

# 材料的一种新型应力应变模型

张于贤, 王红

(桂林电子科技大学管理学院, 广西 桂林 541004)

**[摘要]** 为研究自增强超高压容器的残余应力, 提出了一个新型的应力应变模型, 该模型比别的模型更接近于自增强超高压容器用钢的实际工作情况; 以某材料为例介绍了确定该新型模型的方法, 并对其误差进行了分析, 论述了由一般的拉伸曲线求解该新型的应力应变关系模型的可行性及可靠性。

**[关键词]** 低合金高强度钢; 自增强; 应力应变模型; 硬化参数

**[中图分类号]** TG113 **[文献标识码]** A **[文章编号]** 1009-1742(2007)00-0000-00

为了解决超高压容器中应力沿壁厚的不良分布, 人们创造了许多组合形式的超高压容器及强化技术, 自增强处理就是其中广受重视的强化技术之一。自增强技术发明于 20 世纪初, 对其残余应力的分布进行了较为详细的研究, 得出了大量解析解和数值解<sup>[1,2,3]</sup>。虽然所得解都能给出较为满意的结果, 但存在着一个共同的不足之处, 就是在具体计算过程中对材料都作了假定——即弹性到塑性是一个突然的转折过程。笔者认为只有低碳钢一类材料才满足该假定, 但这类材料不适合制造超高压容器, 超高压容器用钢一般为低合金高强度钢, 这类钢在载荷作用下由弹性到塑性是一个渐进的过程<sup>[4]</sup>。若对这类材料仍采用上述假定, 所计算出的各应力在弹塑性界面上将出现较大的误差。而弹塑性界面压力又正是许多研究者所关心的问题, 因而应该寻求更加适用于超高压容器用材的应力应变关系模型。

## 1 一种新型的应力应变关系模型

低合金高强度钢的拉伸应力应变关系曲线如图 1 所示。他可分为两个阶段, 开始阶段是线性的, 超过比例极限(图中 P 点)后应力应变关系表现出非线性。为此, 引入下面的分段函数来表示这两个阶段的应力应变关系:

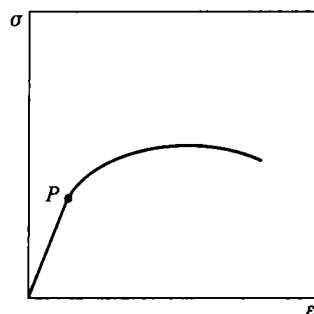


图 1 低合金高强度钢的拉伸应力应变关系曲线

Fig. 1 Stress-strain curve for high strength with low alloy composition

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon (\varepsilon \leq \varepsilon_p) \\ \sigma_p + \alpha \left[ 1 - e^{-\frac{(\varepsilon - \varepsilon_p)E}{\alpha}} \right] (\varepsilon \geq \varepsilon_p) \end{cases} \quad (1)$$

式中,  $E$ —材料的弹性模量,  $\sigma_p$ —比例极限  
 $\alpha$ —硬化参数。

容易证明, 该分段函数在  $\varepsilon = \varepsilon_p$  点处的左右导数是相等的, 即:

$$\sigma'_-(\varepsilon_p) = \sigma'_+(\varepsilon_p) = E$$

因此, 式(1)所表示的函数关系式在  $\varepsilon = \varepsilon_p$  处的左右导数相等, 表明该点处是可导的, 所以, 函数关系式(1)所对应的曲线在  $\varepsilon = \varepsilon_p$  处是光滑的, 也

**[收稿日期]** 2006-01-16; **[修回日期]** 2007-03-19

**[基金项目]** 广西科学研究与技术开发计划资助项目(桂科基 0731008)

**[作者简介]** 张于贤(1968-), 男, 博士, 桂林电子科技大学副教授, 硕士生导师

就是说,曲线从线性段(弹性变形段)到非线性段(弹塑性变形段)能实现光滑过渡,不会产生突然转折。因此,引入了应力应变关系的数学模型式(1)以后,可以看到使超高压容器用钢从弹性变形过渡到塑性变形成为渐进的过程,这更接近于实际情况。

## 2 材料硬化参数的确定

### 2.1 基本原理

对于某种材料而言,在已知材料的拉伸曲线时,为了确定其数学模型,关键之处在于确定材料的硬化参数 $\alpha$ 。材料的硬化参数 $\alpha$ 只与弹塑性变形阶段材料的应力应变曲线的形状有关。如果已知材料的 $\sigma - \varepsilon$ 曲线,则可从曲线中的弹塑性阶段取一系列数据点(实验点),然后通过插值或拟合的数值计算方法即可求得材料的硬化参数 $\alpha$ 。

### 2.2 实例

已知某材料的拉伸应力应变曲线如图2所示。由图可知,该曲线没有明显的塑性屈服阶段,OA段为弹性变形,A点以后为弹塑性变形,且 $\varepsilon_p = 0.032$ , $\sigma_p = 955$  MPa。所以,材料的弹性模量为:

$$E = \frac{\sigma_p}{\varepsilon_p} = \frac{955}{0.032} \approx 29\ 844 \text{ (MPa)}$$

2.2.1 硬化参数的确定 为求其如式(1)所示的应力应变关系曲线表达式,在曲线上取A→H 8个点,其数值如表1所示。如图2所示在H点以后曲线开始下降,即材料出现颈缩变形,不能正常工作。实际工作中,材料一般不会工作在下降段上。所以,本例中只取曲线的上升段。

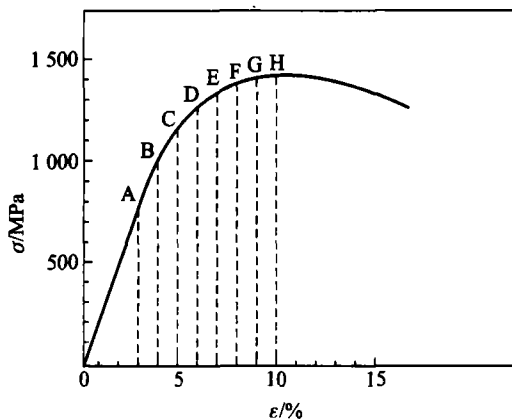


图2 某材料的拉伸应力应变曲线

Fig.2 Stress - strain curve for some material

表1 某材料的拉伸应力应变对应值

Table 1 Test data values of stress - strain curve for some material

点	$\varepsilon/\%$	$\sigma/\text{MPa}$
A	3.2	955
B	4.0	1 120
C	5.0	1 250
D	6.0	1 360
E	7.0	1 430
F	8.0	1 480
G	9.0	1 490
H	10.0	1 500

在式(1)中,第一个方程为:

$$\sigma = E\varepsilon = 29\ 844 \varepsilon \quad (2)$$

将第二个方程作如下变形:

$$\sigma - \sigma_p = \alpha \left[ 1 - e^{-\frac{(\varepsilon - \varepsilon_p)E}{\alpha}} \right] \quad (3)$$

由于:  $e^{-\frac{(\varepsilon - \varepsilon_p)E}{\alpha}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[ -\frac{(\varepsilon - \varepsilon_p)E}{\alpha} \right]^k$

对上式取前三项近似值得:

$$e^{-\frac{(\varepsilon - \varepsilon_p)E}{\alpha}} \approx 1 - \frac{(\varepsilon - \varepsilon_p)E}{\alpha} + \frac{[(\varepsilon - \varepsilon_p)E]^2}{2\alpha^2} \quad (4)$$

将上式代入式(3)得:

$$\begin{aligned} \sigma - \sigma_p &= \alpha \left[ 1 - e^{-\frac{(\varepsilon - \varepsilon_p)E}{\alpha}} \right] \\ &\approx (\varepsilon - \varepsilon_p)E - \frac{[(\varepsilon - \varepsilon_p)E]^2}{2\alpha} \end{aligned} \quad (5)$$

在上式中,令:

$$y = \sigma - \sigma_p \quad (6)$$

$$x = (\varepsilon - \varepsilon_p)E \quad (7)$$

将上两式代入式(5)得:

$$y = x - \frac{x^2}{2\alpha} \quad (8)$$

式(8)中, $y$ 及 $x$ 是经变量代换后的新变量。由表1可得新变量的取值如表2所示:

现根据最小二乘原理求材料的硬化参数 $\alpha$ <sup>[5]</sup>

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha) &= \sum_{i=1}^8 [y_i - f(x_i)]^2 \\ &= \sum_{i=1}^8 \left( y_i - x_i + \frac{x_i^2}{2\alpha} \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^8 \left[ (y_i - x_i)^2 + \frac{(y_i - x_i)x_i^2}{\alpha} + \frac{x_i^4}{4\alpha^2} \right] \\ &= \sum_{i=1}^8 (y_i - x_i)^2 + \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^8 (y_i - x_i)x_i^2 + \frac{1}{4\alpha^2} \sum_{i=1}^8 x_i^4 \end{aligned} \quad (9)$$

表2 应力应变曲线试验点数值与模型拟合值

Table 2 Test data values of stress-strain curve and fitting values for the model

点	$\varepsilon/\%$	$\sigma/\text{MPa}$	$y$	$x$	$(y_i - x_i)x_i^2$	$x_i^4$
A	3.2	955	0	0	0	0
B	4.0	1 120	165	238.752	$-4.024 \times 10^6$	$3.249 \times 10^9$
C	5.0	1 250	295	537.192	$-6.989 \times 10^6$	$8.328 \times 10^{10}$
D	6.0	1 360	405	835.632	$-3.007 \times 10^8$	$4.876 \times 10^{11}$
E	7.0	1 430	475	1 134.072	$-8.477 \times 10^8$	$1.654 \times 10^{12}$
F	8.0	1 480	525	1 432.512	$-1.862 \times 10^9$	$4.211 \times 10^{12}$
G	9.0	1 490	535	1 730.952	$-3.583 \times 10^9$	$8.977 \times 10^{12}$
H	10.0	1 500	545	2 029.392	$-6.113 \times 10^9$	$1.696 \times 10^{13}$

备注  $\sum_{i=1}^8 (y_i - x_i)x_i^2 = -1.272 \times 10^{10}$   $\sum_{i=1}^8 x_i^4 = 3.238 \times 10^{13}$

$$\frac{d\varphi}{d\alpha} = -\frac{1}{\alpha^2} \sum_{i=1}^8 (y_i - x_i)x_i^2 - \frac{1}{2\alpha^3} \sum_{i=1}^8 x_i^4$$

$$= -\frac{2\alpha \sum_{i=1}^8 (y_i - x_i)x_i^2 + \sum_{i=1}^8 x_i^4}{2\alpha^3}$$

$$\text{令: } \frac{d\varphi}{d\alpha} = 0 \text{ 得: } \alpha = -\frac{\sum_{i=1}^8 x_i^4}{2 \sum_{i=1}^8 (y_i - x_i)x_i^2} \quad (10)$$

将表2中的相应数值代入上式得:

$$\alpha = -\frac{3.238 \times 10^{13}}{2 \times (-1.272 \times 10^{10})} \approx 1 273 (\text{MPa})$$

2.2.2 应力应变关系的确定 将  $E = 29 844 \text{ MPa}$ ,  $\varepsilon_p = 0.032$ ,  $\sigma_p = 955 \text{ MPa}$ ,  $\alpha = 1 854.4 \text{ MPa}$ 代入式(1)可得这种材料的应力-应变关系为:

$$\sigma = \begin{cases} 29 844\varepsilon (\varepsilon \leq \varepsilon_p) \\ 955 + 1 273(1 - e^{-\frac{29 844(\varepsilon - 0.032)}{1273}}) (\varepsilon \geq \varepsilon_p) \end{cases} \quad (11)$$

$$\text{或: } \sigma = \begin{cases} 29 844\varepsilon (\varepsilon \leq \varepsilon_p) \\ 2 228 - 1 273e^{0.750 - 23.444\varepsilon} (\varepsilon \geq \varepsilon_p) \end{cases} \quad (12)$$

2.2.3 误差分析 现对上述实例的结果进行误差分析,把表1中的数值作为真实值,按公式(12)算出的值是近似值(拟合值)。分析对象是弹

塑性变形阶段,即图2中标有字母A→H的这一段。现将A,B,⋯,H共8个点的真实值、拟合值、绝对误差、相对误差列表计算如表3所示。

表3 A,B,⋯,H各点的真实值、拟合值、绝对误差、相对误差

Table 3 Test values, fitting values, absolute error and relative error for every points

点	$\varepsilon/\%$	$\sigma/\text{MPa}$ 真实值	$\sigma/\text{MPa}$ 拟合值	绝对误差 /MPa	相对误差 /%
A	3.2	955	955	0	0
B	4.0	1 120	1 173	53	4.73
C	5.0	1 250	1 321	71	5.68
D	6.0	1 360	1 441	81	5.96
E	7.0	1 430	1 515	85	5.94
F	8.0	1 480	1 572	92	6.23
G	9.0	1 490	1 588	98	6.58
H	10.0	1 500	1 603	103	6.87

由于拟合值与实际值相比较的相对误差均小于7%,表明该方法能够满足工程的需要。

### 3 讨论

为了提高此法的精确度,可以采取两方面的措施:1)增加实验点的个数,以提高拟合函数的精度;2)增加所取麦克劳林展式前面的项数以提高拟合函数的精度。需要指出的是,在表3中各点的拟合值均大于实际值,这说明在实际中采用拟合值(即由拟合函数式(12)计算的值)是偏于危险的,在实际使用时必须得考虑到这一点。

### 参考文献

- [1] 张于贤,王红,陈德淑.关于计算最佳弹塑性界面半径的探讨[J].重庆大学学报,2004,27(6):30~40
- [2] 许德明,吉桂英.焊接压力容器残余应力分析[J].湘潭矿业学院学报,1997,12(2):54~60
- [3] 刑慧明,陈国理,黄兴仁.自增强压力容器应用十二边形屈服准则残余应力的计算与实验研究[J].压力容器,1997,(4):18~24
- [4] 杜秀菊,刘继承,沈桂英.自增强管残余应力在交变内压作用下松弛规律的实验研究[J].油气田地面工程,2001,20(1):47~48
- [5] 王浩,范广涵,廖常俊,等.应用最小二乘法完善质量流量计的工作曲线[J].仪器仪表学报,2004,12,25(6):770~772

## A New Model of Stress and Strain for Materials

Zhang Yuxian, Wang Hong

(*Guilin University of Electronic Technology, Guilin, Guangxi 541004, China*)

[**Abstract**] In order to study the residual stresses of auto fettage super high pressure vessel effectively, a new model of stress and strain was developed in this paper. The model is more closer to actual working condition for the steel applied in auto fettage super high pressure vessel through the strict mathematic testification. The example to be given in this paper states how this model was established and how the error was analyzed. The same example also shows that solving the new model of stress and strain based on general tensile curves is feasible and reliable indeed. The model has theoretical signification and engineering practical value to a certain extend.

[**Key words**] low alloy high strength composite; model of stress and strain; hardening exponent

---

(上接第 68 页)

## The Negative Electrostatic Spring Effect Analysis and Experimental Validation of Silicon Micromechanical Vibrating z-axis Gyroscope

Xia Dunzhu, Zhou Bailing, Wang Shourong

(*Institute of Instrument Science and Engineering, Southeast University, Nanjing 210096, China*)

[**Abstract**] The error principle caused by structural process imperfection of silicon micromechanical z-axis gyroscope in open mode is introduced firstly. A new closed-loop control detection strategy is presented, which would has advantage of minimizing the initial capacitance difference and restraining the cross-talk coupling errors. The negative electrostatic spring effect of feedback force generator is analyzed in focus, and its linear mathematics module is calculated out. By computing the relation between the resonant frequency and feedback force added on the sense mode of MEMS z-axis gyroscope, the inner relation between the negative electrostatic spring coefficient in sense axis and the voltage on the feedback force generator is deduced indirectly. The theory has been testified by experiment, which will lay foundation for the next design of closed-loop scheme.

[**Key words**] silicon micromechanical z-axis gyroscope; negative electrostatic spring constant; feedback force generator; MEMS(microelectronic mechanical system)