学术论文

灰色斜率关联度的改进

党耀国，刘思峰，刘　斌，米传民
（南京航空航天大学经济与管理学院，南京　210016）

［摘要］　研究了单指标数据序列的几种无量纲化变换及其性质，提出了一种对灰色斜率关联度的改进模型，改进后的关联度能够反映序列的正、负相关关系，并且对原始序列进行无量纲化变换处理时不影响关联系数及关联度的值，还研究了改进的关联度及关联系数的性质。该方法充分利用了序列各时点的信息及正、负相关性，所得关联分析结果较为客观可靠，并且易于在计算机上实现。

［关键词］　关联度；斜率；无量纲化变换；数据序列
［中图分类号］ N94　　［文献标识码］ A　　［文章编号］ 1009－1742（2004）03－0041－04

1　引言

灰色系统理论中的关联分析是一种新的因素分析方法，它主要是通过对系统数据序列的几何关系进行比较来分析系统中各因素间的关联程度[1]，即认为刻画因素的时间变量之间所表示曲线的几何形状越接近，就认为它们之间的关联程度越大。因而关联分析是否能真实反映一个系统中各种因素相互影响的关系，关键是如何计算关联度，目前关于关联度的量化模型很多，如邓氏关联度[1]、灰色 B 型关联度[2]、T 型关联度[3]、广义关联度[4]、灰色斜率关联度[5]、灰色绝对关联度[6]、C 型关联度[7]、灰色欧几里德关联度[8]等，这些学者从不同的方面对关联度进行了认真的研究，都取得了一定的应用效果。但这些关联度大都与邓氏关联度类似，不能反映正、负相关关系。文献［3］虽然在这方面有所体现，但有一些缺陷[9,10]。下面首先介绍单指标数据序列的无量纲化变换，并就其性质进行讨论；然后针对文献［5］中的灰色斜率关联度进行改进，并讨论了它的一些性质，通过实例验证该方法的实用性。

2　单指标数据序列的变换

定义 1　设有非负序列 $X=\{x(1),x(2),\cdots,x(n)\}$：

若　$d_1x(k)=\dfrac{x(k)}{x(1)},(k=1,2,\cdots,n)$，
则称 d_1 为初值化变换；

若 $d_2x(k)=\dfrac{x(k)}{\bar{x}},\bar{x}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x(i),(k=1,2,\cdots,n)$，
则称 d_2 为均值化变换；

若　$d_3x(k)=\dfrac{x(k)}{\max\limits_k\{x(k)\}},(k=1,2,\cdots,n)$，
则称 d_3 为百分比变换；

若　$d_4x(k)=\dfrac{x(k)}{\min\limits_k\{x(k)\}},(k=1,2,\cdots,n)$，
则称 d_4 为倍数变换。

以上变换 $\{d_1,d_2,d_3,d_4\}$ 统称为无量纲化变换。

定理 1　上述无量纲化变换 $\{d_1,d_2,d_3,d_4\}$ 满足

1）保号性　当 $x(k)>0$ 时，$d_ix(k)>0$，(k

［收稿日期］　2003－05－25；修回日期 2003－07－05
［基金项目］　教育部博士点基金资助项目（20020287001）；江苏省自然科学基金重点资助项目（BK2003211）
［作者简介］　党耀国（1964－），男，河南驻马店市人，南京航空航天大学副教授，博士研究生

$= 1,2,\cdots,n;i = 1,2,3,4$);

2）保序性　若 $x(i) < x(j)$ 时，则 $d_l x(i) < d_l x(j)$;

若 $x(i) > x(j)$ 时，则 $d_l x(i) > d_l x(j)(l = 1,2,3,4)$。

证明　1）对于初值化变换，当 $x(k) > 0$ 时，则

$$d_1 x(k) = \frac{x(k)}{x(1)} > 0,(k = 1,2,\cdots,n);$$

对于均值化变换，当 $x(k) > 0$ 时，则

$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x(i) > 0$，所以 $d_2 x(k) = \frac{x(k)}{\bar{x}} > 0,(k = 1,2,\cdots,n)$;

对于百分比变换、倍数变换同理可证。即无量纲化变换满足保号性。

2）对于初值化变换，若 $x(i) < x(j)$ 时，则 $d_1 x(i) = \frac{x(i)}{x(1)} < \frac{x(j)}{x(1)} = d_1 x(j)$,

若 $x(i) > x(j)$ 时，则 $d_1 x(i) = \frac{x(i)}{x(1)} > \frac{x(j)}{x(1)} = d_1 x(j)$;

对于均值化变换，若 $x(i) < x(j)$ 时，则 $d_2 x(i) = \frac{x(i)}{\bar{x}} < \frac{x(j)}{\bar{x}} = d_2 x(j)$,

若 $x(i) > x(j)$ 时，则 $d_2 x(i) = \frac{x(i)}{\bar{x}} > \frac{x(j)}{\bar{x}} = d_2 x(j)$;

对于百分比变换、倍数变换同理可证。即无量纲化变换满足保序性。

3　灰色斜率关联度的改进及其算法

为了克服文献［1～8］中的不足，对关联度给出一种新的设想。其基本思想为：按照因素时间序列曲线的平均相对变化态势的接近程度来计算灰色关联度。基于这种思想，改进的灰色斜率关联度的计算方法如下：

对于时间区间［a，b］，$0 \leqslant a < b$，令

$$\Delta t_k = t_k - t_{k-1}, k = 2,3,\cdots,n,$$

$$[a,b] = \bigcup_{k=2}^{n} \Delta t_k, \Delta t_k \cap \Delta t_{k-1} = \phi, k = 2,3,\cdots,n。$$

因而有下面的定义：

定义 2　设系统特征函数为 $X(t) = \{x(t_1), x(t_2),\cdots,x(t_n)\}$，系统行为函数为 $Y_i(t) = \{y_i(t_1), y_i(t_2),\cdots,y_i(t_n)\}(i = 1,2,\cdots,m)$，称

$$\xi_i(t) = \mathrm{sgn}\,(\Delta x(t),\Delta y(t))\left[1 + \left|\frac{1}{\bar{x}}\frac{\Delta x(t)}{\Delta t}\right|\right] \Big/ \left[1 + \left|\frac{1}{\bar{x}}\frac{\Delta x(t)}{\Delta t}\right| + \left|\frac{1}{\bar{x}}\frac{\Delta x(t)}{\Delta t} - \frac{1}{\bar{y}_i}\frac{\Delta y_i(t)}{\Delta t}\right|\right] \tag{1}$$

为 $X(t)$ 与 $Y_i(t)$ 在 t 时刻的灰色斜率关联系数，其中

$$\mathrm{sgn}\,(\Delta x(t),\Delta y(t)) = \begin{cases} 1 & \Delta x(t)\Delta y(t) \geqslant 0, \\ -1 & \Delta x(t)\Delta y(t) < 0; \end{cases}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x(t), \Delta x(t) = x(t + \Delta t) - x(t);$$

$\frac{\Delta x(t)}{\Delta t}$ 为系统特征函数 $X(t)$ 在 t 到 $t+\Delta t$ 的斜率；

$$\bar{y}_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i(t), \Delta y_i(t) = y_i(t + \Delta t) - y_i(t);$$

$\frac{\Delta y_i(t)}{\Delta t}$ 为系统行为函数 $Y_i(t)$ 在 t 到 $t+\Delta t$ 的斜率。

附注　当 $X(t), y_i(t)(i = 1,2,\cdots,m)$ 皆为 1－时距的离散序列时，$X(t)$ 与 $Y_i(t)$ 在 t 时刻的灰色斜率关联系数公式可以简写为

$$\xi_i(t) = \mathrm{sgn}\,(\Delta x(t),\Delta y(t))\left[1 + \left|\frac{\Delta x(t)}{\bar{x}}\right|\right] \Big/ \left[1 + \left|\frac{\Delta x(t)}{\bar{x}}\right| + \left|\frac{\Delta x(t)}{\bar{x}} - \frac{\Delta y_i(t)}{\bar{y}_i}\right|\right]。 \tag{2}$$

性质 1　任意的系统特征函数 $X(t)$ 与系统行为函数 $Y_i(t)$ 的灰色斜率关联系数满足

$$-1 < \xi_i(t) \leqslant 1, i = 1,2,\cdots,m。$$

性质 2　灰色斜率关联系数 $\xi_i(t)$ 满足对称性。

性质 3　灰色斜率关联系数 $\xi_i(t)$ 只与 $X(t), Y_i(t)$ 的几何形状有关，而与它们在空间的相对位置无关。

性质 4　$X(t)$ 与 $Y_i(t)$ 的在 t 时刻的斜率越接近，灰色斜率关联系数 $\xi_i(t)$ 就越大。

性质 5　当 $X(t)$ 与 $Y_i(t)$ 在 t 到 $t+\Delta t$ 的变化率相同时，它们的斜率相等，这时 $\xi_i(t) = 1$。

定义 3　设 $X(t)$ 为系统特征函数，$Y_i(t)(i = 1,2,\cdots,m)$ 为系统行为函数，称

$$\varepsilon_i = \frac{1}{n-1}\sum_{t=1}^{n-1} \xi_i(t)$$

为 $X(t)$ 与 $Y_i(t)$ 改进的灰色斜率关联度。

由上述定义可知，灰色斜率关联系数反映了 2 曲线在某一点的平均变化率的一致程度，而灰色斜率关联度则是表示在整个区间上灰色斜率关联系数

的平均值。

定理 2　改进的灰色斜率关联度 ε_i 具有如下性质：

1）$-1<\varepsilon_i\leqslant 1$；

2）ε_i 只与 $X(t)$，$Y_i(t)$ 的变化率有关，而与它们在空间的相对位置无关；

3）$X(t)$ 与 $Y_i(t)$ 的平均变化率越接近，则 ε_i 越大；

4）ε_i 具有唯一性、对称性和可比性。

证明　1）由于 $-1<\xi_i(t)\leqslant 1, i=1,2,\cdots,m$，因此 $-1<\varepsilon_i=\frac{1}{n-1}\sum_{t=1}^{n-1}\xi_i(t)\leqslant 1$。

由灰色斜率关联系数及灰色斜率关联度的定义，性质 2 至性质 4 显然。

附注　1）ε_i 的正负反映 2 个因素变量间的相关性质，$\varepsilon_i>0$ 表示正相关，即 $X(t)$ 的增（减）将直接导致 $Y_i(t)$ 的增（减）；$\varepsilon_i<0$ 表示负相关，即 $X(t)$ 的增（减）将直接导致 $Y_i(t)$ 的增（减）；$\varepsilon_i=1$ 表示 2 个因素变量完全相关。

2）ε_i 不再是一个相对值，而成为一个绝对值，因而 ε_i 具有可比性。

定理 3　设原始序列均为非负序列，若序列进行无量纲化变换 $\{d_1, d_2, d_3, d_4\}$，则改进的灰色斜率关联度与无量纲化变换方法无关。即经过初值化变换 d_1、均值化变换 d_2、百分比变换 d_3、倍数变换 d_4 不改变改进的灰色斜率关联度的值。

证明　1）设对原始序列进行初值化变换 d_1，记变换后的序列为 X' 和 Y_i' 由于 $\bar{x}'=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x'(t)=\frac{1}{nx(1)}\sum_{i=1}^{n}x(t)=\frac{\bar{x}}{x(1)}$，$\Delta x'(t)=x'(t+\Delta t)-x'(t)=\frac{\Delta x(t)}{x(1)}$。

同理可得：$\bar{y}_i'=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i'(t)=\frac{\bar{y}_i}{y(1)}$，

$$\Delta y_i'(t)=y_i'(t+\Delta t)-y_i'(t)=\frac{\Delta y_i(t)}{y(1)},$$

$$\xi_i'(t)=\operatorname{sgn}(\Delta x'(t),\Delta y'(t))\left[1+\left|\frac{1}{\bar{x}'}\frac{\Delta x'(t)}{\Delta t}\right|\right]\Big/\left[1+\left|\frac{1}{\bar{x}'}\frac{\Delta x'(t)}{\Delta t}\right|+\left|\frac{1}{\bar{x}'}\frac{\Delta x'(t)}{\Delta t}-\frac{1}{\bar{y}_i'}\frac{\Delta y_i'(t)}{\Delta t}\right|\right]=$$

$$\operatorname{sgn}(\Delta x'(t),\Delta y'(t))\left[1+\left|\frac{1}{\bar{x}}\frac{\Delta x(t)}{\Delta t}\right|\right]\Big/\left[1+\left|\frac{1}{\bar{x}}\frac{\Delta x(t)}{\Delta t}\right|+\left|\frac{1}{\bar{x}}\frac{\Delta x(t)}{\Delta t}-\frac{1}{\bar{y}_i}\frac{\Delta y_i(t)}{\Delta t}\right|\right]。$$

由于 $\Delta x'(t)\Delta y'(t)$ 与 $\Delta x(t)\Delta y(t)$ 的符号相同，因此

$$\operatorname{sgn}(\Delta x(t),\Delta y(t))=\operatorname{sgn}(\Delta x'(t),\Delta y'(t))。$$

故　$\xi_i(t)=\xi_i'(t)$。

2）同理可证，对原始序列进行均值化变换 d_2、百分比变换 d_3、倍数变换 d_4 也不改变改进的灰色斜率关联度的值。

4　实例

例 1　已知 x_0 为参考序列，x_1，x_2，x_3 为比较序列，其具体数据如下：

$x_0=(1.0, 2.0, 2.5, 2.5, 3.0, 5.0, 6.0)$，

$x_1=(1.0, 1.8, 2.3, 2.4, 2.8, 4.8, 5.8)$，

$x_2=(1.0, 1.8, 2.3, 2.0, 3.0, 4.1, 5.7)$，

$x_3=(1.0, 2.2, 2.5, 2.1, 3.0, 4.1, 5.8)$。

由文献[1]给出的关联度计算公式得

$r_{01}=0.754\,2, r_{02}=0.684\,5, r_{03}=0.754\,4$

故灰色关联序为

$$r_{03}>r_{01}>r_{02}$$

实际上，由 x_0，x_1，x_2，x_3 发展态势的直观可知，x_1 与 x_0 的发展态势的接近程度要比 x_2，x_3 的发展态势的接近程度更近些，因此，按文献[1] 中的公式计算的结果与实际情况不一致。

按改进的灰色斜率关联度计算公式计算的结果为

$\varepsilon_{01}=0.978\,315, \varepsilon_{02}=0.905\,299, \varepsilon_{03}=0.892\,95$

灰色关联序为

$$\varepsilon_{01}>\varepsilon_{02}>\varepsilon_{03}$$

此结果与序列的实际发展态势比较接近，说明该方法比较客观、实用。

5　结论

研究了单指标数据序列的几种无量纲化变换及其性质，提出了一种对灰色斜率关联度的改进模型，改进后的关联度能够反映正、负相关关系，并且对原始序列进行无量纲化变换处理时不影响关联系数及关联度的值，还研究了改进的关联度及关联系数的性质。该方法充分利用了序列各时点的信息及正、负相关性，所得关联分析结果较为客观可靠，并且易于在计算机上实现。此方法为解决灰色关联分析问题，特别是当灰色关联系数负相关时提供了一条新的途经。

参考文献

[1] 邓聚龙. 灰色系统的基本方法[M]. 武汉:华中理工大学出版社,1987

[2] 王清印. 灰色B型关联分析[J]. 华中理工大学学报, 1987,17(6):77~82

[3] 唐五湘. T型关联度及其计算方法[J]. 数理统计与管理, 1995, 14(1):34~37

[4] 刘思峰, 郭天榜, 党耀国. 灰色系统理论及其应用(第二版)[M]. 北京: 科学出版社, 1999

[5] 党耀国. 灰色斜率关联度的研究[J]. 农业系统科学与综合研究, 1994, 10(增刊):331~337

[6] 梅振国. 灰色绝对关联度及其计算方法[J]. 系统工程, 1992, 10(5):43~44

[7] 王清印, 赵秀恒. C型关联分析[J]. 华中理工大学学报, 1999, 27(3): 75~77

[8] 赵艳林, 韦树英, 梅占馨. 灰色欧几里德关联度[J]. 广西大学学报(自然科学版), 1998, 23(1):10~13

[9] 肖新平. 关于灰色关联度量化模型的理论研究和评论[J]. 系统工程理论与实践, 1997, 17(8): 76~81

[10] 吕锋, 刘翔, 刘泉. 七种灰色系统关联度的比较研究[J]. 武汉工业大学学报, 2000, 22(2):41~43

Improvement on Degree of Grey Slope Incidence

Dang Yaoguo, Liu Sifeng, Liu Bin, Mi Chuanmin

(*College of Economics and Management*, *Nanjing University of Aeronautics and Astronautics*, *Nanjing* 210016, *China*)

[**Abstract**] Several non-dimensionalization changings of single-index data sequence and their characteristics are studied in this paper. An improvement model on degree of grey slope incidence is developed. The improved one can reflect the positive and negative relation of sequence and by the model the value of the degree and coefficient of grey incidence does not change with any non-dimensionalization processing on the raw sequence. At the same time, the characteristics of the degree and the coefficient of grey incidence are studied. It is found that this method makes good use of the information of every timetable and its correlation of positive or negative, and the result of grey incidence analysis by this method is more scientific than before and is easier to calculate on the computer.

[**Key words**] degree of grey incidence; slope; non-dimensionalization changing; data sequence

---

(cont. from p. 40)

Heave Compensation Equipment Virtual Prototype Cooperative Design and Simulation Analysis

Lü Dong[1,2], He Jiangsan[1], Liu Shaojun[1], Huang Kai[1]

(1. *Mechanical and Electronical Institute*, *Central South University*, *Changsha* 410083, *China*;
2. *Engineering College*, *Hunan Normal University*, *Changsha* 410081, *China*)

[**Abstract**] This paper builds virtual prototype of heave compensation equipment by means of parameterized, concurrent and integrated design technology, and studies virtual simulation experiment. At the same time the paper discusses application of cooperative design in complex system. The conclusion can provide a design theory reference method for deep-ocean exploitation system frame design.

[**Key words**] heave compensation; virtual prototype; cooperative design; simulation