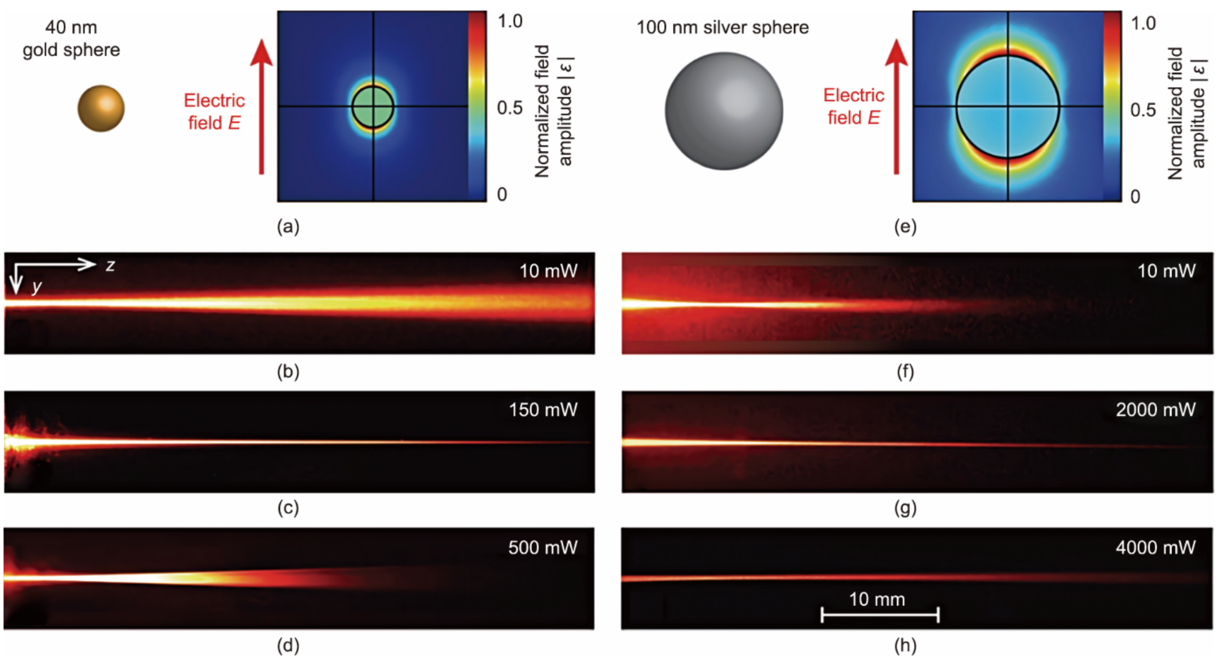

图7. （a）等离子体共振处，40 nm金球周围的归一化场振幅；（b）10 mW下的光传输；（c）150 mW下，热效应引起的正极化率悬浮液的自俘获；（d）500 mW下的热致性非线性离焦；（e）等离子体共振处，100 nm银球周围的归一化场振幅；（f）10 mW下，正极化率悬浮液的崩解；（g）2000 mW下，热效应开始平衡正极化率非线性效应，使光束稳定；（h）最终，热效应主导自聚焦非线性[63]。

分别适用于稳态解和摄动解。利用式（17）的解将式（14）线性化后，就能得到特征值问题：

$$\begin{bmatrix} A+\mu & B \\ -B & C+\mu \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}=0 \tag{18}$$

其中

$$\begin{aligned} A &= -\lambda-\frac{(m+M)^2}{r_{\mathrm{m}}^2}+f\left(\left|U_0\right|^2\right)+f'\left(\left|U_0\right|^2\right)\left|U_0\right|^2 \\ B &= f'\left(\left|U_0\right|^2\right)\left|U_0\right|^2 \\ C &= -A \end{aligned} \tag{19}$$

这里，$f\left(\left|U_0\right|^2\right)=a\mathrm{e}^{a\left|U_0\right|^2}$，对$|U_0|^2$的导数用“′”表示。这样就得到了两个表达式：一个与传播常数$\lambda=-m^2/r_m^2+f\left(\left|U_0\right|^2\right)$有关；另一个用于修正与MI相关的传播常数$\mu$。通过取$\mu$的虚部，得到MI增益[47,64]：

$$\operatorname{Im}(\mu)=\frac{M}{\dot{r}}\operatorname{Re}\left[\sqrt{2\left|U_0\right|^2 f'\left(\left|U_0\right|^2\right)-\frac{M^2}{\overline{r}^2}}\right] \tag{20}$$

在固定拓扑电荷m后，参考文献[49]证明了正极化率系统的MI增益比负极化率系统更高。对于不同的拓扑电荷，增益曲线Im(μ)是摄动方位角指数M的函数，见图8 [49]。这表明，对于固定的初始功率，当波束在正极化率下传播时，MI比负极化率时更早起作用。换句话说，正极化率系统随着粒子向光的移动而变得更加不稳定，增加了散射损失。此外，正极化率下NB的峰数比负极化率下要大。图9和图10显示了带有不同拓扑电荷m的光分别通过正极化率和负极化率的纳米悬浮液传播[49]。参考文献[51]使用负极化率纳米悬浮液进行实验并验证了这些结果。图11显示了初始拓扑电荷m = 1、2和4时NB的形成实验[51]。

4.2. 椭圆涡旋中的调制不稳定性

根据初始光束推导$w_{m,\lambda}$和$A_{m,\lambda}$的表达式是相当困难的。这里，我们考虑两种不同的非对称光束：EV和HOBBIT。对于后者，我们计算得到$w_{m,\lambda}$和$A_{m,\lambda}$的值，并通过MI增益估计其分解后的调制数。求解方程$\partial S_{m,\lambda}/\partial w_{m,\lambda}=\partial S_{m,\lambda}/\partial A_{m,\lambda}=0$得到：

$$w_{m,\lambda}^2=\frac{\eta^2}{\eta^2+1}\frac{\gamma(m+1)}{\lambda}\left[1+\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{\mathrm{c}}}\right)^{-\frac{1}{2}}\right] \tag{21}$$

$$A_{m,\lambda}^2=\frac{4\eta^2}{\eta^2+1}\frac{\gamma}{\beta}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{\mathrm{c}}}\right)^{-\frac{1}{2}}w_{m,\lambda}^{-2m-2} \tag{22}$$

式中，$\beta=2^{-2m-1}(2m)!/(m+1)!$；$\lambda_{\mathrm{c}}=3\beta^2(m+1)/(8\varepsilon)$，$\varepsilon=3^{-3m-1}(3m)!/(m+1)!$。由于椭圆对称性问题，上述表达式出现了$\gamma=1+I_\eta(\eta^2-1)/[2\pi(m+1)]$项，并且

$$I_\eta=\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2\theta\sin^2\theta\mathrm{d}\theta}{\left(\eta^2\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)^2} \tag{23}$$

可以用摄动法来研究由方位角MI引起的光束断裂成细丝的现象[48]。考虑平均半径$\overline{r}=\left(\int|U|^2r^2\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta/P_m\right)^{1/2}$下的摄动和稳态解$U_0(\theta)=U\left(r=\overline{r}_m,\theta\right)$中的振幅。这里，摄动解可以写成：

$$\begin{aligned} U_{\mathrm{p}}(\xi,\theta)=\Big[\left|U_0(\theta)\right|&+a_1(\theta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(M\theta+\mu\xi)}+ \\ &a_2^*(\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(M\theta-\mu^*\xi)}\Big]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\xi+\mathrm{i}m\theta} \end{aligned} \tag{24}$$

除摄动振幅$a_j(\theta)=\overline{a}_j\mathrm{e}^{-\eta^2\overline{r}^2/\left[2w_{m,\lambda}^2\left(\eta^2\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)\right]}/\sqrt{\eta^2\cos^2\theta+\sin^2\theta}$（$j$ = 1,2）外，上式中的变量与圆形光学涡旋的一致。EV的特征值问题是

$$\hat{L}\begin{bmatrix} a_1(\theta) \\ a_2^*(\theta) \end{bmatrix}=-\mu(\theta)\begin{bmatrix} a_1(\theta) \\ a_2^*(\theta) \end{bmatrix} \tag{25}$$

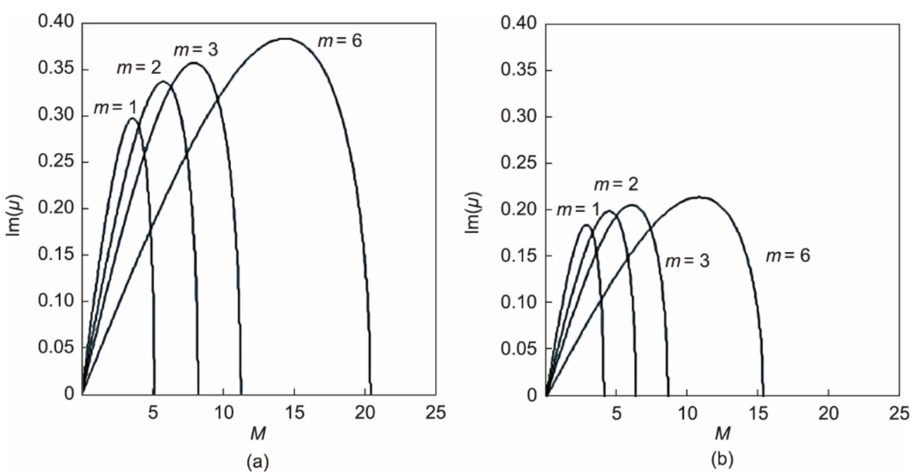

图8. 对于不同的初始拓扑电荷m，在正（a）和负（b）极化率悬浮液中，MI增益作为方位角摄动指数M的函数[49]。

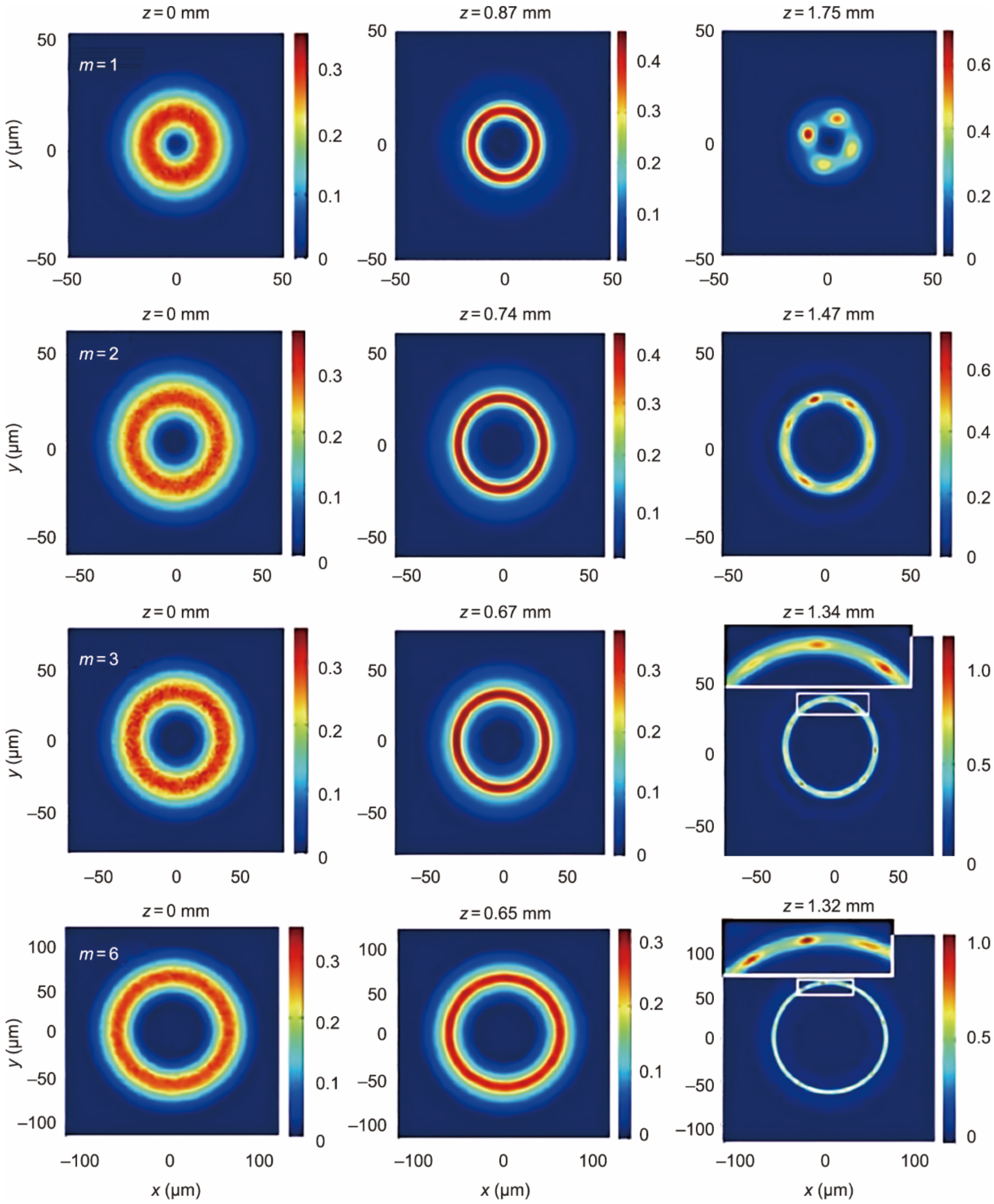

图9. 正极化率悬浮液中，当初始拓扑电荷 $m = 1, 2, 3, 6$ 时NB的强度分布。指示区域的详细信息显示在插图中[49]。

其中

$$\hat{L}=\begin{bmatrix} -\lambda+\hat{D}^{\eta}_{m+M}+g\left[\left|U_0(\theta)\right|^2\right] & \left|U_0(\theta)\right|^2 f'\left[\left|U_0(\theta)\right|^2\right] \\ -\left|U_0(\theta)\right|^2 f'\left[\left|U_0(\theta)\right|^2\right] & \lambda-\hat{D}^{\eta}_{m-M}-g\left[\left|U_0(\theta)\right|^2\right] \end{bmatrix} \tag{26}$$

$g[|U_0(\theta)|^2] = f[|U_0(\theta)|^2] + |U_0(\theta)|^2 f'[|U_0(\theta)|^2]$，“ ′ ”表示对自变量的导数，并且

$$\hat{D}^{\eta}_{\bar{M}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m+\bar{M})\theta}=\frac{1}{\bar{r}^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\frac{\mathrm{e}^{-n^2r^2/\left[2w^2_{m,\lambda}\left(\eta^2\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)\right]}}{\left(n^2\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)^{m/2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m+\bar{M})\theta} \tag{27}$$

上述表达式中，参数 $\bar{M} = 0, M, -M$ 与式（24）中摄动方位角电荷指数的三个可能值有关。通过求解上述一系列等式，可以得到传播常数 $\lambda=\hat{D}^{\eta}_0+f\left[\left|U_0(\theta)\right|^2\right]$ 以及MI增益的表达式：

$$\mathrm{Im}\left[\mu(\theta)\right]=\frac{M}{\bar{r}}\mathrm{Re}\left[\sqrt{2\left|U_0(\theta)\right|^2 f'\left(\left|U_0(\theta)\right|^2\right)-\frac{M^2}{\bar{r}^2}}\right] \tag{28}$$

对于规则的圆形涡旋，调制数和方位角的近似值由 $\mathrm{Im}[\mu(\theta)]$ 最大时的 M 值给出。此外还可以观察到 M 调制的距离与该点的MI增益值成反比。然而，对于椭圆涡旋，光束不是呈方位角对称的，MI增益取决于方位角。

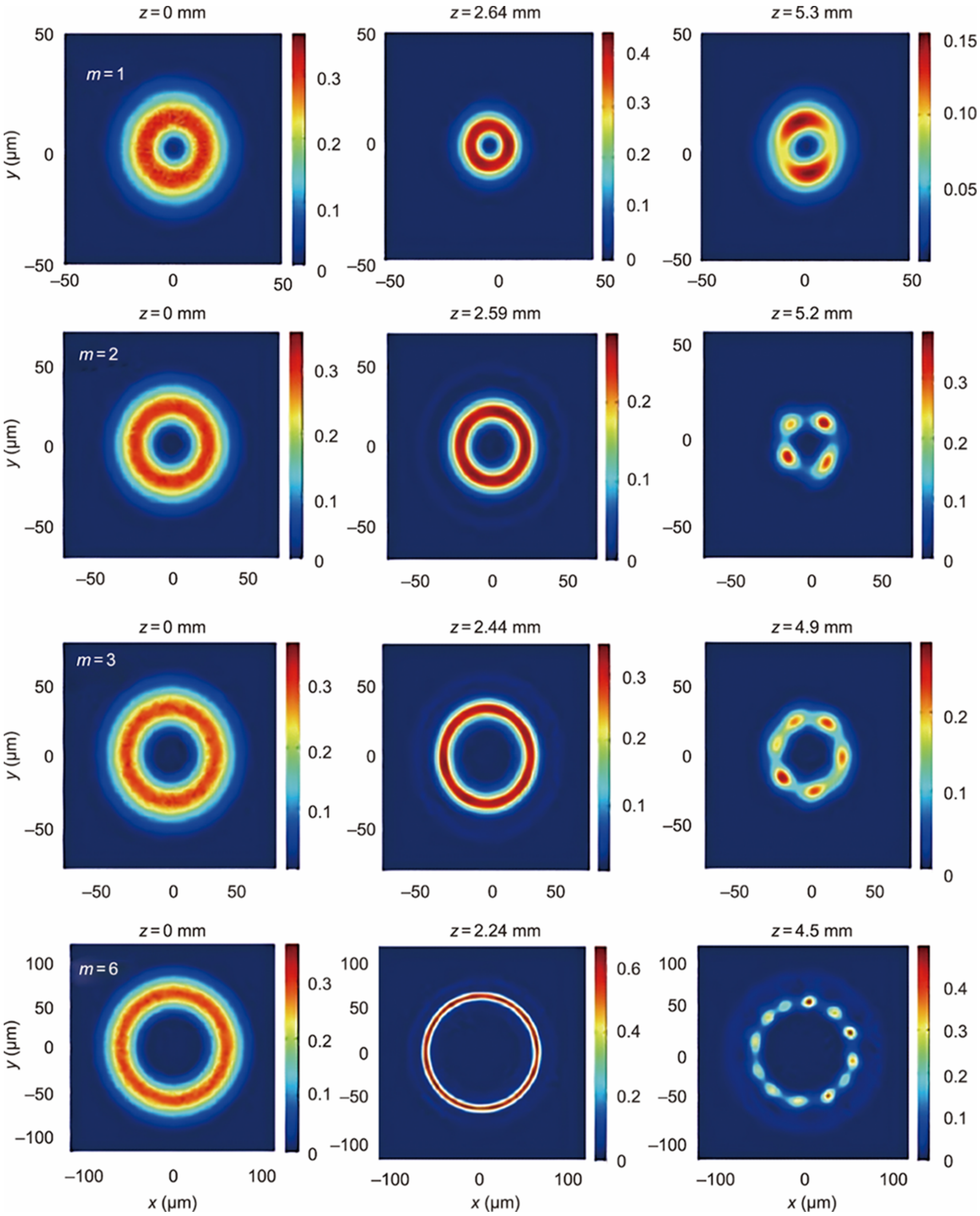

图10. 负极化率悬浮液中，当初始拓扑电荷 $m = 1, 2, 3, 6$ 时NB的强度分布[49]。

将方位角 $G_{LOC}(\theta)$ 上MI增益最大值的平均值作为该角度 $n_{loc}(\theta)$ 处MI增益最大值所对应的 M 加权值，可以得到期望的EV调制数：

$$N = \frac{\int_0^{2\pi} n_{loc}(\theta) G_{loc}(\theta) \mathrm{d}\theta}{\int_0^{2\pi} G_{loc}(\theta) \mathrm{d}\theta} \tag{29}$$

图12给出了在不同的 η 值下，拓扑电荷 $m = 2$ 和8时MI增益随摄动方位角指数 M 和方位角 θ 的变化曲线。可以发现，对于较小的 m 值，随着 η 的减小，涡旋变得更加不稳定。此外，在这种情况下，调制数 N 大致保持不变。另一方面，当 m 增大时，η 随 N 的增大而减小。

为了验证分析预测，利用光束传播法求解式（12），进行数值模拟[65–66]。将波长 $\lambda_0 = 532$ nm带入式（3）作为入射光束，加入10%的随机噪声以加快MI的增长。这里，我们考虑负极化纳米胶体悬浮液（$n_p < n_b$），它由半径为50 nm、折射率 $n_p = 1$ 且均匀分布在水中的气泡组成（$n_b = 1.33$），填充因子 $f_0 = V_p\rho_0 = 10^{-3}$。图13和图14所示为拓扑电荷 $m = 2$ 和8时，不同椭圆参数 η 下的涡旋传播动

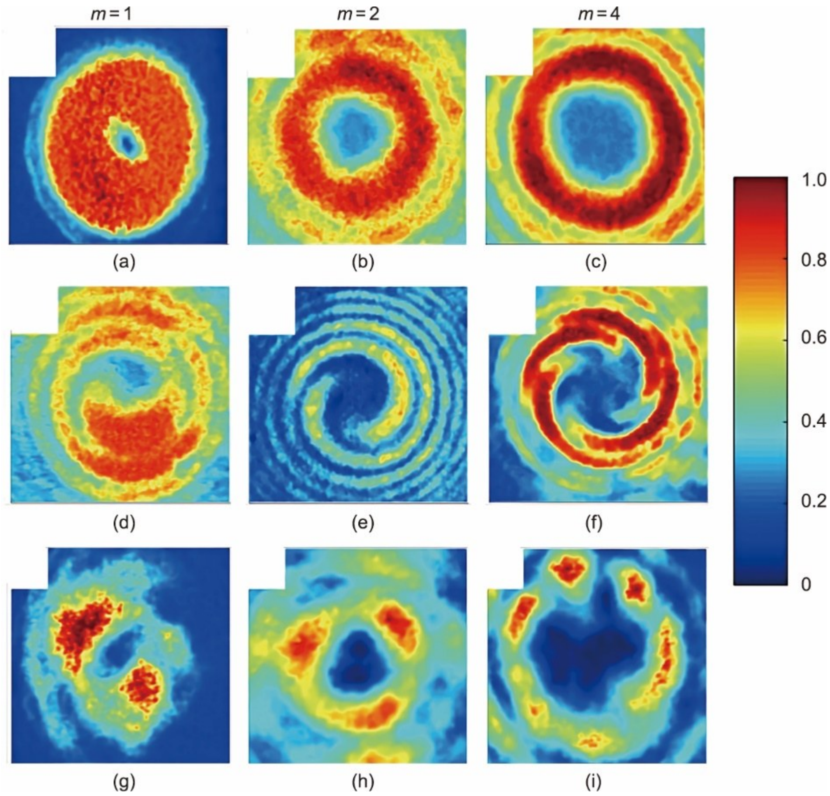

图11. 在负极化悬浮液中生成NB的实验评估。（a）～（c）带有拓扑电荷$m = 1$、$m = 2$、$m = 4$的初始涡旋的强度；（d）～（f）分别为（a）～（c）中每个初始光学涡旋的干涉图；（g）～（i）NB作为入射光束分别在（a）～（c）中传播后的强度[51]。

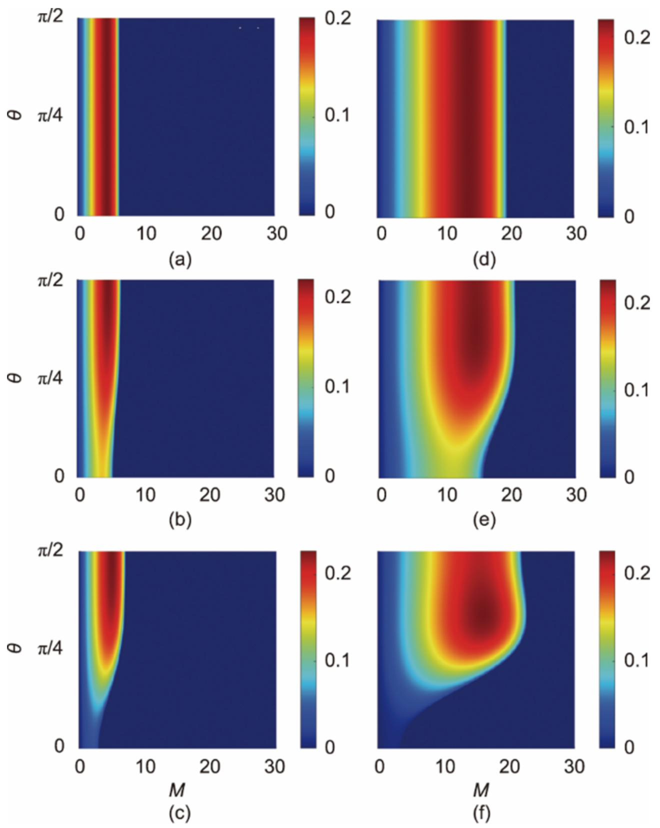

图12. 对于不同的椭圆参数η和拓扑电荷m，调制不稳定性增益$\mathrm{Im}[\mu(\theta)]$随摄动方位角指数M和方位角θ的变化曲线，（a）～（c）$m = 2$，（d）～（e）$m = 8$。每条曲线上都标注了η值。

态。第一列代表带有噪声的初始稳态解，第二列是对应于方位角MI产生的NB。输入功率水平P_m^η表示光束宽度在传播过程中保持恒定。功率水平较高（较低）时，自聚焦效应（衍射）开始起主导作用。对于低阶拓扑电荷，不同η值的调制数保持不变，随着光束的椭圆化，调制数变得不稳定。当η值较小时，拓扑电荷m越大，调制数越大。此外，如前所述，在这里也观察到与传播同时进行的旋转[34]。

注意，当我们传播入射光束时，MI首先作用于$\theta = \pi/2$和$\theta = 3\pi/2$附近。这可以通过对椭圆光束与纳米胶体悬浮液相互作用的几何分析进行合理解释。$\theta = \pi/2$处的局部曲率半径大于$\theta = \pi$处。所以，在$\theta = \pi/2$处使圆对称涡旋稳定下来所需的功率要高于半径较小的$\theta = \pi$处。因此，MI在$\theta = 0$、π处的作用时间比在$\theta = \pi/2$、$3\pi/2$处更长。当然，光束传播过程中的稳定性也受到功率分布对称性的影响。随着拓扑电荷的增大，沿光束剖面的局部曲率半径变化减慢，导致椭圆短半轴周围的功率分布更稳定。相反，低阶EV沿场分布的曲率变化更快，功率分布更不均匀。这种功率分布的差异强烈影响了发生MI的纵向和横向位置，导致带有较高（较低）拓扑电荷的EV传播更稳定（更不稳定）。图15具有更好的可视化效果。

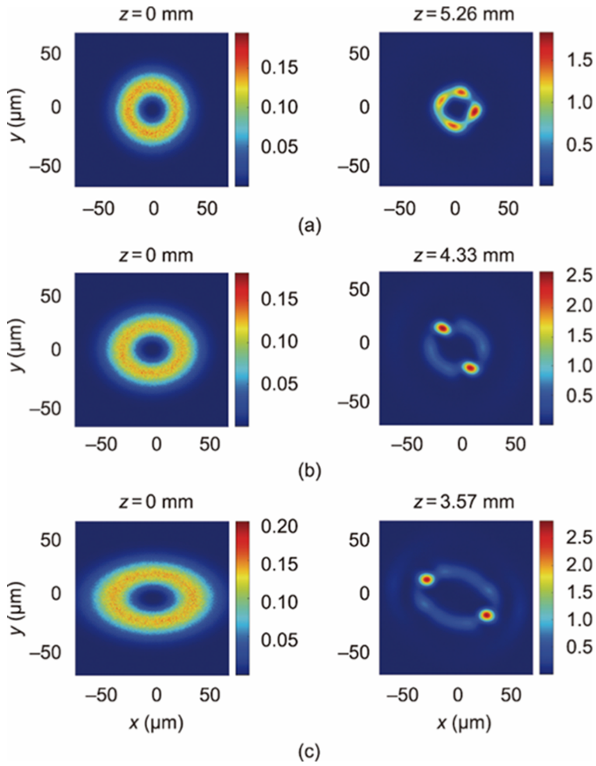

图13. 拓扑电荷$m = 2$时的EV、$|U|^2$（10^{13} $V^2 \cdot m^{-2}$）的强度分布，其中，每个椭圆参数和功率水平分别为：（a）$\eta = 1.0$ ($P_2^{1.0} = 6.6$ W)；（b）$\eta = 0.8$ ($P_2^{0.8} = 7.5$ W)；（c）$\eta = 0.6$ ($P_2^{0.6} = 11$ W)。

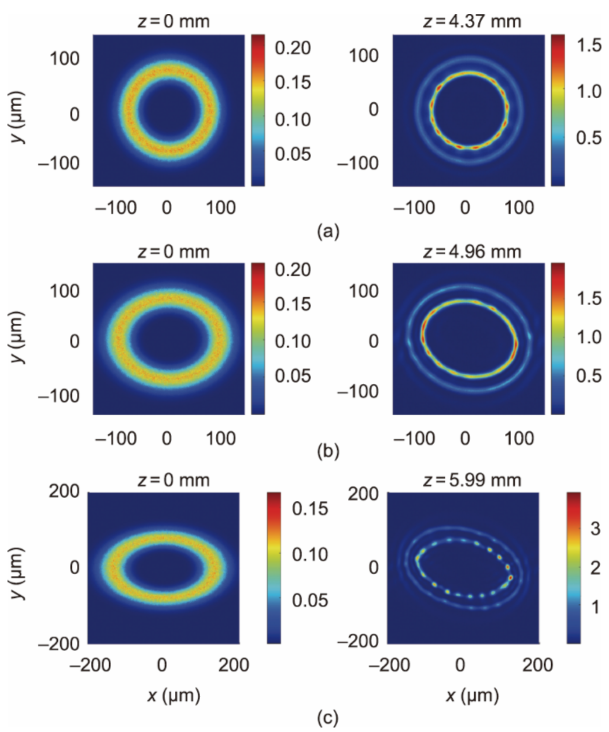

图14. 拓扑电荷m = 8时的EV、$|U|^2$（10^{13} $V^2 \cdot m^{-2}$）的强度分布，其中，每个椭圆参数和功率水平分别为：（a）$\eta = 1.0$ ($P_8^{1.0} = 46$ W)；（b）$\eta = 0.8$ ($P_8^{0.8} = 52$ W)；（c）$\eta = 0.6$ ($P_8^{0.6} = 56$ W)。

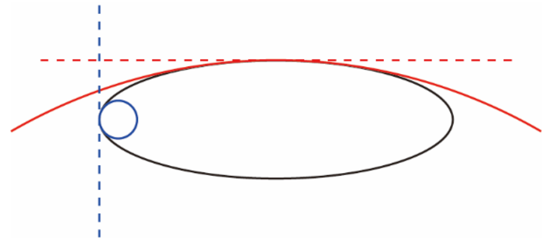

图15. 为了具有更好的可视化效果，做出椭圆不同点处的MI示意图。在$\theta = \pi$（蓝线）处，半径等于局部曲率倒数的圆小于$\theta = \pi/2$（红线）处的圆。两处的切线用虚线表示。

4.3. HOBBIT光束

就像上一节所介绍的那样，我们必须求解方程$\partial S_{m,\lambda}/\partial w_{m,\lambda} = \partial S_{m,\lambda}/\partial A_{m,\lambda} = 0$才能得到使光束宽度$w_{m,\lambda}$和振幅$A_{m,\lambda} = 0$的值。第一步是构造一个关于光束宽度和振幅的作用面$S_{m,\lambda}$，然后计算$\partial S_{m,\lambda}/\partial w_{m,\lambda} = 0$和$\partial S_{m,\lambda}/\partial A_{m,\lambda} = 0$之间的交点。两条曲线的交点对应于解变分问题$\delta S_{m,\lambda} = 0$所得的$w_{m,\lambda}$、$A_{m,\lambda}$的值。图16分别为拓扑电荷$m = 1$和2时的作用面$S_{m,\lambda}$和相交曲线。

HOBBIT的场分布相对于方位角θ是极不对称的，式（28）中的MI增益也取决于θ，期望的调制数可以通过式（29）来计算。图16显示了拓扑电荷$m = 1$和2时MI

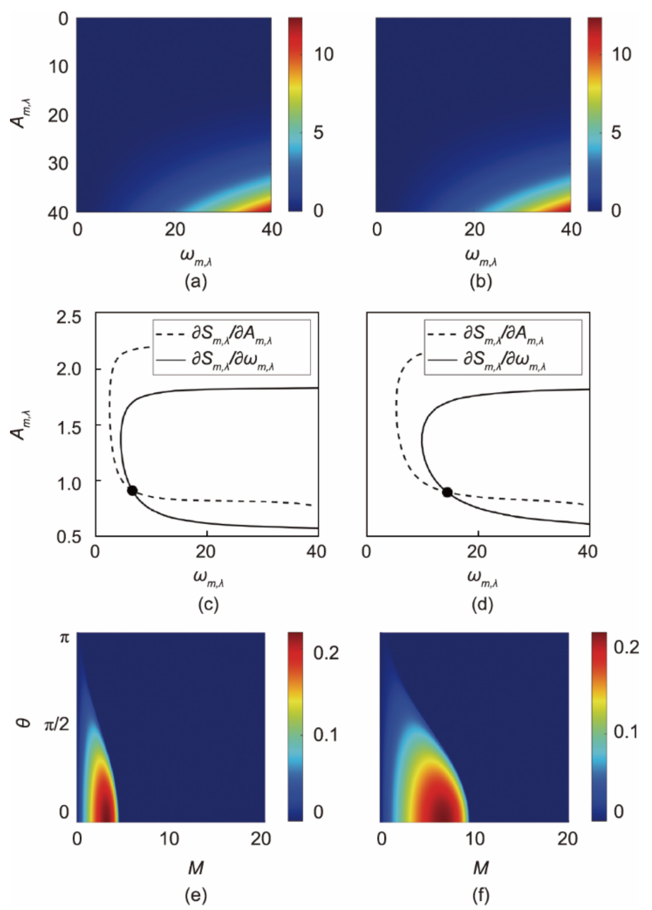

图16. 构造MI增益面的数值方法。$m = 1$（a）和$m = 2$（b）时的作用面$S_{m,\lambda}$；$m = 1$（c）和$m = 2$（d）时曲线$\partial S_{m,\lambda}/\partial w_{m,\lambda} = 0$和$\partial S_{m,\lambda}/\partial A_{m,\lambda} = 0$的交点；$m = 1$（e）和$m = 2$（f）时，$\mathrm{Im}[\mu(\theta)]$曲线随摄动方位角指数$M$和方位角$\theta$的变化而变化。

增益面随摄动方位角指数M和方位角θ的变化函数。这种情况下的整体表现类似于之前提到的常规圆形涡旋光束，但MI所导致的光束断裂的距离随着m的增大而减小。与常规光束和EV相比，HOBBIT在胶体介质中传播时更为稳定，因为与其他光束相比，调制持续进行的距离更长。

按照之前给出的步骤，我们使用上一节的相同参数，用数值模拟法求解式（12）。这里使用的光束参数为$\rho_0 = 8.6\ \mu m$和$\beta = 0.6$。图17为拓扑电荷$m = 1$和2时HOBBIT在负极化率纳米胶体介质中的演变。按照本节给出的计算方法，我们也可以预测非对称光束的调制数。在这种情况下，期望的调制数与通过式（12）模拟该动态后观察到的结果相匹配。与EV的情况类似，当我们增加HOBBIT的拓扑电荷时，断裂距离也会增加。此外，在传播过程中再次观察到了光束旋转的现象。参考文献[34,67]指出这是非圆形光束传播的预期结果。通过对自由空间中传播的输入光束进行傅里叶变换，可直接计算这种旋转，在与饱和介质相互作用的情况下也可以观察到同样的情况。

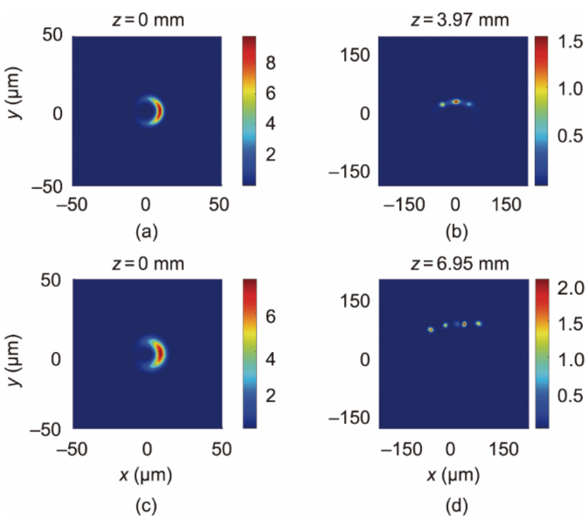

图17. 当HOBBIT的拓扑电荷和功率水平分别为$m = 1$ ($P_1 = 13$ W)（a,b）和$m = 2$ ($P_2 = 15$ W)（c,d）时，$|U|^2$（$10^{13}\ V^2 \cdot m^{-2}$）的强度分布。

5. 结论

本文讨论了形状复杂的OAM光束在饱和非线性纳米胶体介质中的传播。第一部分概括了圆形光学涡旋在纳米悬浮液中传播的非线性响应。同时还考虑了非圆柱形光束、EV的分析方法和HOBBIT的数值计算。研究发现，在光束缺乏圆柱对称性的情况下，MI增益面与方位角坐标θ有关，据此提出了需要修改平均MI增益来预测NB形成的方法。结果表明，在适当的拓扑电荷值下，经修正后的方法与全数值模拟结果能够较好吻合。然而，当拓扑电荷增大到特定值（如$m > 10$）以上时，分析预测与数值模拟结果有偏差。事实上，即使是对于圆柱对称涡旋，也可以预见到这些偏差，因为与MI增益面最大值相关的平面区域变大了。摄动的几个M值产生了近乎相同的MI增益，因此有相同的增长概率。这一结论表明，对于高阶涡旋，必须找到一种新的方法来预测胶体介质中NB的形成。使用OAM作为正交态的光学通信协议在空气或水中传播，由于介质的非静态性质，可能会遇到悬浮的粒子[68]。此外，还可以利用粒子与周围环境之间的折射率差异来开发新的光学通道净化方法。在其他应用方面，了解光如何与粒子悬浮液相互作用或有助于开发或改进成像系统[69]、传感技术[70]和光学层析成像[71]等。在小型系统中，可以利用超表面生成带有OAM的微米级或纳米级光束。例如，在化学水环境和生物悬浮液等足够小的系统中，超表面的使用既提高了传输效率，又促进了光学涡旋的产生。

Acknowledgements

We acknowledge the support from the Office of Naval Research MURI (N00014-20-1-2550).

Compliance with ethics guidelines

D. G. Pires and N. M. Litchinitser declare that they have no conflict of interest or financial conflicts to disclose.

References

[1] Allen L, Beijersbergen MW, Spreeuw RJC, Woerdman JP. Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre–Gaussian laser modes. Phys Rev A 1992;45(11):8185–9.
[2] Yao AM, Padgett MJ. Orbital angular momentum: origins, behavior and applications. Adv Opt Photonics 2011;3(2):161–204.
[3] Willner AE, Huang H, Yan Y, Ren Y, Ahmed N, Xie G, et al. Optical communications using orbital angular momentum beams. Adv Opt Photonics 2015;7(1):66–106.
[4] Padgett M, Bowman R. Tweezers with a twist. Nat Photonics 2011;5(6):343–8.
[5] Woerdemann M, Alpmann C, Esseling M, Denz C. Advanced optical trapping by complex beam shaping. Laser Photonics Rev 2013;7(6):839–54.
[6] Aolita L, Walborn SP. Quantum communication without alignment using multiple-qubit single-photon states. Phys Rev Lett 2007;98(10):100501.
[7] Mair A, Vaziri A, Weihs G, Zeilinger A. Entanglement of the orbital angular momentum states of photons. Nature 2001;412(6844):313–6.
[8] Leach J, Courtial J, Skeldon K, Barnett SM, Franke-Arnold S, Padgett MJ. Interferometric methods to measure orbital and spin, or the total angular momentum of a single photon. Phys Rev Lett 2004;92(1):013601.
[9] Hickmann JM, Fonseca EJS, Soares WC, Chávez-Cerda S. Unveiling a truncated optical lattice associated with a triangular aperture using light's orbital angular momentum. Phys Rev Lett 2010;105(5):053904.

[10] Melo LA, Jesus-Silva AJ, Chávez-Cerda S, Ribeiro PHS, Soares WC. Direct measurement of the topological charge in elliptical beams using diffraction by a triangular aperture. Sci Rep 2018;8(1):6370.
[11] Alves CR, Jesus-Silva AJ, Fonseca EJS. Characterizing coherence vortices through geometry. Opt Lett 2015;40(12):2747–50.
[12] Vaity P, Banerji J, Singh RP. Measuring the topological charge of an optical vortex by using a tilted convex lens. Phys Lett A 2013;377(15):1154–6.
[13] Efron U, editor. Spatial light modulator technology: materials, devices, and applications. New York: Marcel Dekker Inc.; 1994.
[14] Chan WL, Chen HT, Taylor AJ, Brener I, Cich MJ, Mittleman DM. A spatial light modulator for terahertz beams. Appl Phys Lett 2009;94(21):213511.
[15] Kotlyar VV, Almazov AA, Khonina SN, Soifer VA, Elfstrom H, Turunen J. Generation of phase singularity through diffracting a plane or Gaussian beam by a spiral phase plate. J Opt Soc Am A 2005;22(5):849–61.
[16] Khonina SN, Kotlyar VV, Shinkaryev MV, Soifer VA, Uspleniev GV. The phase rotor filter. J Mod Opt 1992;39(5):1147–54.
[17] Marrucci L. The *q*-plate and its future. J Nanophoton 2013;7(1):078598.
[18] Rubano A, Cardano F, Piccirillo B, Marrucci L. *q*-plate technology: a progress review. J Opt Soc Am B 2019;36(5):D70–87.
[19] Shalaev MI, Sun J, Tsukernik A, Pandey A, Nikolskiy K, Litchinitser NM. High-efficiency all-dielectric metasurfaces for ultracompact beam manipulation in transmission mode. Nano Lett 2015;15(9):6261–6.
[20] Zhao Y, Liu XX, Alù A. Recent advances on optical metasurfaces. J Opt 2014; 16(12):123001.
[21] Yu N, Capasso F. Flat optics with designer metasurfaces. Nat Mater 2014;13(2): 139–50.
[22] McGloin D, Dholakia K. Bessel beams: diffraction in a new light. Contemp Phys 2005;46(1):15–28.
[23] Volke-Sepulveda K, Garcés-Chávez V, Chávez-Cerda S, Arlt J, Dholakia K. Orbital angular momentum of a high-order Bessel light beam. J Opt B Quantum Semiclass Opt 2002;4(2):S82–9.
[24] Zhang K, Yuan Y, Zhang D, Ding X, Ratni B, Burokur SN, et al. Phase-engineered metalenses to generate converging and non-diffractive vortex beam carrying orbital angular momentum in microwave region. Opt Express 2018; 26(2):1351–60.
[25] Chu X. Analytical study on the self-healing property of Bessel beam. Eur Phys J D 2012;66(10):259.
[26] Vetter C, Steinkopf R, Bergner K, Ornigotti M, Nolte S, Gross H, et al. Realization of free-space long-distance self-healing Bessel beams. Laser Photonics Rev 2019;13(10):1900103.
[27] Arlt J, Garcés-Chávez V, Sibbett W, Dholakia K. Optical micromanipulation using a Bessel light beam. Opt Commun 2001;197(4–6):239–45.
[28] Choe Y, Kim JW, Shung KK, Kim ES. Microparticle trapping in an ultrasonic Bessel beam. Appl Phys Lett 2011;99(23):233704.
[29] Planchon TA, Gao L, Milkie DE, Davidson MW, Galbraith JA, Galbraith CG, et al. Rapid three-dimensional isotropic imaging of living cells using Bessel beam plane illumination. Nat Methods 2011;8(5):417–23.
[30] Gao L, Shao L, Chen BC, Betzig E. 3D live fluorescence imaging of cellular dynamics using Bessel beam plane illumination microscopy. Nat Protoc 2014; 9(5):1083–101.
[31] Bandres MA, Gutiérrez-Vega JC. Ince–Gaussian modes of the paraxial wave equation and stable resonators. J Opt Soc Am A 2004;21(5):873–80.
[32] Bandres MA, Gutiérrez-Vega JC. Ince–Gaussian beams. Opt Lett 2004;29(2): 144–6.
[33] Schwarz UT, Bandres MA, Gutiérrez-Vega JC. Observation of Ince–Gaussian modes in stable resonators. Opt Lett 2004;29(16):1870–2.
[34] Kotlyar VV, Khonina SN, Almazov AA, Soifer VA, Jefimovs K, Turunen J. Elliptic Laguerre–Gaussian beams. J Opt Soc Am A 2006;23(1):43–56.
[35] Gutiérrez-Vega JC, Iturbe-Castillo MD, Chávez-Cerda S. Alternative formulation for invariant optical fields: Mathieu beams. Opt Lett 2000;25(20): 1493–5.
[36] Chávez-Cerda S, Padgett MJ, Allison I, New GHC, Gutiérrez-Vega JC, O'Neil AT, et al. Holographic generation and orbital angular momentum of high-order Mathieu beams. J Opt B Quantum Semiclass Opt 2002;4(2):S52–7.
[37] Brzobohatý O, Čižmár T, Zemánek P. High quality quasi-Bessel beam generated by round-tip axicon. Opt Express 2008;16(17):12688–700.
[38] Li W, Morgan KS, Li Y, Miller JK, White G, Watkins RJ, et al. Rapidly tunable orbital angular momentum (OAM) system for higher order Bessel beams integrated in time (HOBBIT). Opt Express 2019;27(4):3920–34.
[39] Dai K, Li W, Morgan KS, Li Y, Miller JK, Watkins RJ, et al. Second-harmonic generation of asymmetric Bessel-Gaussian beams carrying orbital angular momentum. Opt Express 2020;28(2):2536–46.
[40] Watkins RJ, Dai K, White G, Li W, Miller JK, Morgan KS, et al. Experimental probing of turbulence using a continuous spectrum of asymmetric OAM beams. Opt Express 2020;28(2):924–35.
[41] Dholakia K, Simpson NB, Padgett MJ, Allen L. Second-harmonic generation and the orbital angular momentum of light. Phys Rev A 1996;54(5):R3742–5.
[42] Imoto N, Haus HA, Yamamoto Y. Quantum nondemolition measurement of the photon number via the optical Kerr effect. Phys Rev A 1985;32(4):2287–92.
[43] Tse WK, MacDonald AH. Giant magneto-optical Kerr effect and universal Faraday effect in thin-film topological insulators. Phys Rev Lett 2010;105(5): 057401.
[44] Kelley PL. Self-focusing of optical beams. Phys Rev Lett 1965;15(26):1005–8.
[45] Shabat AB, Zakharov VE. Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media. Sov Phys JETP 1972;34(1):62–9.
[46] Beržanskis A, Matijošius A, Piskarskas A, Smilgevičius V, Stabinis A. Conversion of topological charge of optical vortices in a parametric frequency converter. Opt Commun 1997;140(4–6):273–6.
[47] El-Ganainy R, Christodoulides DN, Rotschild C, Segev M. Soliton dynamics and self-induced transparency in nonlinear nanosuspensions. Opt Express 2007; 15(16):10207–18.
[48] Vinçotte A, Bergé L. Atmospheric propagation of gradient-shaped and spinning femtosecond light pulses. Physica D 2006;223(2):163–73.
[49] Silahli SZ, Walasik W, Litchinitser NM. Necklace beam generation in nonlinear colloidal engineered media. Opt Lett 2015;40(24):5714–7.
[50] Walasik W, Silahli SZ, Litchinitser NM. Dynamics of necklace beams in nonlinear colloidal suspensions. Sci Rep 2017;7(1):11709.
[51] Sun J, Silahli SZ, Walasik W, Li Q, Johnson E, Litchinitser NM. Nanoscale orbital angular momentum beam instabilities in engineered nonlinear colloidal media. Opt Express 2018;26(5):5118–25.
[52] Arlt J, Dholakia K. Generation of high-order Bessel beams by use of an axicon. Opt Commun 2000;177(1–6):297–301.
[53] Liu C, Liu J, Niu L, Wei X, Wang K, Yang Z. Terahertz circular airy vortex beams. Sci Rep 2017;7(1):3891.
[54] Thaning A, Jaroszewicz Z, Friberg AT. Diffractive axicons in oblique illumination: analysis and experiments and comparison with elliptical axicons. Appl Opt 2003;42(1):9–17.
[55] Bin Z, Zhu L. Diffraction property of an axicon in oblique illumination. Appl Opt 1998;37(13):2563–8.
[56] Rasmussen JJ, Rypdal K. Blow-up in nonlinear Schroedinger equations-I a general review. Phys Scr 1986;33(6):481–97.
[57] Firth WJ, Skryabin DV. Optical solitons carrying orbital angular momentum. Phys Rev Lett 1997;79(13):2450–3.
[58] Skryabin DV, Firth WJ. Dynamics of self-trapped beams with phase dislocation in saturable Kerr and quadratic nonlinear media. Phys Rev E 1998;58(3):3916–30.
[59] Desyatnikov AS, Kivshar YS. Necklace-ring vector solitons. Phys Rev Lett 2001;87(3):033901.
[60] Berne BJ, Pecora R. Dynamic light scattering: with applications to chemistry, biology, and physics. Mineola: Dover Publications, Inc.; 2000.
[61] Jackson JD. Classical electrodynamics. 3rd ed. New York: John Wiley & Sons, Inc.; 1999.
[62] Garnett JCM. Colours in metal glasses and in metallic films. Phil Trans A 1904; 203:385–420.
[63] Fardad S, Salandrino A, Heinrich M, Zhang P, Chen Z, Christodoulides DN. Plasmonic resonant solitons in metallic nanosuspensions. Nano Lett 2014;14(5): 2498–504.
[64] El-Ganainy R, Christodoulides DN, Musslimani ZH, Rotschild C, Segev M. Optical beam instabilities in nonlinear nanosuspensions. Opt Lett 2007;32(21): 3185–7.
[65] Van Roey J, van der Donk J, Lagasse PE. Beam-propagation method: analysis and assessment. J Opt Soc Am 1981;71(7):803–10.
[66] Chung Y, Dagli N. An assessment of finite difference beam propagation method. IEEE J Quantum Electron 1990;26(8):1335–9.
[67] Kovalev AA, Kotlyar VV, Porfirev AP. Asymmetric Laguerre–Gaussian beams. Phys Rev A 2016;93(6):063858.
[68] Zhu X, Kahn JM. Free-space optical communication through atmospheric turbulence channels. IEEE Trans Commun 2002;50(8):1293–300.
[69] Conan JM, Rousset G, Madec PY. Wave-front temporal spectra in high-resolution imaging through turbulence. J Opt Soc Am A 1995;12(7):1559–70.
[70] Fan Y, Arwatz G, Van Buren TW, Hoffman DE, Hultmark M. Nanoscale sensing devices for turbulence measurements. Exp Fluids 2015;56(7):138.
[71] Bonesi M, Churmakov DY, Ritchie LJ, Meglinski IV. Turbulence monitoring with doppler optical coherence tomography. Laser Phys Lett 2007;4(4):304–7.