

完全信息价值的影响图求解法及其应用

刘艳琼, 陈英武

(国防科技大学信息系统与管理学院, 长沙 410073)

[摘要] 指出了翻转决策树法求解完全信息价值时可能存在问题的根本原因, 提出完全信息价值在影响图中的本质表现为信息弧, 并对 Howard 正则型影响图定义进行修正, 进而系统分析了两种不同情形下基于影响图求解完全信息价值的思路。最后举例说明。

[关键词] 完全信息价值; 影响图; Howard 正则型

[中图分类号] C934 **[文献标识码]** A **[文章编号]** 1009-1742(2006)08-0045-05

1 引言

在决策过程中, 通常都会面对若干不确定性因素。为了做出合理决策、采取最佳行动方案, 决策者需要收集这些不确定性因素的相关信息, 以消除不确定性。如果所收集的信息在一定程度上消除了不确定性, 但并没有完全消除不确定性, 则为不完全信息 (imperfect information), 此种情况下的决策为风险性决策。如果所收集的信息能够完全而确切地判断不确定因素的状态, 则为完全信息 (perfect information), 此种情况下的决策为确定性决策。

在实际决策过程中, 决策者所面临的绝大部分都是风险性决策。由于根据完全信息, 决策者可以确定绝对最优行动方案, 但是, 信息的收集又需要消耗资源如花费一定的时间、投入相当的人力、耗费相当的财力等, 因此, 在决策前, 决策者通常还面临一个信息收集的问题。信息收集是否值得, 是否进行信息收集工作, 需要选定一个标准量作为参照。将信息收集工作量 (含时间、人力、物力、财力等) 全部折算为费用, 那么信息收集费用绝对不能高于信息价值。因此, 信息价值的计算对于决策具有重要的意义。

传统的决策分析中, 完全信息价值的计算常采用翻转决策树法, 但是这种方法可能会遗漏某些情景, 用影响图则可以避免这个问题。但是, 影响图中的 Howard 正则型定义还存在问题, 这也影响了完全信息价值影响法的正确求解^[1]。

2 完全信息价值的定义及数学表述

完全信息价值 (VPI, value of perfect information), 即针对一个随机事件, 拥有此随机事件的完全信息时的最大期望值 (即完全信息期望值, EVPI, expected value with perfect information) 与未拥有此随机事件完全信息时的最大期望值之差。不完全信息价值 (VII, value of imperfect information), 即针对一个随机变量, 若所收集的信息为不完全信息, 则在拥有不完全信息后的最大期望值 (即不完全信息期望值, EVII, expected value with imperfect information) 与未拥有此不完全信息时的最大期望值之差。

完全信息价值可用数学表述。设决策者的行动方案集为 $D\{d_1, d_2, \dots, d_m\}$, 影响行动方案选择随机变量为 $C\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$, 与随机变量 c_i 对应的状态集合为 $S_i\{s_1, s_2, \dots, s_p\}$ 。对于 c_i 的状态 S_i ,

[收稿日期] 2005-05-12; **修回日期** 2005-07-03

[基金项目] 国家自然科学基金资助项目 (70272002)

[作者简介] 刘艳琼 (1976-), 女, 湖南隆回县人, 国防科技大学博士生, 研究方向为风险管理理论与应用

决策者根据现有信息可确定其概率分布为 $p_i(S_i)$, 若采取行动方案 d_j , 则其收益值为 $r(S_i, d_j)$, 期望收益值为 $E[r(S_i, d_j)]$ 。采取行动方案 $d(S_i)$ 时, 可获得最大期望收益值为

$$E[r(S_i, d(S_i))] = \max_{d_j} E[r(S_i, d_j)] \quad (1)$$

如果花费 $M_i(S_i)$ 费用可以收集到 c_x 状态的完全信息, 此时 c_i 的确定状态为 S_i , 采取行动方案 $d(S_i)$ 时可获得最大期望收益值, 即

$$E[r(S_i, d(S_i))] = \max_{d_j} E[r(S_i, d_j)] \quad (2)$$

则 c_i 状态的完全信息价值为

$$VPI_{S_i} = E[r(S_i, d(S_i))] - E[r(S_i, d(S_i))] \quad (3)$$

由于收集该信息需要消耗费用 $M_i(S_i)$, 因此, c_i 状态的完全信息净价值 (NVPI, net value of perfect information) 为

$$NVPI_{S_i} = E[r(S_i, d(S_i))] - E[r(S_i, d(S_i))] - M_i(S_i) \quad (4)$$

若 $NVPI_{S_i}$ 为负, 则该随机变量的完全信息没有收集价值。对于该决策中的随机变量 c_1, c_2, \dots, c_n , $NVPI_{S_i}$ 越大, 相对应 c_i 的完全信息越有收集的必要。

3 完全信息价值的翻转决策树法分析

完全信息价值概念来源于决策分析。完全信息价值一般是利用决策树求解^[1, 2]。其解决思路是, 针对原问题的决策树, 将所要估计的随机变量的分枝移到树的最左边, 这表示, 在已知随机变量状态的情况下, 再做出可使期望值最大的相应决策。文献[3]中指出用决策树法会引起混乱, 见例 1。

例 1 某项目中仪表控制分析人员估计按原计划成功解决技术难题的概率为 0.6, 失败概率为 0.4, 成功解决的价值为 50×10^4 元, 失败则为 10×10^4 元。若采用新技术, 成功概率相同, 但价值为 100×10^4 元, 失败价值为 -10×10^4 元。决策者风险中性态度。

用决策树求解此问题的图示方法如图 1 所示。

若将决策树中的随机变量节点移至树的最左边, 用图 2 的树来求解完全信息价值问题。

文献[3]指出: 由于没有考虑原计划成功而新技术失败或原计划失败而新技术成功的两种状态, 因此, 此种通过翻转决策树以计算完全信息价值的

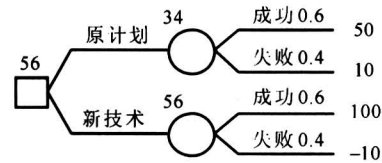


图 1 例 1 的决策树

Fig.1 Decision tree of example 1

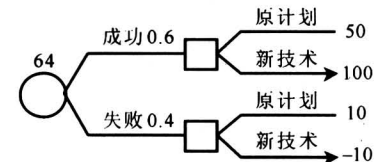


图 2 有问题的确定 VPI 的树

Fig.2 False tree for calculating VPI

方法是有问题的; 用影响图理论求解完全信息价值则可以避免此类问题的发生。

实际上, 用翻转决策树法可以正确地计算出完全信息价值, 这在文献[3]中没有分析。这类问题的情形是: 如果需要确定完全信息价值的随机事件的发生概率与决策事件无关时, 则用翻转决策树法计算完全信息价值时则不会存在问题 (见例 2)。

例 2 据市场分析, 现有某种产品需求, 销路好的概率为 0.7, 销路差的概率为 0.3。某公司有两种方案可生产此种产品, 若实行方案 A, 销路好, 可赢利 40×10^4 元, 销路差, 则损失 10×10^4 元; 若实行方案 B, 销路好, 可赢利 30×10^4 元, 销路差, 则无盈亏, 其决策树见图 3, 翻转决策树的 VPI 求解法见图 4。

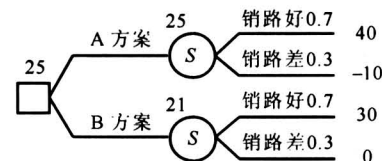


图 3 例 2 的决策树

Fig.3 Decision tree of example 2

例 2 中, 随机事件即销路 S 的完全信息价值 (VPI_S) 为 $28 - 25 = 3 (\times 10^4)$ 元。因此, 如果有某种方式可以获得该销路好坏的完全信息, 为使 $NVPI_{S_i} \geq 0$ 即使得完全信息净价值非负, 为该方式所付出的费用不应超过 3×10^4 元。在例 2 中, 随机事件的发生概率 (销路好或销路差的概率) 与决

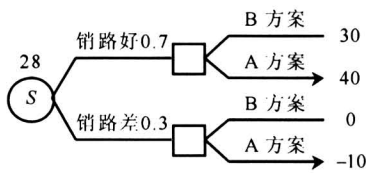


图 4 翻转决策树的 VPI 求解法

Fig.4 Reversing method for calculating VPI

策事件本身（用方案 A 或方案 B 生产产品）无关，因此，用翻转决策树法计算完全信息价值时不存在问题。而在例 1 中，随机事件的发生概率（成功或失败的概率）与决策事件（选用原计划或新技术）相关，因此，若采用直接翻转决策树即将随机变量移到决策变量的左边，会出现遗漏某些可能事件，从而导致完全信息价值的计算出现偏差。

因此可得出结论：如果需要确定完全信息价值的随机事件发生概率与决策事件无关，则可以直接用翻转决策树法求解完全信息价值。如果需要确定完全信息价值的随机事件发生概率与决策事件相关，设随机事件有 m 种结局，决策事件可有 n 种行动，则翻转决策树后需引入 m^n 个分枝；或用影响图法来确定随机事件的完全信息价值。

4 完全信息价值的影响图求解法分析

4.1 影响图的基本概念

影响图 (ID, influence diagram) 由有向弧与储存了数据结构的结点集组成。影响图用 $G = (N, A)$ 表示, N 是结点集, A 是连接结点的有向弧集, 即

$$N = \{x_i, i = 1, 2, \dots, n\},$$

$$A = \{(x_i, x_j), \text{自 } x_i \text{ 到 } x_j \text{ 的有向弧}\}.$$

影响图中的结点集代表了决策事件、随机事件与决策者偏好。因此，影响图中的结点可以分为 3 类，即决策结点、机会结点与价值结点。决策结点代表决策者进行选择的状态。机会结点代表客观状态的不确定性。价值结点作为一种确定型机会结点，代表了决策者的偏好。

影响图中不同结点间的弧向代表了概率相关、信息传递、因果关系与决策顺序等。自机会结点到机会结点或价值结点的弧为关联弧，意味着 2 个结点之间存在概率相关性。进入决策结点的弧表明决策者在选择行动之前已经知道了连接箭尾结点的结果，为信息弧。自决策结点到价值结点或机会结点的弧意味着结点之间存在因果关系，为影响弧。自

决策结点到决策结点的弧意味着 2 个决策结点之前存在着先后决策关系，为勿忘弧。因此，影响图直观而紧凑地显示了决策变量、机会状态与偏好之间的时序关系、信息关系以及概率关系。

影响图可用 3 个不同的层面表述问题，即拓扑层、函数层和数值层。在拓扑层，很多信息包含在图形结构中，因为有向无环图不仅可以表述变量之间的概率相关性、因果关系、信息关系、决策时序关系，还可直观显示进入结点的联合概率分布以及联合效用函数。

在函数层次，影响图中，每个结点（除了价值结点外）的条件概率分布为

$$P(x_i) = P(x_i | pa(x_i)) \quad (5)$$

其中 $pa(x_i)$ 是结点 x_i 的直接前序节点集合。

在数值层次，概率分布、元情景分布 (atomic scenario distribution) 以及效用的数值细节都可储存在影响图的结点中。带情景的分布树可以表达出元分布的条件情景。每一个决策结点的分布树描述了决策者在每一种条件情景下的可选方案分布。每一个机会结点分布树表达了联合概率分布。价值结点的分布树显示了联合效用函数。

4.2 完全信息价值的影响图求解法分析

如果给出了某问题的影响图，要求求解某随机事件的完全信息价值，也就是说，需要求解给出随机事件确切情况后，对决策产生了影响从而引起的期望值变化。而在影响图中，自机会结点指向决策结点的弧为信息弧，它表明随机事件为决策事件提供了信息。因此，根据影响图理论，完全信息价值的计算在影响图中可以简单而直观地描述：添加自随机事件至决策事件的箭线，得到新影响图；新影响图中的期望值与原影响图中的期望值之差，为该随机事件的完全信息价值。这个计算完全信息价值的影响图法的理念简单明了，但是在应用中会存在一些问题。

文献[4]中介绍了利用影响图计算完全信息价值的方法。

定义 1 Howard 正则型 在一个构造完好的影响图中，如果机会结点的直接前序结点中无决策结点，则为 Howard 正则型影响图。

将非 Howard 正则型影响图转化为正则 Howard 型影响图。其具体作法：针对需要确定完全信息价值的随机事件，引入一个假想的洞察者（假设他可以确切预报随机事件）；由洞察者预报的事件，引

出一组不受决策者影响的新事件，以取代决策结点对机会结点的影响，并且避免由机会结点向决策结点引信息弧线产生环路。

计算改造后的 Howard 正则型影响图中的期望值与原影响图中的期望值之差，则为该随机事件的完全信息价值。

文献[4]中的方法存在的问题出现在 Howard 正则型定义上。事实上，如果决策结点 D_i 不是需要确定完全信息价值的机会结点 C_j 的直接前序结点，而是其间接前序结点时，同样会产生环路。

定理 1 如果决策结点 D_i 是需要确定完全信息价值的机会结点 C_j 的前序结点，则添加自机会结点 C_j 至决策结点 D_i 的信息弧将产生环路。

证明 若决策结点 D_i 是机会结点 C_j 的直接前序结点，说明有自决策结点至机会结点的影响弧，若再添加自机会结点 C_j 至决策结点 D_i 的信息弧，必将形成环路，如图 5 所示。

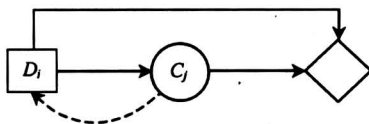


图 5 决策结点为机会结点的直接前序结点情形

Fig.5 Decision node being direct predecessor of chance node

若决策结点 D_i 是机会结点 C_j 的间接前序结点，则必存在至少一条连续的有向路径，自 D_i 可以到达 C_j 。为计算完全信息价值，当直接引入自 C_j 到 D_i 的有向弧时，则在新影响图中至少构成一个环。如图 6 所示。

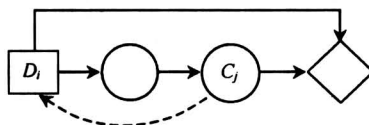


图 6 决策结点为机会结点的间接前序结点情形

Fig.6 Decision node being indirect predecessor of chance node

此外，Howard 正则型是针对某个随机事件而言的。因此，Howard 正则型定义应该修正。

定义 2 修正的 Howard 正则型 在一个构造完

好的影响图中，如果某机会结点 C_j 的前序结点（含间接前序结点与直接前序结点）中无决策结点，则该影响图为机会结点 C_j 的 Howard 正则型影响图。

也就是说，在机会结点 C_j 的 Howard 正则型影响图（以此处及以下的分析中，Howard 正则型影响图均是指定义经过本文修正的）中，决策结点可以是其他机会结点的前序结点。

完全信息价值的影响图求解法总结如下：

对于 Howard 正则型，即需确定完全信息价值的机会结点 C_j 的前序结点中无决策结点，如图 7 所示，则可以直接添加自随机结点至决策结点的信息弧（虚线即为添加的信息弧），这表明，随机事件的状态为决策事件提供了信息，该信息进而会对期望值产生影响，那么期望值所发生的变化则为该随机事件的完全信息价值。

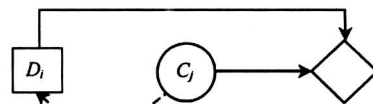


图 7 可直接添加箭线计算 VPI 的影响图

Fig.7 ID to calculate VPI by adding arrow

对于非 Howard 正则型，如果直接添加自随机事件至决策事件的箭线则会导致一个严重的问题，问题来自影响图中需要绝对避免产生环路的特性。因此，必须将非 Howard 正则型转化 Howard 正则型，转化思路为：自需确定完全信息价值的随机事件引出一组不受决策者影响的新事件，这组新事件是针对每一种可能决策引进一个机会结点而构造的，以取代决策结点对代表该随机事件的机会结点的影响，则原机会结点转化为确定型结点；然后添加自新事件至决策事件的信息弧，从而得到 Howard 正则型的新影响图。通过分析评估，计算新影响图与原影响图中的期望值之差，则为所求随机事件的完全信息价值。

4.3 完全信息价值的排序

文献[5]中指出，通过研究影响图的拓扑结构，分析随机变量节点在影响图上所处的位置及其相互的关系，则不进行数值计算即可直接对影响图上的随机变量的完全信息期望值进行排序。

定理 2 设 $G = (C, D, V, A)$ 是决策模型的影响图表示， A 为影响图中的有向弧集， D 为决策节

点集, C 为随机结点集, V 为价值结点。 $X \in C$ 和 $Y \in C$ 是 2 个不相交的随机节点集, 如果 X 和 Y 不是 D 的后代, $X \cap Y = \emptyset$ 且 $Y \perp V \perp X$, 即在已知 X 的情况下 Y 与 V 相互间独立, 则有下式成立:

$$VPI_x \geq VPI_y \quad (6)$$

根据此定理, 即可对影响图中随机变量的信息价值进行排序。在正则影响图中, 距离价值结点较远的随机结点相对于较近的随机结点而言, 完全信息价值要低。因此, 在考虑收集随机变量的进一步信息时, 应该考虑最靠近价值结点的随机结点。由于此定理要求影响图相对于随机结点 X 和 Y 而言是正则影响图, 因此, 在进行排序时, 需要进行非正则影响图向正则影响图的转换。

5 完全信息价值计算举例

下面举例说明所提出的处理完全信息价值问题的影响图法。

例 3 以文献[4]中晚会问题为例。一群学生在不知天气 (W) 是晴 (S) 还是雨 (R) 的情况下, 决定举行联欢会的地点 (L): 室内 (I)、室外 (O) 或走廊 (P)。假设对于学生而言, 天晴时在室外、室内、走廊举行晚会的价值分别为 100, 40, 60, 下雨时在室外、室内、走廊举行晚会的价值分别为 -60, 60, 40, 根据天气预报, 下雨的可能性为 0.3。该问题的原影响图见图 8。求解可得室外、室内、走廊举行晚会的期望值分别为 52, 46, 54, 因此应选择在走廊举行。

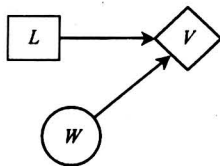


图 8 晚会问题的影响图
Fig.8 ID of evening problem

在文献[4]中, 为求解天气状况的完全信息价值, 引入了 3 个新事件取代原来表示天气的机会结点, 见图 9。

如上所述, 该晚会问题属于可以直接添加自随机结点至决策结点的箭线的情形, 不需要引入新事件, 如图 10 所示。对于图 10, 价值结点的数据结构如图 11 所示。

新影响图 10 的期望值为 88, 因此, 天气状况的完全信息价值为 $88 - 54 = 34$ 。

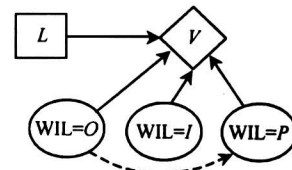


图 9 文献[4]中天气状况完全信息价值的影响图法

Fig.9 ID method of VPI of weather in ref. [4]

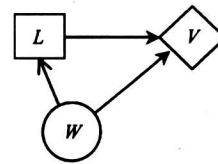


图 10 天气状况完全信息价值的影响图法

Fig.10 ID method of VPI of weather

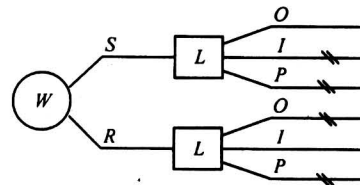


图 11 价值结点的数值结构

Fig.11 Numerical structure of value node

6 结论

完全信息价值对于决策分析有重要意义。它可以向决策者提供为减少不确定性而收集新信息适度耗费的尺度。通过对若干随机变量的完全信息价值进行排序, 还可判定哪个随机变量的新信息的收集价值更大。由于在影响图中, 随机事件的完全信息价值可以直观地表述, 计算方式也相对简洁明确; 此外, 还可以通过影响图上变量间的拓扑关系而无须经过定量计算, 对完全信息价值的大小直接进行排序, 因此, 处理有关完全信息价值的问题时, 用影响图法比用翻转决策树法更加简便。

参考文献

[1] Riss T. Quantifying the value of information [J]. Petroleum Engineer International, 1999, (6): 48 ~ 52
 [2] 杨元梁. 风险决策下的设备更新分析[J]. 林业机械与木工设备, 2001, (3): 26 ~ 28

- [11] Rudin-Browna C M. Usability Issues Concerning Child Restraint System Harness Design [R]. December 2001
- [12] Decina L E, Lococo K H. Child Restraint System Use and Misuse in Six States [R]. January 2005

Present Situation and Future Prospects of Child Restraint Systems for Vehicles

Fang Yuan, Wu Guangqiang

(Automotive Department, Tongji University, Shanghai 201804, China)

[Abstract] Child restraint system (CRS) is a new study field in the world. Especially in China, the CRS research is particularly meaningful with the rapid growth of the number of child passengers. The amendment and optimization on the regulations of CRS are brought out based on the distinction between CRS and occupant safety systems. The application of advanced design theory, the technology of computer simulation and the systematical analysis strategy will bring a new prospect for the development of CRS.

[Key words] child restraint system; safety chair; sled test; injury criteria; rating program

(上接第 49 页)

- [3] 詹原瑞. 确定信息与控制价值的正确方法[J]. 控制与决策, 1995, (4): 335 ~ 342
- [4] 詹原瑞. 影响图理论方法与应用[M]. 天津: 天津大学出版社, 1995
- [5] 张红兵, 赵杰煜, 罗雪山. 影响图的信息值分析[J]. 系统工程与电子技术, 2004, (4): 440 ~ 443

The Method of Calculating the Value of Perfect Information Based on the Influence Diagram

Liu Yanqiong, Chen Yingwu

(School of Information System & management, National University of Defence Technology, Changsha 410073, China)

[Abstract] The problem of calculating the value of perfect information based on the decision tree is analyzed. Then, the article presents that the value of perfect information could be described by the information arc in the influence diagram. Also, the definition of the Howard canonical form is modified. Last, how to calculate the value of perfect information based on the influence diagram is analyzed systematically.

[Key words] value of perfect information; influence diagram; Howard canonical form