学术论文

板壳分析与应用

刘人怀
（暨南大学应用力学研究所，广州 510632）

[摘要] 板壳分析是现代固体力学的一个重要分支。这门学科几乎与一切工程设计都有关联，对航天、航空、航海、机械、石化、建筑、水利、动力、仪表、交通等工程设计，尤其具有指导意义。现今，经典的薄板壳线性理论已较成熟，并在各种工程设计中起着指导作用。然而，在薄板壳非线性领域和厚板壳线性领域，还有许多问题未被解决。文章在介绍这门学科发展历史的基础上，概述了作者近四十年结合工程实际对波纹板壳、单层板壳、双层金属旋转扁壳、网格扁壳、夹层板壳和复合材料层合板壳等六类薄板壳的非线性弯曲、稳定和振动问题以及厚、薄板壳弯曲问题进行理论探索的情况。

[关键词] 薄板壳；厚板壳；非线性；线性；弯曲；稳定；振动

1 引言

板壳结构分析是现代固体力学中特别引人注目的一个分支，近几十年，随着科学技术的突飞猛进，其发展异常迅速。这门学科几乎与一切工程设计都有关联，对航天、航空、航海、机械、石化、建筑、水利、动力、仪表、交通等工程设计，尤其具有指导意义。

板壳是平板和壳体的总称，是最常见的物体形式。其外形特点是厚度比其余两个方向尺寸在数量级上小得多。平分物体厚度的分界面称为中面。若中面是平面，则称此物体为平板；若中面是曲面，则称此物体为壳体。

由于厚度小、质量轻、耗材少、性能好，使板壳成为具有优良特性的结构元件，不仅广泛应用于各种工程结构作为最基本和最主要的构件，而且在自然界和日常生活中也常常碰见，它们与每个人的生活休戚相关，与人类的生存紧密相连。

板壳结构分析包括板壳静力学和板壳动力学两大部分。

板壳静力学是研究板壳在静荷载作用下所产生的应力和变形，亦即通常所说的刚度、强度和稳定问题。通过分析计算，使板壳设计得既美观大方，又安全经济。

板壳动力学是研究板壳在动荷载作用下结构的反应。其中一个重要问题是板壳的振动问题。

按照厚度的大小，可将板壳分为薄板壳和厚板壳两大类，而大多数板壳属于薄板壳范畴。

按照隶属的理论范畴，当板壳弯曲变形时，若其挠度相对于厚度是小量，所建立的微分方程属线性性质，则纳入板壳线性理论范畴；反之，若挠度不是小量，所建立的微分方程属非线性的，则纳入板壳非线性理论范畴。

板结构分析随着工业的发展起源于18世纪，Euler最先探索板的弯曲问题[1]。但是，直到1850年，Kirchoff才给出第一个完善的板的弯曲理论[2]。接着Aron做了薄壳的分析工作[3]。此后，特别是在20世纪，由于工业的飞跃发展，极大地推动了板壳结构分析的发展和应用。现今，经典的薄板壳线性理论已较成熟，并在各种工程设计中起着指导作用。然而，在薄板壳非线性领域（以下简称为板壳非线性问题）和厚板壳线性领域，还有许

[收稿日期] 2000-06-09；修回日期 2000-09-05

[作者简介] 刘人怀（1940-）男，四川成都市人，中国工程院院士，暨南大学应用力学研究所教授，博士生导师

多问题尚未解决。从 1962 年开始，在前人的基础上，作者结合工程需要，在这些领域进行了一些探索。本文即是这些工作的小结。

2　板壳非线性理论与工程应用

2.1　概述

从本质上讲，板壳理论作为精确理论而言，应该是非线性的。板壳非线性理论的奠基者是 20 世纪杰出的科学家 von Kármán，1910 年，他最先给出板的大挠度理论的微分方程[4]。由于工程上未提出应用精确理论的迫切要求，加之数学问题求解的巨大困难，所以此后的发展是缓慢的。直到 20 世纪 60 年代，随着工业的发展，工程上大量提出了非线性现象与问题，它比线性情形更复杂，描述的现象更丰富，更具有挑战性，板壳非线性理论的研究蓬勃兴起，直到今天，它仍然是固体力学研究的一个最活跃的领域而备受人们关注，并推动非线性科学的发展。目前研究的中心课题是板壳的几何非线性弯曲、稳定和振动问题。

2.2　修正幂级数法和修正迭代法

由于几何非线性关系的引入，导致板壳弯曲理论的微分方程是非线性的，这在数学研究上存在极大的困难，因而在 von Kármán 提出板的大挠度方程后，研究进展十分缓慢，寻求其解法便成为解决问题的关键。人们将解法分为两类：解析法和数值法。数值法常见的有：有限元法、边界元法和有限差分法等；解析法有精确解法和近似解法。常见的精确解法为幂级数法和三角级数法等；常见的近似解法有摄动法、奇异摄动法、逐次逼近法、Ritz 法、Галёркин 法等。作者的工作限于解析法方面。

寻求精确解一直是人们的希望，因为它不仅使问题得以圆满解决，为工程设计提供最可靠的依据，而且为近似解提供一个检验标准。1934 年，Way 最先使用幂级数方法求解了板壳非线性力学的经典问题：圆板大挠度问题，给出其精确解的计算结果[5]。1989 年，作者发展了 Way 的方法，提出修正幂级数法，求解了计及表层抗弯刚度的夹层圆板的大挠度问题[6]。该问题十分复杂，控制方程的最高阶导数前有一个小参数，属于边界层型，微分方程组为：

$$\varepsilon L^2\Phi - \left(1 + \frac{\varepsilon}{\lambda}\right)L\Phi - \lambda L(S_r\Phi) + S_r\Phi + P\rho = 0$$

$$L(\rho S_r) + \frac{\Phi^2}{\rho} = 0,$$

这里 ε 是一个远小于 1 的小参数，Φ 是挠度的一阶导数，S_r 是径向应力，P 是均布荷载，λ 是参数，ρ 是径向坐标，L 是二阶微分算子。

此微分方程组不仅是变系数和阶数高，而且为非线性，用奇异摄动理论求解将是十分困难的。倘若用 Way 的传统的幂级数法，则因最高阶导数前有一小参数而无法求解。为此，作者在综合了传统的幂级数法和奇异摄动法的特点后，提出了修正幂级数法，从而解决了这个难题。这一方法的关键技术在于对未知量 Φ 和 S_r 的幂级数系数 a_i 和 b_i 的迭代方式和程序进行了改变，依照奇异摄动法的思想，提出了如下的迭代公式

$$a_0^{(n+1)} = -\sum_{i=1}^{\infty} a_{2i}^{(n)},$$

$$b_1^{(n+1)} = \sum_{i=1}^{\infty}[4\varepsilon i(i+1) - 1]b_{2i+1}^{(n)} - \lambda P,$$

$$b_3^{(n+1)} = \frac{1}{8(1+\varepsilon/\lambda + a_0\lambda)}\{192\varepsilon b_5^{(n)} + \lambda[b_1^{(n+1)}]^3 + a_0^{(n+1)}b_1^{(n+1)} + P\},$$

$$a_{2i}^{(n+1)} = -\frac{\beta_{2i-1}^{(n+1)}}{4i(i+1)},(i = 1,2,3,\cdots)$$

$$b_{2i-1}^{n+1} = \frac{1}{4i(i-1)(1+\varepsilon/\lambda + a_0\lambda)}\cdot [16\varepsilon i^2(i^2-1)b_{2i+1}^{(n)} + \alpha_{2i-3}^{(n+1)} - 4\lambda i(i-1)\sum_{k=0}^{i-2}a_{2(i-k-1)}^{(n+1)}b_{2k+1}^{(n+1)}],$$

$$(i = 3,4,5,\cdots)$$

$$\alpha_{2i+1}^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{i}a_{2(i-k)}^{n+1}b_{2k+1}^{(n+1)},(i = 0,1,2,\cdots)$$

$$\beta_{2i+1}^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{i}b_{2(i-k)+1}^{(n+1)}b_{2k+1}^{(n+1)}\quad(i = 0,1,2,\cdots)$$

$$(n = 0,1,2,\cdots)。$$

在近似求解方面，代表性的工作为 Vincent 和钱伟长在求解圆板大挠度问题中分别提出的以荷载和中心挠度为摄动参数的摄动法[7,8]。然而若使用此法去处理壳体非线性问题中的经典问题，即扁球壳的非线性稳定问题，则异常困难。1965 年，叶开源和作者创立了修正迭代法，克服了求解的困难[9~11]。这一方法结合了钱伟长摄动法和逐次逼近法的优点，不仅程序简单、计算量小，而且收敛快、所获解析解的精度高。为简单起见，现以著名的 Kármán 方程，即矩形板的非线性微分方程组为例，介绍这一方法。该方程组为

$$\frac{D}{h}\nabla^2\nabla^2 W = H(W,\Phi) + \frac{q}{h} \tag{1a}$$

$$\frac{1}{E}\nabla^2\nabla^2\Phi = -\frac{1}{2}H(W,W), \qquad (1b)$$

式中 D 是抗弯刚度，h 是厚度，E 是弹性模量，W 是挠度，Φ 是应力函数，q 是横向荷载，∇^2 是拉普拉斯算子。把算子 H 应用到函数 W 和 Φ，有

$$H(W,\Phi) = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\partial y} \qquad (2)$$

这里 x 和 y 是直角坐标。

对于第一次近似，首先略去方程（1a）右端的非线性项 $H(W,\Phi)$，便有如下的线性微分方程

$$\frac{D}{h}\nabla^2\nabla^2 W_1 = \frac{q}{h}, \qquad (3)$$

解此方程，并使用相应的边界条件，可得解

$$W_1 = f_1(x,y,q)。 \qquad (4)$$

以矩形板的中心挠度 W_0 作为迭代参数，解(4)式便可转换为

$$W_1 = g_1(x,y,W_0)。 \qquad (5)$$

将此解代入方程（1b）的右端，则得第一次近似中关于 Φ 的线性微分方程

$$\frac{1}{E}\nabla^2\nabla^2\Phi_1 = -\frac{1}{2}H(W_1,W_1)。 \qquad (6)$$

解此方程后，再将解 Φ_1 和 W_1 形式地代入方程（1a）的右端，于是又可得二次近似中关于 W 的线性微分方程。重复上述步骤，便可得更高近似的解。经过证明，这一方法是收敛的。

应用修正迭代法，作者和其它学者成功地解决了一系列板壳非线性理论中的难题。

2.3 波纹板壳

精密仪器仪表工业的发展程度是一个国家科学技术发展水平的重要标志。波纹膜片和波纹管被称为弹性敏感元件，是多种传感器和精密仪表的核心，应用十分广泛。当今，传感器技术已成为信息时代三大技术支柱之一。因此，作为传感器敏感器件的弹性敏感元件，更有用武之地。最近，波纹管又作为膨胀节，在工业管道中起着特殊作用。

波纹膜片，又称为波纹圆板，是一种采用铍青铜、不锈钢等高弹性金属材料制造的压有同心折皱的圆板。严格地讲，它是一种特殊形状的壳体。其折皱主要为正弦形、圆形、梯形和锯齿形。在荷载相当小时，它就能给出明显而容易被测量的挠度。这一优良特性被用来作为敏感元件。它相当于人的眼睛、耳朵等感觉器官，能灵敏地感受力、流量、速度等环境的变化，发出信号，由控制系统进行控制。由于结构形状复杂、种类繁多，且参数多，例如半径、厚度、波宽、波深和波数等，加之又归结为非线性微分方程组求解，所以研究极为困难。1941年，Панов 第一次讨论了浅正弦波纹膜片的非线性弯曲问题[12]。但是，直到70年代，国际上仍只有少数国家（前苏联、美国和日本）的学者从事这一领域中最简单问题的研究，仅涉及全波纹膜片和具有刚性中心的环形波纹膜片两种，所给出的解的精确度不够，远不能满足仪表和传感器设计的要求。因此，工程设计时只好用实验研究和经验来弥补理论的严重不足。即使进行实验，难度也极大，常常达不到目的。1964年，在我国研制飞机测高计时遇到难题：要研究分析此仪表心脏元件锯齿形波纹膜片的非线性特征。经过作者四年的努力，应用圆柱正交各向异性圆板大挠度理论和修正迭代法，首次成功地研究了波纹膜片问题，获得了既简单又精确的优于前苏联著名科学家 Феодосьев 的公式[13]。以一个无光滑中心的正弦截面波纹圆板为例，其半径为76 mm，厚度 h 为0.33 mm，作者的特征曲线的理论值与实验值非常一致。在中心挠度 $w_0=8.79\ h$ 的情况下，作者的理论值与实验值误差仅为0.90%，而 Феодосьев 公式结果与实验值误差高达39.0%。

这一工作在1978年复刊的《力学学报》第1期上发表[14]。此后，作者又继续探索，系统地在国内外学术刊物上发表了十几篇论文，如文献[15]和[16]等，共讨论了全波纹圆板、具有光滑中心的波纹圆板、具有光滑中心和平面边缘的波纹圆板、具有光滑中心和圆柱壳边缘的波纹圆板、具有刚性中心的波纹环形板、具有刚性中心和平面边缘的波纹环形板以及具有刚性中心和大边缘波纹的波纹环形板等7种波纹膜片的弯曲和振动问题。这些工作大部分是创新性研究，所得到的公式和程序，已被国内主要设计部门和工厂采用。

波纹管是一种圆柱形的薄壁金属软管，沿着圆周做成有波纹的折皱，这些折皱的形状主要为U型、V型和Ω型。常用的是U型波纹管。由于形状复杂，研究十分困难。理论研究已有五十多年的历史，大多是讨论线性变形问题，理论结果与实验很不一致。为此，Андреева 首先用差分法研究了U型波纹管的非线性变形问题[17]，接着钱伟长、Axelrad 等又使用摄动法进行研究，理论值与实验值的误差有所缩小[18,19]，但仍不能满足工程设计

的要求。1986 年，作者承担国家“七五”科技攻关任务，将 U 型波纹管视为圆环壳和变厚度截头扁锥壳的组合，采用整体非线性分析方法进行处理，所获结果精确度已能满足工程设计要求，其公式和程序已供国内主要设计部门和工厂使用[20]。

2.4 单层板壳

在近代工程结构中，构件的稳定性设计至关重要。1744 年，著名法国科学家 Euler 第一次提出并解决了压杆横向屈曲的弹性稳定问题[21]，开创了弹性构件稳定性研究，作出了划时代贡献。此后，在长达 200 年的时间里，人们陆续研究了杆、板、壳以及组合结构的稳定问题。由于生产力水平以及数学的限制，发展是不快的。此间对杆、板研究较深，对壳体则研究得很不深透，使用线性理论研究壳体稳定问题，其结果无法与实验一致。1939 年，von Kármán 和钱学森第一次用非线性理论讨论了均布外压下的固定边扁球壳的稳定问题[22]，为迷雾中的壳体稳定性研究指明了正确方向。但是，由于解法问题，此后的研究进展缓慢。扁球壳的非线性稳定是固体力学的经典问题，引起国际众多学者争相研究。1965 年，叶开源和作者提出了修正迭代法[9, 10]，成功地研究了扁球壳的非线性稳定问题，其结果与钱伟长等的实验值吻合[23]。同时，作者又研究了尚无人研究过的难度更大的开顶扁球壳[11]。此后，又继续处理了这一领域里几个有意义的问题，如文献［24］等，这一类问题的研究对于作为精密仪表自控元件的跳跃膜片和大型屋盖等的设计有指导意义。此外，还讨论了作为仪表弹性元件的圆板的非线性振动问题[25]。

2.5 双层金属旋转扁壳

在弹性敏感元件中，有一类采用双层金属旋转扁壳做成的热敏弹性元件，用于自动控制仪表。这类元件具有这样一种特性：在均匀加热情况下，由于两层金属的热膨胀系数不同，将产生弯曲，以致于发生跳跃现象，自动控制仪表便应用这一特性作为控制信号。此问题最早由 Панов 等人研究过[26]，结果不能令人满意。作者应用 Королев 和 Radkowski 的选择多层壳体坐标参考面的方法，将双层旋转扁壳的基本方程表示成单层壳体理论的形式[27~29]，从而建立了在均匀温度作用下双层金属旋转扁壳的大挠度弯曲理论，并应用修正迭代法得到了临界温度的解析解。解的精确度高，公式远较前人结果简单，易于工程设计时应用。

2.6 网格扁壳

网格扁壳是由较短构件按实体壳的形式布置成的一种空间构架，包括单层和双层两种形式。它具有空间刚度大、受力合理等力学特点，成本低、轻质省材、易于包装、易于运输、易于安装等经济特点，以及造型新颖、美观等结构特点，近年来在体育馆、展览馆、电影院等的屋盖和大型储油罐顶盖以及空间站等结构中得到广泛应用。但因结构复杂，其非线性分析始终无人研究，因而不能满足现代工业的要求。作者应用等效原理，建立了单层和双层网格扁壳非线性弯曲理论，并获得了一些弯曲、稳定和振动问题的解析解[30,31]。特别是 1985 年为我国大型 10 000 m^3 储油罐的新型顶盖稳定设计提供了公式和数据，节省材料 20%，节省施工费用，有利于安全使用。

2.7 夹层板壳

夹层板壳由三层材料组合而成，上、下两块表面层很薄，强度很高，中间是一块软而轻的厚夹心。这是一种新型的结构元件，具有质量轻、强度高、刚度大等许多突出的优点，在航天、航空、包装等工程中起了重大作用。这方面的理论与应用研究文献十分丰富，杜庆华提出了有名的考虑剪切影响的夹层板理论[32]。然而，由于夹层结构复杂和在非线性数学上的困难，国际上基本处于线性分析研究阶段，非线性分析的论文如凤毛麟角，远不能满足科学技术迅猛发展的需要。Reissner 于 1948 年首次给出具有软夹心的夹层板的大挠度方程[33]。由于分析困难，研究进展十分缓慢。作者最先建立了比 Reissner 理论更一般性的具有软夹心的夹层圆板非线性弯曲理论[34,6]，随后又分析了表层抗弯刚度的影响，给出有意义的结论：对于一般工程，应用忽略表层抗弯刚度的夹层板理论已足够精确。接着，作者系统地研究了夹层圆形板、夹层环形板、夹层矩形板、夹层扁球壳、夹层扁锥壳和夹层圆柱壳的非线性弯曲、稳定和振动问题[35~39]，并按照“能量误差一致原则”，采用张量分析工具，建立了一致有效的夹层壳大挠度理论，同时还研究了表层是层合复合材料的更复杂情况。

2.8 复合材料层合板壳

复合材料是一类新型材料，其强度高、刚度大、质量轻，具有抗疲劳、减振、耐高温、可设计等优点，近 30 年来在航空、航天、造船、能源、交通、建筑、机械、生物医学和体育等部门已有广

泛的应用。可以预言，21世纪将进入复合材料的时代。随着复合材料的开发和应用，复合材料层合板壳的力学分析提到了日程，已有大量文献。这些研究大多属于线性理论，少量非线性分析也仅限于圆柱壳等。作者率先涉及特别复杂的复合材料层合旋转壳体领域，建立了计及横向剪切影响的对称层合扁球壳和扁锥壳的非线性稳定和振动理论，求解了几个有意义的问题，得出了重要的结论：若使用不计及横向剪切影响的经典理论进行工程设计，那将是保守的[40~42]。同时，在计及横向剪切影响下，进一步系统地研究了复合材料层合圆板、椭圆板以及矩形板的非线性弯曲问题[43,44]。这些结果可直接用于工程设计。此外，作者还提出了一个计及高阶影响的层合矩形板的非线性弯曲理论[45]。

3 厚板壳弯曲理论与工程应用

厚板壳在化工、石油、动力、水利、建筑等工程中应用广泛，但厚板壳理论研究甚为困难。作者结合我国工程实际，提出了简单而适用的厚板壳弯曲理论，解决了工程中的实际问题。

3.1 厚圆板与高压热交换器厚管板

在不同温度的流体间传递热能的热交换器（简称换热器）在工厂中大量使用，是许多行业的通用设备，它占到石油、化工工厂设备总质量的40%。随着工业的发展，对能源利用、开发和节约的要求不断提高，对换热器的要求也越来越高。在换热器中，最常见的一类是列管式换热器，而管板是它的关键部件。管板是一个满布孔洞的圆板，其强度设计十分重要。迄今，基于薄板理论方面的研究成果，对中、低压换热器的管板设计具有实际意义。这中间，以乌班诺夫斯基的工作最为出色[46]。60年代以来，工业部门开始采用高压换热器。这种换热器的管板厚度很大，已超出薄板理论的研究范围。但是，却没有一个能供工程设计应用的公式，因而工程上只得沿用薄管板公式进行粗略设计。显然，这是不合理的。

1970年，我国试制第一台大型换热分离氨组合设备，即四合一氨合成塔（长度28.467 m）。由于合成塔中的水冷却器管板尺寸很大（厚度230 mm，直径700 mm），处于200℃高温和32 MPa高压工作状态，若按国际王牌产品标准尺寸进行设计，则我国没有一家工厂具备此大型构件的制造能力；若用薄管板公式进行设计，则结果偏于保守，更无法进行试制。作者采用Reissner厚板理论，足够精确地建立了高压固定式换热器厚管板的弯曲理论，为工程设计提供了可靠的设计公式[47]。计算结果表明，厚管板厚度可进行减薄设计，定为190 mm，既节省材料，又使产品在我国试制成功。

3.2 厚圆柱壳和薄椭球壳与铂重整装置

铂重整装置是石油炼制工业的重要装置，用于生产航空煤油，属高温（设计温度300 ℃）中压（设计压力8 MPa）容器。1969年，我国按照国际王牌产品水平进行第一次产品试制（长10.729 m，直径1.910 m），共生产6台。由于设计不当，其中椭球封头（长半轴930 mm，短半轴480 mm，厚60 mm）厚壁接管（直径423 mm，厚90 mm）根部强度不够，造成产品水压试验压力仅达到6 MPa，致使产品报废。作者建立了厚壁圆柱壳弯曲理论，并采用薄椭球壳弯曲理论，给出了椭球封头中心孔边缘的应力计算公式，提出了在中心孔边焊接32 mm厚度护强板的补救措施，仅少许花费，便复活了6台产品[48]。

3.3 厚球壳与尿素合成塔

大型尿素合成塔是生产优质化肥尿素的关键设备，是我国六七十年代农业的急需设备之一。1970年，瞄准国际王牌产品，试制我国第一台产品（长28.295 m，直径1.594 m，工作压力22 MPa），在底部球形封头同心圆上，等距离开了三个孔洞，此处成为新产品的关键部位，需要精心设计。在原设计制造方案中，是在厚度190 mm的球壳开孔洞（直径145 mm）的内缘，焊接一块厚达80 mm的补强圈。这样做，焊接工作量大，操作条件恶劣，封头易产生裂纹，产品质量得不到保证。为此，作者建立了一个较适用的厚球壳弯曲理论，给出了孔边缘应力计算公式[49]。最后按照作者的建议，取消了边缘的补强圈，使产品得以试制成功。

3.4 厚球壳和厚圆柱壳与加氢反应器

加氢反应器是炼油工业用于裂解的关键设备。1974年，试制我国第一台直径最大的加氢反应器，长度26.13 m，直径2.1 m，设计压力21 MPa。除了反应器大外，还要在这台反应器上采用两项新技术：**a.** 在封头上开大孔，孔径为800 mm，突破了高压容器传统制造工艺上开大孔的禁忌；**b.** 高压容器壁厚大，而我国又无能力制造厚合金钢板材，因此，想用两块较薄的合金钢板材，采用热套技术来制造，亦即反应器筒体采用双层套箍式工艺制

造。这两项新技术都没有现成理论可供使用。作者创立了适用的厚壁圆柱壳弯曲理论[50,51]，与以前提出的厚壁球壳理论一起，为加氢反应器正确设计提供了可靠的公式和数据，使产品试制成功。

3.5 厚圆柱壳与高压聚乙烯反应器

1970 年，在研制我国最高压力容器——高压聚乙烯反应器（长度 3.505 m，设计压力 230 MPa）中，作者接受了研究反应器筒体关键部位径向开孔（直径 51 mm）应力集中问题的任务。难度是在厚壁圆柱壳上开径向孔，尚无理论分析文献。作者应用自己提出的厚壁圆柱壳理论，采用复变函数方法，给出了问题的解析解*。应力集中的数据与随后实验所给数据十分吻合，为反应器研制提供了可靠的设计依据。

3.6 变厚度厚锥壳与铁路高桥墩

1975 年我国进行最高的铁路桥梁的设计，桥墩属变厚度厚壁截头锥壳，高 69.4 m，底部直径 696 cm，顶部直径 240 cm。由于无设计理论，作者提出了工程适用的变厚度的厚壁锥壳理论，给出了这一高桥墩的设计公式，为大桥的设计提供了可靠的依据**。

3.7 厚矩形板与新型油井钻头

对一口油井而言，目前的采油技术水平只能采出石油储量的三分之一左右。因此，提高采油技术水平是当务之急。从 1998 年开始，通过深入工程实际，对由厚矩形板构成的油井大直径扩孔钻头进行力学分析，为采用高压水射流超短半径水平井钻井新技术提供了可靠的理论分析***。新技术的成功，有望使油井产油量大幅度提高。

4 薄板壳弯曲理论与工程应用

1974 年，在我国最大的 5 Mt/a 炼油厂的设计中，关键设备之一是常减压蒸馏装置的高达 34 m 的减压塔，它是变截面的塔器，自上而下的直径为 6.4 m/10 m/6.4 m/2 m。塔的壁厚为 26 mm，操作质量高达 479.831 t。以往的减压塔裙座均与下封头搭接。此次设计，由于考虑到基础安装、管线连接和节约材料等原因，拟将裙座支承于该塔下端 ϕ6.4 m 处，但如此大型的塔器，在负压操作情况下，这种支承方式引起的应力分析相当复杂，塔器是否处于稳定状态，均是设计难题。鉴于现有设计规范与通常的工程方法已不适于该塔的强度和稳定设计，作者应用组合壳体理论给出塔的应力分析公式[52,53]，对塔的一些强度不足的薄弱处提出了改进建议。同时，给出了稳定设计的临界荷载公式，使塔的稳定设计有了可靠的依据。

此外，还提出了一种新的复合材料层合板理论[54]。这一理论可满足层间位移和横向剪应力连续条件以及上下表面横向剪应力协调条件，其控制方程只有 5 个未知量。数值计算表明，这一理论具有很高的精确度。

5 结束语

21 世纪即将到来，世界正面临一场新的技术革命。现代工业、现代国防和现代科技的更大发展，将对板壳结构分析提出更多和更高的要求[55,56]。显然，目前的理论与方法不能满足这些要求。因此，紧密结合工程需要，推动我国板壳结构分析与应用事业继续向前发展是一项重要任务。

参考文献

[1] Euler L. De motu vibvatorio tympanorum [J]. Novi commentari Acad. Petropolit, 1766,(10): 243～260
[2] Kirchhoff G. Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe [J]. Journal für die reine und angewandte Math., 1850, 40: 51～58
[3] Aron H. Das Gleichgewicht und die Bewegung einer unendlich dünnen beliebig gekrümmten elastischen Schale [J]. Journal für die reine und angewandte Math., 1874, 78: 136～174
[4] von Kármán T. Festigkeitsprobleme im Maschinenbau [J]. Encycl. Math. Wiss., 1910, 4(4): 348～352
[5] Way S. Bending of circular plate with large deflection [J]. Trans. ASME, 1934, 56: 627～636
[6] Liu Renhuai, Zhu Gaoqiu. Further study on large deflection of circular sandwich plates [J]. Appl. Math. Mech., 1989, 10(12):1099～1106
[7] Vincent J J. The bending of a thin circular plate [J]. Phil. Mag., 1931, (12): 185～196
[8] Chien Weizang. Large deflection of a circular clamped plate under uniform pressure [J]. Chinese J. Phys.,

* 刘人怀. 一机部和化工部高压聚乙烯反应器试制组研究报告，1970

** 刘人怀，铁道部第一设计院．白水河大桥设计组研究报告，1975

*** 刘人怀，王播，肖潭．辽河油田勘探局钻井研究所研究报告，1998

1947, 7(2): 102～113

[9] 叶开源，刘人怀，平庆元，等. 在对称线布载荷作用下的圆底扁薄球壳的非线性稳定问题 [J]. 科学通报，1965，(2):142～145

[10] 叶开源，刘人怀，张传智，等. 圆底扁薄球壳在边缘力矩作用下的非线性稳定问题 [J]. 科学通报，1965，(2): 145～147

[11] 刘人怀. 在边缘均布力矩作用下中心开孔圆底扁薄球壳的非线性稳定问题 [J]. 科学通报，1965，(3): 253～255

[12] Панов Д Ю. О больших прогибах круглых мембран со слабым гофром[J], Прикл. Матем. Мех., 1941, 5(2): 303～318

[13] Феодосьев В И. Упругие Элементы Точного Приборостроения[M]. Москва:Оборонгиз, 1949

[14] 刘人怀. 波纹圆板的特征关系式 [J]. 力学学报，1978，(1): 47～52

[15] Liu Renhuai. Large deflection of corrugated circular plate under the action of concentrated loads at the center [J]. Int. J. Non-Linear Mech., 1984, 19(5): 409～419

[16] Liu Renhuai, Li Dong. On the non-linear bending and vibration of corrugated circular plates [J]. Int. J. Non-Linear Mech., 1989, 24(3): 165～176

[17] Андреева Л Е. Сильфоны (Расчёт и Проектирование) [M]. Москва: Машиностроение, 1975

[18] 钱伟长，吴明德. U型波纹管的非线性特性摄动法计算 [J]. 应用数学和力学，1983，4(5):649～665

[19] Axelrad E L. Theory of Flexible Shells [M]. Amsterdem: North-Holland, 1987

[20] Liu Renhuai, Wang Zhiwei. Nonlinear deformation analysis of a U-shaped bellows with varing thickness [J]. Arch. Appl. Mich., 2000, 70: 366～376

[21] Euler L. Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gandentes [M]. Lausanne and Geneve, 1744

[22] von Kármán T, Tisen Huseshen. The buckling of spherical shells by external pressure [J]. J. Aeron. Sci., 1939, (7): 43～50

[23] Chien Weizang, Hu Heichang. On the snapping of a thin spherical cap [A]. Int. Cong. Appl. Mech[C]., Brussels, 1956

[24] Liu Renhuai, He Linghui. On the nonlinear stability of a truncated shallow spherical shell under axisymme-trically distributed load [J]. Solid Mech. Arch., 1989, 14 (2): 81～102

[25] Liu Renhuai, Li Dong. A new approach to nonlinear vibration of orthotropic thin circular plates [A]. Proceedings of the International Conference on Vibration Engineering[C]. Shenyang: Northeasten University Press, 1998. 248～252

[26] Панов Д Ю. Об устойчивости биметаллической оболочки при нагреве[J]. Прикл. Матем. Мех., 1947, 11(6): 603～610

[27] Liu Renhuai. Non－linear thermal stability of bimetallic shallow shells of revolution [J]. Int. J. Non－Linear Mech., 1983, 18(5): 409～429

[28] Королев В И. Тонкие двухслойные пластины и оболочки[J]. Инж. Сборник, 1955, 22:98～110

[29] Radkowski P P. Buckling of thin single and multi-layer conical and cylindrical shells with rotationally symmetric stress [A]. Proc. of 3rd U.S. National Congress of Appl. Mech. [C]. 1958. 443～450

[30] Liu Renhuai, Li Dong, Nie Guohua, et al. Non-linear buckling of squarely-latticed shallow spherical shells [J]. Int. J. Non-Linear Mech., 1991, 26(5): 547～565

[31] 刘人怀，肖潭. 双层正交正放网格扁壳结构的非线性弯曲理论 [A]. 现代力学与科技进步，第3卷[M]. 北京：清华大学出版社，1997. 1212～1215

[32] Du Qinghua. General equations of sandwich plates under transverse loads and edgewise shears and compressions [J]. Sciencia Sinica, 1955, 4(1): 71～88

[33] Reissner E. Finite deflection of sandwich plates [J]. J. Aeron. Sci., 1948, 15(7):435～440; 1950, 17(2):125

[34] Liu Renhuai. Nonlinear bending of circular sandwich plates [J]. Appl. Math. Mech., 1981, 2(2):189～208

[35] 刘人怀，吴建成. 夹层矩形板的非线性振动 [J]. 中国科学，A辑，1991，(10): 1075～1086

[36] Liu Renhuai, Cheng Zhenqiang. On the non-linear buckling of circular shallow spherical sandwich shells under the action of uniform edge moments [J]. Int. J. Non-Linear Mech., 1995, 30(1): 33～43

[37] Liu Renhuai, Zhu Jinfu. Nonlinear theory of sandwich shells, part I—Exact kinematics of moderately thick shells [J]. Appl. Mech. Enging., 1997, 2(2):213～240

[38] Liu Renhuai, Zhu Jinfu. Nonlinear theory of sandwich shells, part II—Approximate theories [J]. Appl. Mech. Enging., 1997, 2(2):241～269

[39] 刘人怀，王志伟. 复合材料面层夹层板中转动一致有效理论 [J]. 上海力学，1996，17(3): 222～228

[40] 刘人怀. 考虑横向剪切的对称层合圆柱正交异性扁球壳的非线性稳定问题 [J]. 中国科学，A辑，1991，(7): 742～751

[41] Liu Renhuai. Non-linear buckling of symmetrically lam-

inated, cylindrically orthotropic, shallow, conical shells considering shear [J]. Int. J. Non-Linear Mech., 1996, 31(1): 89~99

[42] Liu Renhuai, Wang Fan. Nonlinear dynamic buckling of symmetrically laminated cylindrically orthotropic shallow spherical shells [J]. Arch. Appl. Mich., 1998, 68: 375~384

[43] Liu Renhuai, He Linghui. Nonlinear bending of simply supported symmetric laminated cross - ply rectangular plates [J]. Appl. Math. Mech., 1990, 11(9): 801~807

[44] Liu Renhuai, Xu Jiachu, Zhai Shangzhong. Large deflection bending of symmetrically laminated rectilinearly orthotropic elliptical plates including transverse shear [J]. Arch. Appl. Math. Mech., 1997, 67: 507~520

[45] Liu Renhuai, He Linghui. A simple theory for non-linear bending of laminated composite rectangular plates including higher-order effects [J]. Int. J. Non-Linear Mech., 1991, 26(5): 537~545

[46] W·乌班诺夫斯基. 热交换器管板的设计[J]. 力学学报, 1960, 4(2): 94~111

[47] 刘人怀. 固定式厚管板的弯曲问题 [J]. 力学学报, 1982, (2): 166~179

[48] 刘人怀, 陈山林. 椭球封头中心开孔接管的强度问题 [J]. 科技专刊(兰州大学), 1973, (1): 14~28

[49] 刘人怀. 厚壁球壳的弯曲理论及其在高压容器上的应用 [J]. 化工炼油机械通讯, 1980, (3): 1~10

[50] 刘人怀. 加氢反应器顶部厚壁壳体的应力计算 [J]. 化工炼油机械通讯, 1975, (6): 40~59

[51] 刘人怀. 双层套箍式压力容器环沟部位的应力状态 [J]. 兰州大学学报, 1977, (4): 9~25

[52] 刘人怀, 王凯. 500 万吨/年常减压装置减压塔下端部分壳体的应力分析 [J]. 压力容器, 1975, (2): 1~16

[53] 刘人怀. 在轴向压力与均匀外压力共同作用下薄壁截头圆锥形壳的稳定性 [J]. 兰州大学学报, 1975, (2): 16~25

[54] 何陵辉, 刘人怀. 一种考虑层间位移的横向剪应力连续条件的层合板理论 [J]. 固体力学学报, 1994, 15 (4): 319~326

[55] 刘人怀. 板壳力学 [M]. 北京: 机械工业出版社, 1990

[56] Liu Renhuai. Study on Nonlinear Mechanics of Plates and Shells [M]. New York: Science Press and Jinan University Press, 1998

Analysis of Plates and Shells and Its Application

Liu Renhuai

(*Institute of Applied Mechanics*, *Jinan University*, *Guangzhou* 510632, *China*)

[**Abstract**] Plates and shells are excellent structural elements. Analys of plates and shells is an important branch in modern solid mechanics. It plays a guiding role in many fields because of its wide application to almost all the engineering design, especially to astronautics, aeronautics, marine, machinery, petrochemical industry, architecture, water conservancy, power, instruments and transportation. Analysis of plates and shells originates from the 18th century with the development of industry. In the 20th century, the rocketing development of industry greatly stimulated the development and application of this subject. Now, the classical linear theory of thin plates and shells has matured and already been playing a decisive role in many engineering designs. However, there are still many problems left to be solved in the fields on nonlinear theory of thin plates and shells, and linear theory of thick plates and shells. Based on introduction of the history of development of this subject, this paper gives a brief account of the exploration the author did in nearly forty years, which has been well applied to engineering problems, in the areas of nonlinear bending, stability and vibration of thin plates and shells such as corrugated plates and shells, one-layer plates and shells, bimetallic shallow shells of revolution, latticed shallow shells, sandwich plates and shells, and laminated composite plates and shells. The paper also gives an introduction of the author's work on the linear bending of both thick and thin plates and shells.

[**Key words**] thin plates and shells; thick plates and shells; nonlinear problem; linear problem; bending; stability; vibration