一类新的强化缓冲算子及其数值仿真

崔　杰[1,2]，党耀国[2]，刘思峰[2]，谢乃明[2]

（1.淮阴工学院经济与管理学院，江苏淮安 223001；2.南京航空航天大学经济与管理学院，南京 210016）

[摘要] 根据新信息优先利用原理，在已有强化缓冲算子研究的基础上，构造一类新的强化缓冲算子，同时研究了它们的一些特性，克服了原有强化缓冲算子对序列新信息利用不够充分的缺陷，有效地解决了冲击扰动数据序列在建模型预测过程中常常出现的定量预测结果与定性分析结论不符的问题，算例仿真表明：与已有强化算子相比，这类新的强化缓冲算子显著地提高了 GM(1,1)模型的预测精度。

[关键词] 算子；强化缓冲算子；几何平均强化算子；GM(1,1)

[中图分类号] N94　[文献标识码] A　[文章编号] 1009－1742(2010)02－0108－05

1　前言

灰色系统理论是一种研究少数据、贫信息不确定性问题的新方法。该理论以“部分信息已知，部分信息未知”的“小样本”、“贫信息”不确定性系统为研究对象，主要通过对“部分”已知信息的生成、开发，提取有价值的信息，实现对系统运行行为、演化规律的正确描述和有效监控[1]。作为灰色系统理论体系的重要分支，GM(1,1)模型，尤其是其预测精度一直是灰色系统理论研究的热点问题。众所周知，原始数据序列的光滑度对 GM(1,1)模型的预测精度产生很大的影响。通过数据变换以提高数据序列光滑性是改进模型预测精度的重要途径之一。缓冲算子就是针对提高数据序列光滑度这一问题而产生的，它通过灰色序列生成，修正数据由于受冲击扰动因素的干扰而产生的波动性，还数据以本来面目，使其呈现应有的规律性，进而能够进行合理地预测。通常，冲击扰动因素对数据序列的干扰可分为两类。第一类是加快数据的发展趋势或使数据序列的振荡幅度变大[2~4]；第二类是减缓数据的发展趋势或使数据序列的振荡幅度变小。如何排除外界诸多冲击因素的干扰从而还系统特征数据真实面目是非常值得研究的问题之一。文献[5~8]中，刘思峰提出了缓冲算子的概念，并构造出一种得到较广泛应用的实用缓冲算子。文献[9]中，谢乃明构造了一种新的实用弱化缓冲算子。文献[10,11]中，党耀国在文献[6~9]研究基础上构造了若干个强化缓冲算子。纵观目前强化缓冲算子的研究文献，可以发现，已有的强化算子对于提高模型的预测精度起到一定的作用，但仍然存在一定的缺陷，即其无法对原始数据序列的新信息 $x(n)$ 进行充分地挖掘与利用，从而导致 GM(1,1)的预测精度不够理想。笔者在上述研究工作的基础上，根据“新信息优先利用”原理提出了一种新的强化缓冲算子构造模式 $x(k)d = \frac{x(k)}{\sqrt{x(k)x(n)}}x(k)$，以此为基础构造了一类新的强化缓冲算子，并在算例仿真中将经过新构造的强化算子与已有文献中的强化算子一阶强化后的数据序列在 GM(1,1)模型的预测精度进行了比

[收稿日期] 2008－04－08；修回日期 2008－06－03

[基金项目] 国家自然科学基金(70901041, 90924022, 70473037)；国家教育部博士点基金资助项目(200802870020, 20093218120032)；南京航空航天大学科研创新基金(Y0811－091)；江苏省普通高校研究生科研创新计划资助项目(CX08B－039R)；淮阴工学院科研基金项目(HGB0917)

[作者简介] 党耀国(1964－)，男，河南驻马店市人，南京航空航天大学教授、博士生导师，研究方向为系统工程、灰色系统理论；E－mail：imdangyg@163.com

较。研究结果表明：与已有的强化算子相比，这类新的强化缓冲算子显著地提高了 GM(1,1)模型的预测精度。尤其是一阶强化缓冲算子 D_2 提高预测精度的效果最好。

2 基本概念

定义 1[1]：设 $X = (x(1), x(2), \cdots, x(n))$，为系统行为数据序列。

1)若任意 $k = 2,3,\cdots,n; x(k) - x(k-1) > 0$，则称 X 为单调增长序列。

2)若 1)中不等号反过来成立，则称 X 为单调衰减序列。

3)若存在 $k, k' \in \{2,3,\cdots,n\}$，有 $x(k) - x(k-1) > 0$，$x(k') - x(k'-1) < 0$ 则称 X 为振荡序列。设 $M = \max\{x(k) \mid k = 1,2,\cdots,n\}$，$m = \min\{x(k) \mid k = 1,2,\cdots,n\}$，称 $M - m$ 为序列 X 的振幅。

定义 2：设 X 为系统行为数据序列，D 为作用于 X 的算子，X 经过算子 D 作用后所得序列记为

$$XD = (x(1)d, x(2)d, \cdots, x(n)d)$$

称 D 为序列算子，称 XD 为一阶算子作用序列。

序列算子的作用可以多次进行，相应的，若 D_1，D_2，$D_3 \cdots D_n$ 皆为序列算子，则 D_1D_2 为二阶算子，并称 $XD_1D_2 = (x(1)d_1d_2, x(2)d_1d_2, \cdots, x(n)d_1d_2)$ 为二阶算子作用序列。同理可得三阶算子作用序列，四阶算子作用序列及 n 阶算子作用序列。

公理 1(不动点公理)[1]：设 X 为系统行为数据序列，D 为作用于 X 的算子，则 D 满足

$$x(n)d = x(n)$$

不动点公理限定在序列算子作用下，系统行为数据序列中的数据 $x(n)$ 保持不变，即运用序列算子对系统行为数据进行调整，不改变 $x(n)$ 这一即成事实。

公理 2(信息充分利用公理)：系统行为数据序列 X 中的每一个数据 $x(k)$，$k = 1,2,\cdots,n$ 都应充分的参与算子作用的全过程。

信息充分利用公理限定任何序列算子都应以现有的序列中的信息为基础进行定义，不允许抛开原始数据进行定义。

公理 3(解析化公理)：任意的 $x(k)d$，$(k = 1,2,\cdots,n)$ 皆可由一个统一的 $x(1), x(2), \cdots, x(n)$ 的初等解析式表达。

公理 3 要求由系统行为数据系列得到算子作用序列的程序清晰、规范、统一且尽可能简化，以便于计算出算子作用序列并使计算易于在计算机上实现。

定义 3：称上述三个公理为缓冲算子三公理，满足缓冲算子三公理的序列算子称为缓冲算子，一阶，二阶，三阶……缓冲算子作用序列称为一阶，二阶，三阶……缓冲序列。

定义 4：设 X 为原始数据序列，D 为缓冲算子，当 X 分别为增长序列、衰减序列或振荡序列时有：

1)若缓冲序列 XD 比原始序列 X 的增长速度(或衰减速度)减缓或振幅减小，笔者称缓冲算子 D 为弱化算子。

2)若缓冲序列 XD 比原始序列 X 的增长速度(或衰减速度)加快或振幅增大，则称缓冲算子 D 为强化算子。

3 缓冲算子的性质

定理 1[1]：

令 $X = (x(1), x(2), \cdots, x(n))$，$x(i) > 0$，$i = 1,2,\cdots,n$

1) 设 X 为单调增长序列，XD_1 为其缓冲序列，则有：a. D_1 为弱化算子 $\langle = \rangle$ $x(k) \leqslant x(k)d_1$，$k = 1,2,\cdots,n$；b. D_1 为强化算子 $\langle = \rangle$ $x(k) \geqslant x(k)d_1$，$k = 1,2,\cdots,n$；

即单调增长序列在弱化算子作用下数据膨胀，在强化算子作用下数据萎缩。

2)设 X 为单调衰减序列，XD 为其缓冲序列，则有：a. D_1 为弱化算子 $\langle = \rangle$ $x(k) \geqslant x(k)d_1$，$k = 1,2,\cdots,n$；b. D_1 为强化算子 $\langle = \rangle$ $x(k) \leqslant x(k)d_1$，$k = 1,2,\cdots,n$。即单调衰减序列在弱化算子作用下数据萎缩，在强化算子作用下数据膨胀。

3)设 X 为振荡序列，XD_1 为其缓冲序列，则有：

a. 若 D_1 为弱化算子，则

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant n}\{x(k)\} \geqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant n}\{x(k)d_1\}$$

$$\mathrm{mix}_{1 \leqslant k \leqslant n}\{x(k)\} \leqslant \mathrm{mix}_{1 \leqslant k \leqslant n}\{x(k)d_1\}$$

b. 若 D_1 为强化算子，则

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant n}\{x(k)\} \leqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant n}\{x(k)d_1\}$$

$$\mathrm{mix}_{1 \leqslant k \leqslant n}\{x(k)\} \geqslant \mathrm{mix}_{1 \leqslant k \leqslant n}\{x(k)d_1\}$$

证明(略)。

4 一类新的强化缓冲算子的构造

定理 2：设系统原始行为数据序列

$X = (x(1), x(2), \cdots, x(n))$，$x(i) > 0$，$i = 1,2,\cdots,n$；令 $XD_2 = (x(1)d_2, x(2)d_2, \cdots, x(n)d_2)$

其中，$x(k)d_2 = \frac{x(k)}{\sqrt{x(k)x(n)}}x(k)$

$k = 1,2,\cdots,n$

则当 X 为单调增长序列、单调衰减序列或振荡序列时，D_2 皆为强化缓冲算子。

证明：容易验证，D_2 满足缓冲算子三公理，故 D_2 为缓冲算子。

1）设 X 为单调增长序列，则

$$x(k)d_2 - x(k) = \frac{x(k)}{\sqrt{x(k)x(n)}}x(k) - x(k)$$

$$\leqslant \frac{x(k)}{\sqrt{x(k)x(k)}}x(k) - x(k) = 0$$

因此，$x(k)d_2 \leqslant x(k)$ 故 D_2 为强化缓冲算子。

2）设 X 为单调衰减序列，则

$$x(k)d_2 - x(k) = \frac{x(k)}{\sqrt{x(k)x(n)}}x(k) - x(k)$$

$$\geqslant \frac{x(k)}{\sqrt{x(k)x(k)}}x(k) - x(k) = 0$$

因此，$x(k)d_2 \geqslant x(k)$ 故 D_2 为强化缓冲算子。

3）X 为振荡序列时，设

$x(a) = \max\{x(k) \mid k = 1,2,\cdots,n\}$

$x(b) = \min\{x(k) \mid k = 1,2,\cdots,n\}$

$$x(a)d_2 = \frac{x(a)}{\sqrt{x(a)x(n)}}x(a)$$

$$x(a)d_2 - x(a) = \frac{x(a)}{\sqrt{x(a)x(n)}}x(a) - x(a)$$

$$\geqslant \frac{x(a)}{\sqrt{x(a)x(a)}}x(a) - x(a)$$

$\geqslant 0$

所以，$x(a)d_2 \geqslant x(a)$，即 $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{x(k)\} \leqslant \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{x(k)d\}$

同理可证：$\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{x(k)\} \geqslant \mathrm{mix}\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{x(k)d\}$ 故 D_2 为强化缓冲算子。

定理 3：设系统原始行为数据序列

$X = (x(1),x(2),\cdots,x(n)),x(i) > 0,i = 1,2,\cdots,n$；

令 $XD_3 = (x(1)d_3,x(2)d_3,\cdots,x(n)d_3)$

$x(k)d_3 =$

$$\frac{(n-k+1)x^2(k)}{\sqrt{x(k)x(n)} + \sqrt{x(k+1)x(n)} + \cdots + x(n)}$$

$$= \frac{(n-k+1)x^2(k)}{\sum\limits_{i=k}^{n}\sqrt{x(i)x(n)}}$$

则当 X 为单调增长序列、单调衰减序列或振荡序列时，D_3 皆为强化缓冲算子。

证明：容易验证 D_3 满足缓冲算子三公理，故 D_3 为缓冲算子

1）设 X 为单调增长序列，则

$x(k)d_3 =$

$$\frac{(n-k+1)x^2(k)}{\sqrt{x(k)x(n)} + \sqrt{x(k+1)x(n)} + \cdots + x(n)}$$

$$\leqslant \frac{(n-k+1)x^2(k)}{x(k) + x(k) + \cdots + x(k)} = x(k)$$

因此，$x(k)d_3 \leqslant x(k)$，故 D_3 为强化缓冲算子。

2）X 为单调衰减序列，则

$x(k)d_3 =$

$$\frac{(n-k+1)x^2(k)}{\sqrt{x(k)x(n)} + \sqrt{x(k+1)x(n)} + \cdots + x(n)}$$

$$\frac{(n-k+1)x^2(k)}{x(k) + x(k) + \cdots + x(k)} = x(k)$$

因此，$x(k)d_3 \geqslant x(k)$，故 D_3 为强化缓冲算子。

3）X 为振荡序列时，设

$x(a) = \max\{x(k) \mid k = 1,2,\cdots,n\}$

$x(b) = \min\{x(k) \mid k = 1,2,\cdots,n\}$

$x(a)d_3 =$

$$\frac{(n-a+1)x^2(a)}{\sqrt{x(a)x(n)} + \sqrt{x(a+1)x(n)} + \cdots + x(n)}$$

$$\geqslant \frac{(n-a+1)x^2(a)}{x(a) + x(a) + \cdots + x(a)} = x(a)$$

$(a = 1,2,\cdots,n)$

因此 $x(a)d_3 \geqslant x(a)$，即

$\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{x(k)\} \leqslant \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{x(k)d_3\}$

同理可证 $\mathrm{mi}\underset{1\leqslant k\leqslant n}{\mathrm{x}}\{x(k)\} \geqslant \mathrm{mi}\underset{1\leqslant k\leqslant n}{\mathrm{x}}\{x(k)d_3\}$

故 X 为振荡序列时，D_3 为强化缓冲算子。在此称 D_3 为算术平均强化缓冲算子。

定理 4：设系统原始行为数据序列

$X = (x(1),x(2),\cdots,x(n)),x(i) > 0,i = 1,2,\cdots,n$；

令 $XD_4 = (x(1)d_4,x(2)d_4,\cdots,x(n)d_4)$

$x(k)d_4 =$

$$\frac{x^2(k)}{[\sqrt{x(k)x(n)}\ \sqrt{x(k+1)x(n)}\cdot\ \cdots x(n)]^{\frac{1}{n-k+1}}}$$

$$= \frac{x^2(k)}{[\prod\limits_{i=k}^{n}\sqrt{x(i)x(n)}]^{\frac{1}{n-k+1}}}$$

则，当 X 为单调增长序列、单调衰减序列或振

荡序列时，D_4 皆为强化缓冲算子。

证明：容易验证 D_4 满足缓冲算子三公理，故 D_4 为缓冲算子

设 X 为单调增长序列，则

$$x(k)d_4 = \frac{x^2(k)}{\left[\sqrt{x(k)x(n)}\ \sqrt{x(k+1)x(n)}\cdot\ \cdots x(n)\right]^{\frac{1}{n-k+1}}}$$

$$\leqslant \frac{x^2(k)}{\left[(x(k))^{n-k+1}\right]^{\frac{1}{n-k+1}}} = x(k)$$

因此，$x(k)d_4 \leqslant x(k)$，故 D_4 为强化缓冲算子。

同理可证，当 X 为单调衰减序列或振荡序列时，D_4 皆为强化缓冲算子，称 D_4 为几何平均强化缓冲算子。

由以上分析可知，笔者新构造的所有强化缓冲算子对于单调增长序列、单调衰减序列或振荡序列，均能起到增强增长(衰减)速度或增大振幅的作用。由于缓冲算子在作用于原始数据序列，必须满足不动点公理。因此，对于单调增长序列，强化缓冲作用序列的增长速度比原始序列的增长速度加快；同理，对于单调衰减序列或振荡序列，强化缓冲作用序列的衰减速度(或振动幅度)比原始序列的衰减速度(或振动幅度)增强(或增大)。利用文章构造的强化缓冲算子基于新信息优先利用原理，对原始数据序列作用后，能有效消除冲击干扰项对系统的干扰而造成的数据“失真”现象，从而有效地提高模型的预测精度。

5 算例仿真

以某市移动电话用户数为例来验证文章构造的强化缓冲算子在 GM(1,1)数值预测中的应用。选取某市 1996—2003 年移动电话的用户数为原始数据[12]（单位：万人）$X = (65.20, 67.16, 70.61, 75.66, 83.22, 93.21, 103.93, 116.92)$ 以 1996—2001 年的数据作为建模数据；以 2002—2003 年的数据作为模拟检验数据。从原始数据计算可得 1996—2001 年该市移动电话用户数年平均增长率依次为 3.11 %，5.15 %，7.16 %，10.01 %，12.01 %。由此可以看出，原始数据序列前半部分比后半部分增长速度过缓，用此数据进行预测，结果令人难以相信。分析这种情况，主要是由于从 2000 年起我国通信企业进行了体制改革，为了扩大手机用户量，通信公司逐步降低了通话资费，并推出了一系列套餐服务，刺激了移动电话的需求量。为了对该市移动电话用户数发展趋势作出合理的预测，必须对原始数据序列进行强化。用强化缓冲算子对原始数据序列进行强化处理，以将后期的移动电话资费优惠政策这个因素延伸到原始数据序列的前半部分，使得 GM(1,1)模型的预测精度更高，预测结果与实际情况更吻合。

以笔者构造的一类新的强化缓冲算子对原始数据进行一阶强化处理，得到的强化数据序列为

$XD_2 = (54.53, 57.01, 61.45, 68.16, 78.64, 93.21)$

$XD_3 = (50.66, 53.00, 57.58, 64.74, 76.41, 93.21)$

$XD_4 = (50.76, 53.09, 57.65, 64.80, 76.44, 93.21)$

依次以上述一阶强化序列建立 GM(1,1)的白化方程如下：

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} - 0.1285x^{(1)} = 43.950\,035$$

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} - 0.148\,9x^{(1)} = 38.702\,915$$

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} - 0.148\,5x^{(1)} = 38.803\,376$$

通过计算(计算过程略)得到预测误差的比较结果如表 1 所示。

表 1 强化前后 GM(1,1)模型预测精度的比较

Table 1 The comparison of forecasting accuracy of original GM (1,1) and Strengthened GM (1,1)

模型	强化算子作用	两步平均预测误差/%
1	无	5.69
2	XD_2	0.53
3	XD_3	2.67
4	XD_4	2.60

同样利用文献[7,8,11]中构造的强化算子对算例中的原始数据序列进行一阶强化后结合 GM(1,1)模型进行预测精度求解(计算过程略)，得到预测误差的比较结果如表 2 所示。

表 2 文献[7,8,11]中算子强化后模型预测精度的比较

Table 2 The comparison of forecasting accuracy of GM (1,1) Strengthened by operators in literature[7,8,11]

模型	强化算子作用	两步平均预测误差/%
4	文献[7]中算子	4.53
5	文献[8]中算子	3.95
6	文献[11]中算子	3.77

由表 1 和表 2 可以看出，原始数据序列经过新构造的一阶强化缓冲算子 D_2 作用后，两步平均预测误差最低，即预测精度最高。利用一阶强化缓冲算子 D_2 对原始数据作用后的预测模型为：

$$\hat{x}^{(1)}(1996+t) = 396.459\,607e^{0.128\,535t} - 341.929\,6$$

2002—2003 年该市的移动电话用户数预测值分别为 103.405 万人、117.58 万人。这与 2002—2003 年该市实际移动电话用户数基本吻合。

6 结语

笔者在已有文献的研究基础上,构造出一类新的强化缓冲算子,并利用构造的强化算子对具有前半部分增长速度较慢,后半部分增长速度较快特征的原始序列数据与一阶强化后的数据序列分别进行预测精度比较。结果表明:a. 强化后的数据序列在预测精度上比用原始数据序列预测精度均有显著提高;b. 比较 3 个新的强化算子强化后数据序列的预测误差(见表 1)可以发现,原始数据序列经过 D_2 一阶强化后,两步平均预测误差远低于算子 D_3 和 D_4 强化后的预测误差;c. 数据序列经过新的强化缓冲算子作用后在 GM(1,1)中预测精度比经过现有强化算子作用后在 GM(1,1)中预测精度有明显的提高,尤其经过 D_2 强化后,预测精度最高。

参考文献

[1] 刘思峰,党耀国,方志耕.灰色系统理论及其应用第 3 版[M].北京:科学出版社,2004

[2] Deng Julong. The Grey Exponential Law of AGO , Grey System [M]. Beijing: China Ocean Press, 1988

[3] 邓聚龙.灰理论基础[M].武汉:华中科技大学出版社,2002

[4] 邓聚龙.灰色系统基本方法[M].武汉:华中科技大学出版社,2004

[5] Liu Sifeng ,Li Yi. Grey Information :Theory and Practical Applications [M]. London: Springer - Verlag. 2006

[6] Liu Sifeng. The three axioms of buffer operator and their application [J]. The Journal of Grey System, 1991, 3 (1): 39 - 48

[7] 刘思峰.冲击扰动系统预测陷阱与缓冲算子[J].华中理工大学学报,1997,25(1):25 - 27

[8] 刘思峰.缓冲算子及其应用[J].灰色系统理论与实践,1992,2(1):45 - 50

[9] 谢乃明,刘思峰.一种新的弱化缓冲算子[J].中国管理科学,2003,11(增刊):46 - 48

[10] 党耀国,刘思峰,刘 斌,等.关于弱化缓冲算子的研究[J].中国管理科学,2004,12(2):108 - 111

[11] 党耀国,刘 斌,关叶青.关于强化缓冲算子的研究[J].控制与决策, 2005,20(12):1332 - 1336

[12] 中国统计局.中国统计年鉴(1996 - 2004)[Z].北京:中国统计出版社,2005

Study on a kind of new strengthening buffer operators and numerical simulations

Cui Jie[1,2] , Dang Yaoguo[2] ,Liu Sifeng[2] ,Xie Naiming[2]

(1. College of Economics and Management, Huaiyin Institute of Technology, Huaian 223001, China;2. College of Economics and Management,Nanjing University of Aeronautics and Astronautics,Nanjing 210016,China)

[**Abstract**] According to the theory of prior using of new information,based on the research of already existed strengthening buffer operators, some new strengthening buffer operators are established. Meanwhile,their characters are studied. The flaw that the existing strengthening buffer operators can't fully use new information of the data sequence is overcame. The problem that there are some contradictions between quantitative analysis and qualitative analysis in pretreatment for vibration data sequences is resolved effectively. An example simulation shows, compared with the existing strengthening buffer operators, the kind of new strengthening buffer operators increases the forecast precision of GM(1,1) remarkably.

[**Key words**] operator;strengthening buffer operator;geometry average strengthening operator;GM(1,1)