

非线性系统的高增益滑模输出跟踪

王新华, 陈增强, 袁著社
(南开大学自动化系, 天津 300071)

[摘要] 基于非线性系统线性化后得到外部动态与内模动态, 设计一种线性化观测器, 使得当摄动参数在有限范围内任意取值时, 观测器误差渐近为零。并且利用在有限时间到达平衡点的连续滑动模态, 设计一种连续形式的高增益滑模控制器, 使得实际输出与参考输出的差渐近收敛到零。稳定性分析和仿真试验表明, 该控制系统具有较强的鲁棒性和快速收敛性。

[关键词] 非线性系统; 外部动态; 内模动态; 滑模控制; 鲁棒性

[中图分类号] TP13; O231.2 **[文献标识码]** A **[文章编号]** 1009-1742(2004)02-0038-06

1 前言

对于非线性系统控制, 一般首先采用线性化的方法^[1, 2], 再用其他控制手段进行控制^[3~5]。在系统状态未知的情况下, 通常的观测器不能同时观测其外部及内模动态^[6, 7]。而一般的滑模控制器具有抖振现象^[8, 9], 加入饱和函数后可以消除抖振现象, 却导致收敛速度与精度降低^[10, 11]。连续形式的滑模控制可以消除抖振^[12]。文献[13]中提出了基于一阶微分方程的解在有限时间内到达零并保持不变特性的滑动模态, 而滑模面为多层结构, 随着滑动变量沿滑模面逐层滑动, 变量最后达到零, 降低了抖振现象。然而, 控制器中含有滑模变量的高阶导数, 当存在不确定性和扰动情况时, 每层的滑模变量都将受到不确定性与扰动的影响。利用一个基于非线性系统线性化的观测器, 同时观测外部及内模动态变量, 并引入一层滑模面和具有滤波形式的摄动参数的滑模变量, 既能够消除抖振现象, 同时保证系统状态变量迅速收敛。

2 问题分析

所研究的被控对象为

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u, \\ y = h(x). \end{cases} \quad (1)$$

其中, x 为 n 维状态变量, $f(x)$, $g(x)$ 是 n 维光滑向量函数。 $u \in R$ 是控制输入, y 为输出。设系统的相对阶为 r , 即满足如下关系:

$$\begin{aligned} L_g L_f^{i-1} h(x) &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, r-1, \\ L_g L_f^{r-1} h(x) &\neq 0 \end{aligned}$$

因此, 式(1)线性化为

$$\begin{cases} \dot{\xi} = A\xi + B[a(\xi, \eta) + b(\xi, \eta)u], \\ \dot{\eta} = q(\xi, \eta), \\ y = C^T \xi. \end{cases} \quad (2)$$

其中

$$\begin{aligned} [\xi \quad \eta]^T &= [\xi_1 \quad \dots \quad \xi_r \quad \eta_1 \quad \dots \quad \eta_{n-r}]^T, \\ \chi(x) &= [h(x) \quad L_f h(x) \quad \dots \quad L_f^{r-1} h(x) \\ &\quad \chi_1(x) \quad \dots \quad \chi_{n-r}(x)], \\ a(\xi, \eta) &= L_f^r h(\chi^{-1}(\xi, \eta)), \\ b(\xi, \eta) &= L_g L_f^{r-1} h(\chi^{-1}(\xi, \eta)) \neq 0, \end{aligned}$$

[收稿日期] 2003-07-03; 修回日期 2003-09-05

[基金项目] 国家自然科学基金资助项目(60374037)

[作者简介] 王新华(1975-), 男, 河北秦皇岛市人, 南开大学自动化系博士研究生

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{r \times r},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{r \times 1}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{r \times 1} \quad (3)$$

令 $e = y - y_\Gamma, \bar{e} = [e_1 \cdots e_r]^T = [\xi_1 - y_\Gamma \cdots \xi_1^{r-1} - y_\Gamma^{r-1}]^T, Y_\Gamma = [y_\Gamma \cdots y_\Gamma^{(r-1)}]^T$ 。 y_Γ 为参考输出。所以，误差系统为

$$\begin{cases} \dot{\bar{e}} = A\bar{e} + B[a(\bar{e}, \eta, Y_\Gamma) - Y_\Gamma^{(r)} + b(\bar{e}, \eta, Y_\Gamma)u], \\ \dot{\eta} = q(\bar{e}, \eta, Y_\Gamma). \end{cases} \quad (4)$$

假设 1 内模动态 $\dot{\eta} = q(0, \eta, 0)$ 对于原点是局部指数稳定的 (对于物理系统而言，一般的最小相位系统可满足假设 1)。

由假设可知， $\frac{\partial q}{\partial \eta}(0, 0, 0)$ 是 Hurwitz 矩阵，所以存在一个正常数 k_0 和正定矩阵 P_2 满足

$$v^T P_2 \left\{ \frac{\partial q}{\partial \eta}(0, 0, 0) \right\} v = -k_0 \|v\|^2. \quad (5)$$

由于 $\frac{\partial q}{\partial \eta}(\xi, \eta, Y_\Gamma)$ 的连续性，存在 $(0, 0)$ 的一个领域，满足

$$v^T P_2 \left\{ \frac{\partial q}{\partial \eta}(\xi, \eta, Y_\Gamma) \right\} v \leq -k_0 \|v\|^2. \quad (6)$$

假设 2 $a(\xi, \cdots, \eta, Y_\Gamma), b(\xi, \eta, Y_\Gamma)$ 满足

$$\begin{aligned} & \| a(\tau_1, v_1, Y_\Gamma) + b(\tau_1, v_1, Y_\Gamma)u - \\ & a(\tau_2, v_2, Y_\Gamma) + b(\tau_2, v_2, Y_\Gamma)u \| \leq \\ & l_1 \|\tau_1 - \tau_2\| + l_2 \|v_1 - v_2\|, \end{aligned} \quad (7)$$

其中， $\tau_1, \tau_2 \in R^r, v_1, v_2 \in R^{n-r}, l_1, l_2$ 为大于零的常数。

假设 3

$$\| q(\tau_1, \eta, Y_\Gamma) - q(\tau_2, \eta, Y_\Gamma) \| \leq l_3 \|\tau_1 - \tau_2\|, \quad (8)$$

其中， $\tau_1, \tau_2 \in R^r, \eta_2 \in R^{n-r}, l_3$ 为大于零的常数。只要式 (4) 的等号右边各项是全局 Lipschitz 的，均可满足假设 2、假设 3。令 P_1 满足等式：

$$A_1^T P_1 + P_1 A_1 = -I_r, \quad (9)$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -k_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -k_r & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

$s^r + k_1 s^{r-1} + \cdots + k_r = 0$ 的根在左开半平面。

3 观测器设计

定理 1 基于式 (4)，给出观测器形式如下：

$$\begin{cases} \dot{\hat{e}} = A\hat{e} + B[a(\hat{e}, \hat{\eta}, Y_\Gamma) - y_\Gamma^{(r)} + \\ b(\hat{e}, \hat{\eta}, Y_\Gamma)u] + K(\epsilon)(e_1 - C\hat{e}), \\ \dot{\hat{\eta}} = q(\hat{e}, \hat{\eta}, Y_\Gamma). \end{cases} \quad (10)$$

那么，对于所有的 $0 < \epsilon < \epsilon^*$ ，满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \begin{bmatrix} \hat{e} \\ \hat{\eta} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{e} \\ \eta \end{bmatrix} \right\| = 0.$$

其中，运算中范数均取二范数。

$$\epsilon^* \leq \left(\frac{1}{4l_1 \|P_1\|}, \frac{k_0}{16(l_2 \|P_1\| + l_3 \|P_2\|)^2} \right),$$

$$K(\epsilon) = \begin{bmatrix} k_1/\epsilon & \cdots & k_r/\epsilon^r \end{bmatrix}^T.$$

证明 令

$$z_1 = \hat{e} - \bar{e}, z_2 = \hat{\eta} - \eta$$

所以，

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= A_1(\epsilon)z_1 + B[a(\hat{e}, \hat{\eta}, Y_\Gamma) + \\ & b(\hat{e}, \hat{\eta}, Y_\Gamma)u - a(\bar{e}, \hat{\eta}, Y_\Gamma) - b(\bar{e}, \hat{\eta}, Y_\Gamma)u], \\ \dot{z}_2 &= q(\hat{e}, \hat{\eta}, Y_\Gamma) - q(\bar{e}, \hat{\eta}, Y_\Gamma). \end{aligned}$$

其中

$$A_1(\epsilon) = A - K(\epsilon)C = \begin{bmatrix} -k_1/\epsilon & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -k_1/\epsilon^2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -k_r/\epsilon^r & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

令

$$\Xi(\epsilon) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \epsilon & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \epsilon^{r-1} \end{bmatrix},$$

所以，

$$A_1(\epsilon) = \epsilon^{-1} \Xi(\epsilon)^{-1} A_1 \Xi(\epsilon).$$

设 $P_1(\epsilon) = \Xi(\epsilon)^T P_1 \Xi(\epsilon)$ ，所以，

$$A_1^T(\epsilon) P_1(\epsilon) + P_1(\epsilon) A_1(\epsilon) = -\epsilon^{-1} \Xi(\epsilon)^T \Xi(\epsilon). \quad (11)$$

选取 Lyapunov 函数为

$$V(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) = \epsilon^{(2-2r)} \mathbf{z}_1^T \mathbf{P}_1(\epsilon) \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2^T \mathbf{P}_2 \mathbf{z}_2。$$

所以,

$$\dot{V} \leq -\epsilon^{(1-2r)} \mathbf{z}_1^T \mathbf{\Xi}(\epsilon)^T \mathbf{\Xi}(\epsilon) \mathbf{z}_1 +$$

$$2\epsilon^{(2-2r)} \mathbf{B}^T \mathbf{\Xi}(\epsilon) \mathbf{P}_1 \mathbf{\Xi}(\epsilon) \mathbf{z}_1 [a(\hat{\mathbf{e}}, \hat{\boldsymbol{\eta}}, \mathbf{Y}_\Gamma) +$$

$$b(\hat{\mathbf{e}}, \hat{\boldsymbol{\eta}}, \mathbf{Y}_\Gamma) u - a(\bar{\mathbf{e}}, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{Y}_\Gamma) - b(\bar{\mathbf{e}}, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{Y}_\Gamma) u] -$$

$$k_0 \|\mathbf{z}_2\|^2 + 2[\mathbf{q}(\hat{\mathbf{e}}, \hat{\boldsymbol{\eta}}, \mathbf{Y}_\Gamma) - \mathbf{q}(\bar{\mathbf{e}}, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{Y}_\Gamma)] \mathbf{P}_2 \mathbf{z}_2。$$

令 $\boldsymbol{\zeta}_1 = \mathbf{\Xi}(\epsilon) \mathbf{z}_1$ 。由 $\|\mathbf{\Xi}(\epsilon)^{-1}\| = \epsilon^{1-r}$ 得 $\|\mathbf{z}_1\| \leq \epsilon^{1-r} \|\boldsymbol{\zeta}_1\| = \epsilon^{1-r}$ 。且由 $\|\mathbf{B}^T \mathbf{\Xi}(\epsilon)\| = \epsilon^{r-1}$ 得

$$\dot{V} \leq -\epsilon^{(1-2r)} \|\boldsymbol{\zeta}_1\|^2 + 2\epsilon^{(2-2r)} l_1 \|\mathbf{P}_1\| \cdot$$

$$\|\boldsymbol{\zeta}_1\|^2 + 2\epsilon^{(1-r)} l_2 \|\mathbf{P}_1\| \|\boldsymbol{\zeta}_1\| \|\mathbf{z}_2\| +$$

$$2\epsilon^{(1-r)} l_3 \|\mathbf{P}_2\| \|\boldsymbol{\zeta}_1\| \|\mathbf{z}_2\| - k_0 \|\mathbf{z}_2\|^2。$$

由于 $\epsilon \leq 1/(4l_1 \|\mathbf{P}_1\|)$, 所以

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2} \epsilon^{(1-2r)} \|\boldsymbol{\zeta}_1\|^2 + 2\epsilon^{(2-2r)} (l_2 \|\mathbf{P}_1\| +$$

$$l_3 \|\mathbf{P}_2\|) \|\boldsymbol{\zeta}_1\| \|\mathbf{z}_2\| - k_0 \|\mathbf{z}_2\|^2 \leq$$

$$-\frac{3}{4} k_0 \|\mathbf{z}_2\|^2 - \left(\frac{1}{2} \epsilon^{(1-2r)} -$$

$$\frac{4}{k_0} \epsilon^{(2-2r)} (l_2 \|\mathbf{P}_1\| + l_3 \|\mathbf{P}_2\|)\right) \|\boldsymbol{\zeta}_1\|^2。$$

由于

$$\epsilon \leq k_0/[16(l_2 \|\mathbf{P}_1\| + l_3 \|\mathbf{P}_2\|)^2],$$

所以

$$\dot{V} \leq -\frac{3}{4} k_0 \|\mathbf{z}_2\|^2 - \frac{1}{4} \epsilon^{(1-2r)} \|\boldsymbol{\zeta}_1\|^2,$$

定理得证。

4 控制器设计

文献 [13] 中的微分方程

$$\dot{\sigma}(t) = -k_1 \sigma(t) - k_2 \sigma(t)^{q/p}, \quad (12)$$

其中, $k_1, k_2 > 0, p, q$ 均为大于零的奇数, 且 $p > q$ 。解上述微分方程, 可得 $k_1 \sigma(t)^{(p-q)/p} + k_2 = c \exp(-[k_1(p-q)]t/p)$, 设 $x(0) \neq 0$, 可得 $c = k_1 \sigma(0)^{(p-q)/p} + k_2$ 。所以, 当 $\sigma(t_s) = 0$ 时, 可解出 $t_s = [p/k_1(p-q)] \ln(k_1 \sigma(0)^{(p-q)/p} + k_2)/k_2$ 。可知变量 σ 在 $t \geq t_s$ 时达到零并保持不变。

利用上述微分方程的解在有限时间内为零并保持不变的性质, 设计滑模变量为

$$\sigma(t) = \left(\frac{d}{dt} + \frac{\lambda}{\epsilon_1}\right)^{r-1} e_1 = e_1^{(r-1)} +$$

$$\frac{a_1}{\epsilon_1} e_1^{(r-2)} + \dots + \frac{a_{r-2}}{\epsilon_1^{r-2}} e_1 + \frac{a_{r-1}}{\epsilon_1^{r-1}} e_1。 \quad (13)$$

趋近律如式 (12) 所示。 $\lambda, \epsilon_1 > 0, \epsilon_1$ 为扰动参数。

其中, $\prod_{i=1}^{r-1} (s + \lambda_i) = 0$ 与 $s^{r-1} + a_1 s^{r-2} + \dots + a_{r-2} s + a_{r-1} = 0$ 等价, 并且 $\lambda_1, \dots, \lambda_{r-1}$ 均为大于零的互不相同的实数。 $k_1, k_2 > 0, p > q > 0$, 并且 p, q 为奇数。进一步规定 $(p+q)/2$ 同时也为奇数, 用于以后的稳定性分析中 Lyapunov 函数微分不等式的构造。

可以看出, 当 $t \geq t_s$ 时, $\sigma \equiv 0$, 基于式 (12), 当 $t \geq t_s$ 得到一个 $r-1$ 阶常系数微分方程

$$e_1^{(r-1)} + \frac{a_1}{\epsilon_1} e_1^{(r-2)} + \dots + \frac{a_{r-2}}{\epsilon_1^{r-2}} e_1 + \frac{a_{r-1}}{\epsilon_1^{r-1}} e_1 = 0。 \quad (14)$$

微分方程的解为

$$e_1(t) = \sum_{i=1}^n h_i \exp\left(-\frac{\lambda_i}{\epsilon_1} t\right), \quad (15)$$

其中, h_i 为不等于零的常数。可以看出, 当 $\epsilon_1 > 0$

充分小时, $\hat{e}_1(t)$ 迅速向零收敛, 根据观测器的性质, $e_1(t)$ 迅速向零收敛, 只需设计控制器使得变量到达滑模面式 (12) 即可。同时可以看到上述的 $r-1$ 阶常系数微分方程具有滤波作用, 并且由于 $\epsilon_1 > 0$ 的存在, 加快了 $\hat{e}_1(t)$ 收敛速度。从而给出如下定理。

定理 2 对于系统式 (4), 采用式 (10) 所示的观测器, 控制器采用如下形式:

$$u = b(\hat{\mathbf{e}}, \hat{\boldsymbol{\eta}}, \mathbf{Y}_\Gamma)^{-1} (-a(\hat{\mathbf{e}}, \hat{\boldsymbol{\eta}}, \mathbf{Y}_\Gamma) - v(t) - k_1 \sigma(t) - k_2 (\sigma(t))^{q/p}). \quad (16)$$

那么,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\bar{\mathbf{e}} \quad \boldsymbol{\eta}\|^T = 0, \quad (17)$$

其中,

$$v(t) = -y_\Gamma^{(r)} + \frac{a_1}{\epsilon_1} e_1^{(r-1)} + \dots + \frac{a_{r-2}}{\epsilon_1^{r-2}} e_1 + \frac{a_{r-1}}{\epsilon_1^{r-1}} e_1。$$

证明:

$$\dot{\sigma} = e_1^{(r)} + \frac{a_1}{\epsilon_1} e_1^{(r-1)} + \dots + \frac{a_{r-2}}{\epsilon_1^{r-2}} e_1 + \frac{a_{r-1}}{\epsilon_1^{r-1}} e_1 =$$

$$a(\mathbf{e}, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{Y}_\Gamma) + b(\mathbf{e}, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{Y}_\Gamma) u + v(t)。$$

设 Lyapunov 函数为 $V = \sigma^2(t)/2$, 所以,

$$\dot{V} = \sigma(t) \dot{\sigma}(t) = \sigma(t) (a(\mathbf{e}, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{Y}_\Gamma) + b(\mathbf{e}, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{Y}_\Gamma) u + v(t)) = -k_1 \sigma^2(t) - k_2 \sigma(t)^{(p+q)/p} \leq 0。$$

另外, 由假设 1 定理得证。

5 稳定性分析

当系统中有扰动、不确定项时，非线性误差系统表示如下

$$\begin{cases} \dot{\bar{e}} = A\bar{e} + B[a(\bar{e}, \eta) - y_r^{(r)} + \\ b(\bar{e}, \eta)u + d(t)], \\ \dot{\eta} = q(\bar{e}, \dots, \eta). \end{cases} \quad (18)$$

其中 $|d(t)| \leq L_1, L_1$ 为大于零的常数。

引理 1^[14] 如果 $W(X, t)$ 在开集 $D \in R^2$ 上是连续的，且对微分方程

$$\dot{X}(t) = W(X(t), t), X(t_0) = X_0 \quad (19)$$

存在唯一解。如果 $X(t)$ 是上述微分方程在时域 $[t_0, t_1]$ 上的解， $V(t)$ 是微分不等式

$$\dot{V}(t) \leq W(V(t), t) \quad (20)$$

在时域 $[t_0, t_1]$ 上的解，且初始条件满足 $V(t_0) \leq X(t_0)$ ，则在时域 $[t_0, t_1]$ 上存在不等式关系

$$V(t) \leq X(t). \quad (21)$$

定理 3 对于系统式 (18)，采用观测器式 (10)、控制器式 (16)，那么，

$$|e_1^{(i)}| \leq 2^i \phi \epsilon_1^{(r-i-1)} / \lambda^{(r-i-1)}, i = 0, \dots, r-1, \quad (22)$$

其中

$$1/\gamma \leq b(\bar{e}, \eta, Y_r) / b(\hat{e}, \hat{\eta}, Y_r) = \theta \leq \gamma,$$

$$|a(\bar{e}, \eta, Y_r) - \theta a(\hat{e}, \hat{\eta}, Y_r)| \leq L_2,$$

$$|1 - \theta| \|v(t)\| \leq L_3,$$

$$a(\bar{e}, \eta, Y_r) - \theta a(\hat{e}, \hat{\eta}, Y_r) + 1 - \theta v(t) = \Theta(t),$$

$$\gamma, L_1, L_2, L_3 \in R^+, L_1 + L_2 + L_3 = L,$$

$$\phi = \min\{\gamma L/k_1, (\gamma L/k_2)^{p/q}\}, \quad (23)$$

$$k_1 = \gamma(L/|\sigma| + \mu_1), \mu_1 > 0,$$

$$k_2 = \gamma(L/|\sigma|^{(q/p)} + \mu_2), \mu_2 > 0. \quad (24)$$

证明 选取 Lyapunov 函数为 $V = \sigma^2(t)/2$ ，沿着式 (18) 的解曲线求导，得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = \sigma\dot{\sigma} &= \sigma(a(\bar{e}, \eta, Y_r) + b(\bar{e}, \eta, Y_r)u + \\ v(t) + d(t)) &= -\theta k_1 \sigma^2 - \theta k_2 \sigma^{(p+q)/p} + \sigma\Theta(t) = \\ &= -(\theta k_1 - \Theta(t)/\sigma)\sigma^2 - \theta k_2 \sigma^{(p+q)/p} < \\ &= -(k_1/\gamma - L/|\sigma|)\sigma^2 - \frac{1}{\gamma} k_2 \sigma^{(p+q)/p}. \end{aligned} \quad (25)$$

如果 $|\sigma| > \gamma L/k_1$ ，那么 $\dot{V}(t) = \sigma\dot{\sigma} < 0$ 。由式 (25) 得

$$\dot{V}(t) \leq -2(k_1/\gamma - L/|\sigma|)V(t) -$$

$$2^{(p+q)/2p} k_2 V(t)^{(p+q)2/p}/\gamma =$$

$$-2\mu_1 V(t) - 2^{(p+q)/2p} k_2 V(t)^{(p+q)2/p}/\gamma. \quad (26)$$

而由式 (12) 的分析，且 $(p+q)/2$ 也为奇数，所以微分方程

$$\dot{X}(t) = -2\mu_1 X(t) - 2^{(p+q)/2p} k_2 X(t)^{(p+q)/2p}/\gamma \quad (27)$$

的解在有限时间内为零。当 $X(t_0) = V(t_0) > 0$ 时，由引理 1 得 $0 < V(t) \leq X(t)$ 。所以在有限时间内 $V(t)$ 到达零并保持不变。可以看出 σ 在有限时间后 $t_1 - t_0$ ，保持在区域 $\{|\sigma| \leq \gamma L/k_1\}$ 内。或者式 (26) 可以写成

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= -\theta k_1 \sigma^2 - (\theta k_2 - \Theta(t)/\sigma^{q/p})\sigma^{(p+q)/p} \leq \\ &= -k_1 \sigma^2/\gamma - (k_2/\gamma - L/|\sigma|^{q/p})\sigma^{(p+q)/p}. \end{aligned} \quad (28)$$

如果 $|\sigma| > (\gamma L/k_2)^{p/q}$ ，那么 $\dot{V}(t) = \sigma\dot{\sigma} < 0$ 。由式 (28)，得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq -2k_1 V(t)/\gamma - 2^{(p+q)/2p} (k_2/\gamma - \\ &L/|\sigma|^{q/p}) V(t)^{(p+q)/2p} = \\ &= -2k_1 V(t)/\gamma - 2^{(p+q)/2p} \mu_2 V(t)^{(p+q)/2p}. \end{aligned} \quad (29)$$

类似分析可知，在有限时间内 $V(t)$ 到达零并保持不变。所以，可以看出 σ 在有限时间后 $t_2 - t_0$ 保持在区域 $\{|\sigma| \leq (\gamma L/k_2)^{p/q}\}$ 内。

总之， σ 有限时间段 $\max(t_1 - t_0, t_2 - t_0)$ 后保持在区域

$$\{|\sigma| \leq \phi = \min\{\gamma L/k_1, (\gamma L/k_2)^{p/q}\}\}$$

内。由式 (13)，得到

$$\begin{aligned} |\sigma(t)| &= \left| e_1^{(r-1)} + \frac{a_1}{\epsilon_1} e_1^{(r-2)} + \dots + \right. \\ &\left. \frac{a_{r-2}}{\epsilon_1^{r-2}} e_1 + \frac{a_{r-1}}{\epsilon_1^{r-1}} e_1 \right| \leq \phi. \end{aligned} \quad (30)$$

所以，可知 ϕ/λ^{n-1} 为有界层的宽度，并且可得^[14, 15]

$$\begin{aligned} |e_1^{(i)}| &\leq \left(\frac{2\lambda}{\epsilon_1}\right)^i \phi / \left(\frac{\lambda}{\epsilon_1}\right)^{r-1} = 2^i \frac{\epsilon_1^{r+i-1} \phi}{\lambda^{r+i-1}}, \\ &i = 0, \dots, r-1. \end{aligned}$$

定理得证。

6 仿真

非线性系统为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_1 x_2 - x_1^3 \\ x_1 \\ -x_3 \\ x_1^2 + x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 + 2x_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u + \mathbf{M}(\mathbf{x})w,$$

$$y = h(\mathbf{x}) = x_4.$$

对于上述系统, 得到

$$\begin{aligned} \partial h / \partial \mathbf{x} &= [0 \ 0 \ 0 \ 1], L_g h(\mathbf{x}) = 0, \\ L_f h(\mathbf{x}) &= x_1^2 + x_2, L_g L_f h(\mathbf{x}) = 2(1 + x_3), \\ L_f^2 h(\mathbf{x}) &= 2x_1^2 x_2 - 2x_1^4 + x_1. \end{aligned}$$

可知系统的相对阶为2。令 $\xi_1 = h(\mathbf{x}) = x_4, \xi_2 = L_f h(\mathbf{x}) = x_2 + x_1^2$, 得到 $\eta_1 = x_3, \eta_2 = x_1$ 。因此, Jacobi 矩阵

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \chi(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2x_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

是非奇异的, 并且逆变换为 $x_1 = \eta_2, x_2 = \xi_2 - \eta_2^2, x_3 = \eta_1, x_4 = \xi_1$ 。

参考输入为 $y_r = 2e^{-0.5t} \sin 0.5t + \cos t + d(t)$, $|d(t)| < 0.1$ 。

系统在新的坐标系下误差系统为

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2, \\ \dot{e}_2 = \eta_2 + \eta_2(\eta_2(e_2 - \eta_2^2) - \eta_2^3) + \\ \quad (2 + 2\eta_1)u - y_d^{(2)}, \\ \dot{\eta}_1 = -\eta_1, \\ \dot{\eta}_2 = -2\eta_2^3 + e_2\eta_2. \end{cases}$$

观测器为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\hat{e}}_1 \\ \dot{\hat{e}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [\hat{\eta}_2 + \\ \quad \hat{\eta}_2(\hat{\eta}_2(\hat{e}_2 - \hat{\eta}_2^2) - \hat{\eta}_2^3) - y_r^{(2)} + \\ \quad (2 + 2\hat{\eta}_1)u] + \begin{bmatrix} 1/0.01 \\ 2/0.01^2 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} e_1 - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \dot{\hat{\eta}}_1 \\ \dot{\hat{\eta}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\hat{\eta}_1 \\ -2\hat{\eta}_2^3 + \hat{e}_2\hat{\eta}_2 \end{bmatrix}. \end{cases}$$

选取滑模变量为

$$\sigma(t) = (d/dt + 1)'e_1.$$

趋近律选为

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}(t) &= -k_1\sigma(t) - k_2\sigma(t)^{q/p}, \\ k_1 &= 2, k_2 = 0.5, q = 3, p = 7. \end{aligned}$$

控制器为

$$\begin{aligned} u &= (2 + 2\hat{\eta}_1)^{-1}(-(\hat{\eta}_2 + \hat{\eta}_2(\hat{\eta}_2(\hat{e}_2 - \hat{\eta}_2^2) - \\ &\quad \hat{\eta}_2^3)) - v(t) - k_1\sigma(t) - k_2(\sigma(t))^{q/p}), \\ v(t) &= -y_r^{(2)} + \dot{e}_1. \end{aligned}$$

闭环系统输出误差曲线如图1所示。

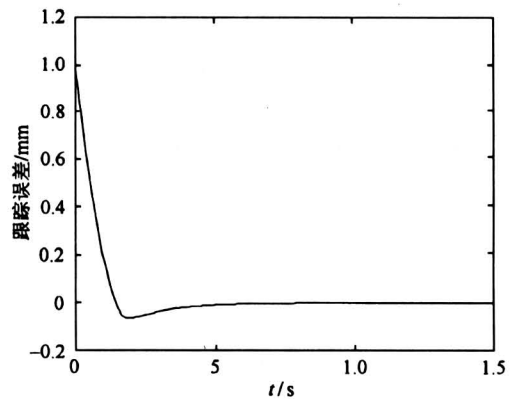


图1 系统输出误差曲线

Fig.1 The curve of output error for the system

7 结论

由以上分析及仿真可知, 所设计的滑模控制器抗干扰性强, 且具有较快的收敛速度。

参考文献

- [1] Byrnes C I, Isidori A. Asymptotic stabilization of minimum phase nonlinear systems [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1991, 36 (10): 1122~1136
- [2] Sastry S S, Isidori A. Adaptive control of linearizable system [J]. IEEE Transaction on Automatic Control, 1989, 34: 1123~1131
- [3] Qian Chunjiang, Lin Wei. A continuous feedback approach to global strong stabilization of nonlinear systems [J]. IEEE Transaction on Automatic Control, 2001, 46 (7): 1061~1079
- [4] Nikiforov V O. Nonlinear servo-compensation of unknown external disturbances [J]. Automatica, 2001, 37: 1647~1653

- [5] Kokotovic P, Arcak M. Constructive nonlinear control: a historical perspective [J]. *Automatica*, 2001, 37: 637~662
- [6] Hu Qiuping, Rngaiah G P. Internal model control with feedback compensation for uncertain nonlinear systems [J]. *INT J Control*, 2001, 74 (14): 1456~1466
- [7] Kravaris C, Daoutidis P. Nonlinear state feedback control of second-order nonminimum-phase nonlinear systems [J]. *Computers and Chemical Engineering*, 1990, 14: 439~449
- [8] Edwards C, Spurgeon S K. *Sliding Mode Control: Theory and Applications* [M]. Taylor & Francis Ltd, 1998. 123~145
- [9] 李俊峰, 徐敏, Sley W H. 低轨道航天器姿态跟踪机动控制研究 [J]. *清华大学学报 (自然科学版)*, 2001, 41 (2): 102~104
- [10] Kokotovic P, Arcak M. A control engineer's guide to sliding mode control [A]. *IEEE Workshop on Variable Structure Systems* [C]. Japan: Tokyo, 2001. 1~14
- [11] Sussmann H J, Kokotovic P V. The peaking phenomenon and global stabilizing of nonlinear systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1991, 36: 424~440
- [12] Esfandlary F, Khalil H K. Stability analysis of a continuous implementation of variable structure control [J]. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 1991, 36 (5): 616~619
- [13] Chong S S, Yu Xinghuo, Yu Shanghe. Robust terminal sliding mode control of a flexible robot arm [A]. *Proceedings of the 6th International Workshop on Variable Structure Systems* [C]. Australia: Coolangatta, Gold Coast, Queensland, Australia, 2000. 500~509
- [14] Slotine J E, Li W. *Applied Nonlinear Control* [M]. N J: Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1991
- [15] Slotne J A. Coetsee. Adaptive sliding controller synthesis for nonlinear systems [J]. *Int J Control*, 1986, 43: 1631~1651

High-gain Sliding Mode Output Tracking for Nonlinear Systems

Wang Xinhua, Chen Zengqiang, Yuan Zhuzhi

(*Dept of Automation, Nankai University, Tianjin 300071, China*)

[Abstract] An observer based on external and internal dynamics is designed, making the error between observing value and factual value to zero. Moreover, a continuously high-gain sliding mode controller is presented by using a sliding mode state which can make the error between the output and reference signal converge to zero. The analysis of stability and the result of simulation indicate that the controller designed has strong robustness and rapid convergence.

[Key words] nonlinear systems; external dynamics; internal dynamics; sliding mode control; robustness