

分形方法导出改进的牛顿第二定律 及万有引力定律

付昱华

(中国海洋石油研究中心, 北京 100027)

[摘要] 牛顿第二定律及万有引力定律是根据实验结果总结出来的。为了探讨从理论上导出这两个定律的可能性, 根据能量守恒定律, 给出用变维分形方法针对一个实例(小球沿长斜面滚下)导出改进的牛顿第二定律及万有引力定律的方法。具体给出了适用于实例的常维分形结果: 改进的万有引力定律 $F = -GMm / r^{1.99989}$ 和改进的牛顿第二定律 $F = ma^{1.01458}$ 。

[关键词] 分形方法; 牛顿第二定律; 万有引力定律; 理论推导

[中图分类号] O18; O313; O314 **[文献标识码]** A **[文章编号]** 1009-1742(2003)06-0055-04

1 前言

牛顿第二定律及万有引力定律是根据实验结果总结出来的。牛顿提出的第二定律的形式为

$$F = ma。 \quad (1)$$

牛顿提出的万有引力定律的矢量形式为

$$F = -\frac{GMm}{r^2}。 \quad (2)$$

这两个定律能否从理论上导出? 这要看是否有一个应用范围更广泛的定律。笔者认为, 目前能够担当这一重任的只有能量守恒定律(原理)。因为牛顿第二定律及万有引力定律只能处理宏观物理现象, 而能量守恒定律不但能够处理宏观物理现象, 而且也能处理微观物理现象。

为了探讨从理论上导出这两个定律的可能性, 根据能量守恒定律, 给出用变维分形方法, 对一个实例(小球沿长斜面滚下), 导出改进的牛顿第二定律及万有引力定律。由于求解过程复杂, 为简便计, 具体给出适用于实例的常维分形结果。

2 导出改进的牛顿第二定律及万有引力定律的变分原理

能量守恒定律是自然界的一条基本定律, 内容

为: 在封闭系统中, 系统的总能量保持不变。下面用最小二乘法给出能量守恒定律建立的变分原理。

设封闭系统的初始总能量 $W(0)$, 任意时刻 t 的总能量 $W(t)$, 则根据能量守恒定律应有

$$W(0) = W(t)。 \quad (3)$$

上式可以写为

$$R_w = \frac{W(t)}{W(0)} - 1 = 0。 \quad (4)$$

应用最小二乘法, 对于区间 $[t_1, t_2]$, 根据能量守恒定律可得变分原理为

$$\Pi = \int_{t_1}^{t_2} R_w^2 dt = \min_0。 \quad (5)$$

式中 \min_0 表示泛函 Π 的最小值且应等于零^[1]。

除时间坐标外, 还可采用其他坐标, 如对于区间 $[x_1, x_2]$, 根据能量守恒定律得变分原理为

$$\Pi = \int_{x_1}^{x_2} R_w^2 dx = \min_0。 \quad (6)$$

以上是直接应用能量守恒定律建立的变分原理。有时为了导出其他定律等目的, 还需要间接应用能量守恒定律建立变分原理。例如, 对感兴趣的某一物理量 Q , 既可以应用能量守恒定律来计算, 又可以应用其他定律(如牛顿第二定律及万有引力定律)来计算。为了便于区别, 将其他定律计算的

结果仍然记为 Q ，将能量守恒定律计算的结果记为 Q' ，令 R_w 重新定义为

$$R_w = \frac{Q}{Q'} - 1 = 0. \quad (7)$$

将式 (7) 代入式 (5) 和式 (6)，由于 Q' 根据能量守恒定律计算的结果，所以得到间接应用能量守恒定律建立的变分原理。另外， Q 与 Q' 的符合程度也一目了然。

3 变维分形等形式的改进的牛顿第二定律及万有引力定律

在牛顿力学范围内，已经对万有引力定律做出了一些改进。例如，笔者在参考文献 [2] 中给出如下的改进公式：

$$F = -\frac{GMm}{r^2} - \frac{3G^2M^2mp}{c^2r^4}. \quad (8)$$

式中 G 为引力常数， M 和 m 为两物体的质量， r 为两物体间距离， c 为光速， p 为质量 m 的物体在质量 M 的物体引力场中沿圆锥曲线运动时的正半焦弦，而且，对于椭圆 $p = a(1 - e^2)$ ；对于双曲线 $p = a(e^2 - 1)$ ；对于抛物线 $p = y^2/2x$ 。

当两物体做中心对中心运动（含相对静止）时，可视为正半焦弦 $p = 0$ 的情况，此时改进的万有引力公式与原有的万有引力公式相同。该公式对水星近日点进动问题和光线近日偏折问题均能给出与广义相对论一样的正确解。

但是，式 (2) 和式 (8) 只能处理两物体做中心对中心运动（含相对静止）和质量 m 物体在质量 M 物体的引力场中沿圆锥曲线运动时的情况，对于受约束等情况而作非中心对中心直线运动（不含相对静止）和沿其他曲线运动的情况，就要讨论更一般形式的万有引力定律。

参照式 (8)，可以将更一般形式的万有引力定律写为

$$F = -\frac{GMm}{r^2} \left(1 + \frac{a_1}{r^2} + \frac{a_2}{r^4} + \dots \right). \quad (9)$$

在最近十几年间，分形方法已在一些领域获得成功应用，它被用来揭示复杂现象中深藏的有组织结构。反映有组织结构特征的量称为分维数，用 D 值来表示。目前，在一般应用的分形方法中，分维数 D 为实数，例如不同地段海岸线的分维数 D 值可以取为 1.02, 1.25 等。

分形分布可用幂指数分布定义为^[3]

$$N = \frac{C}{r^D}$$

式中： r 为特征线度，如长度、时间等； N 为与 r 有关的数量，如力、温度和高度等； C 为待定常数； D 为分维数。

当 D 为常数时，这种分形可称为常维分形。

也可以将更一般形式的万有引力定律写为变维分形^[4~6]的形式：

$$F = -\frac{GMm}{r^D}. \quad (10)$$

式中 $D = f(r)$ ，例如，可以令

$$D = a_1 + a_2r + a_3r^2 + \dots. \quad (11)$$

这里只取常维分形的形式，即 $D = \text{const}$ 。

在牛顿力学范围内，也将对牛顿第二定律进行改进。参照式 (1)，可以将更一般形式的牛顿第二定律写为

$$F = ma + k_1a^2 + k_2a^3 + \dots. \quad (12)$$

将更一般形式的牛顿第二定律写为变维分形的形式：

$$F = ma^{D'}, \quad (13)$$

式中 $D' = f(r)$ ，可以令

$$D' = k_1 + k_2a + k_3a^2 + \dots, \quad (14)$$

也只取常维分形的形式，即 $D' = \text{const}$ ，写为

$$F = ma^{1+\epsilon}, \quad (15)$$

式中 $\epsilon = \text{const}$ 。如果 $\epsilon = 0$ ，则成为原有的牛顿第二定律。

4 导出改进的牛顿第二定律及万有引力定律的方法

将式 (9) 或式 (10)、式 (12) 或式 (13) 计算的有关物理量代入式 (5) 或式 (6)，根据极值条件可以建立如下方程组：

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = \frac{\partial \Pi}{\partial k_i} = 0. \quad (16)$$

解出此方程组以后，就可以同时得到改进的牛顿第二定律及万有引力定律。判别解的近似程度可以根据 Π 值接近于零的程度而定。 Π 值越接近于零，效果越好。

在求解过程中没有依赖任何实验结果，这样得到的改进的牛顿第二定律及万有引力定律，是否适用于其他场合，是一个需要进一步研究的课题。

除了求解方程组可以确定最小值及各待定常数外，用最优化算法也可以确定最小值及各待定常数。笔者用最优化算法确定最小值及各待定常数。

5 导出改进的牛顿第二定律及万有引力定律的实例

下面用一个实例，导出常维分形形式（即式 (10) 中的 D 和式 (15) 中的 ϵ 均为待定常数）的改进的牛顿第二定律及万有引力定律。

如图 1 所示，设有一条从 A 到 B 的直线（实际上是一个斜面），考虑小球沿直线从 A 滚动到 B 的情况。设当小球位于 A 点时，其初速度为零，摩擦作用忽略不计。

设圆 O' 代表地球。地球质量为 M ，小球质量为 m 。设 $O'A$ 为一条铅垂线， x 坐标与 $O'A$ 垂直， y 坐标与 x 坐标垂直（与 $O'A$ 平行）。 BC 与 $O'A$ 垂直。 OA ， OB ， BC ， AC 的长度均为 H ， $O'C$ 的长度等于地球半径 R 。

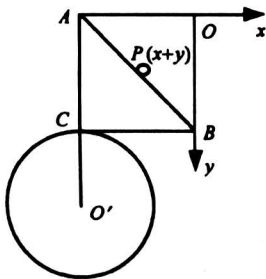


图 1 小球从 A 滚动到 B

Fig.1 A small ball rolls from A to B

对于实例，感兴趣的物理量是小球在点 P 时速度的二次方 v_P^2 ，为了便于区别，将改进的牛顿第二定律及万有引力定律计算的结果仍然记为 v_P^2 ，将能量守恒定律计算的结果记为 $v_P'^2$ ，将变分原理式 (6) 重新写为

$$\Pi = \int_{-H}^0 \left(\frac{v_P^2}{v_P'^2} - 1 \right) dx = \min_0. \quad (17)$$

首先根据能量守恒定律计算有关的物理量。由改进的万有引力定律式 (10) 可以得到小球

$$v dv = \left(\frac{GM y'}{((H+x)^2 + (R+H-y)^2)^{D/2} (1+y'^2)^{1/2}} \right)^{1/(1+\epsilon)} (1+y'^2)^{1/2} dx. \quad (26)$$

$$v_P^2 = 2 \int_{-H}^{x_P} \left(\frac{GM y'}{((H+x)^2 + (R+H-y)^2)^{D/2} (1+y'^2)^{1/2}} \right)^{1/(1+\epsilon)} (1+y'^2)^{1/2} dx. \quad (27)$$

现在考虑最简单的情况，即 A 和 B 之间以直线相连接的情况，于是有

$$y = H + x. \quad (28)$$

将上式代入式 (27)，并做置换 $x = -z$ ，可得

$$v_P^2 = 2 \int_{-x_P}^H \left(\frac{GM}{((H-z)^2 + (R+z)^2)^{D/2}} \right)^{1/(1+\epsilon)} 2^{\epsilon/2(1+\epsilon)} dz. \quad (29)$$

位于任意点 P 时的势能为

$$V = - \frac{GMm}{(D-1)r_{OP}^{D-1}} \quad (18)$$

根据能量守恒定律应有

$$- \frac{GMm}{(D-1)r_{OA}^{D-1}} = \frac{1}{2} m v_P'^2 - \frac{GMm}{(D-1)r_{OP}^{D-1}}, \quad (19)$$

于是有

$$v_P'^2 = \frac{2GM}{D-1} \left(\frac{1}{r_{OP}^{D-1}} - \frac{1}{(R+H)^{D-1}} \right). \quad (20)$$

根据改进的牛顿第二定律及万有引力定律计算有关的物理量。

考虑一般的情况，设小球滚动的曲线为

$$y = y(x). \quad (21)$$

当小球运动到任意点 P 时，由于

$$dv/dt = a, \quad (22)$$

而

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{(1+y'^2)^{1/2}}{v} dx,$$

于是有

$$dv = a dt = a \frac{(1+y'^2)^{1/2}}{v} dx,$$

即有

$$v dv = a(1+y'^2)^{1/2} dx. \quad (23)$$

根据改进的万有引力定律得 P 处所受引力为

$$F_P = \frac{GMm}{r_{OP}^D},$$

于是得沿切线方向所受力为

$$F_a = \frac{GMm}{r_{OP}^D} \frac{y'}{(1+y'^2)^{1/2}}. \quad (24)$$

根据改进的牛顿第二定律可得 P 处沿切线方向的加速度 a 为

$$a = \left(\frac{F_a}{m} \right)^{1/(1+\epsilon)} = \left(\frac{GM y'}{r_{OP}^D (1+y'^2)^{1/2}} \right)^{1/(1+\epsilon)}, \quad (25)$$

于是由式 (23) 可得

上式可以根据数值积分的方法进行计算。

下面进行具体的推导和计算。

地球的 $GM = 3.99 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$, 地球半径 $R = 6.37 \times 10^6 \text{ m}$, $H = R/10$, 试对图 1 问题求解 v_p^2 , 并导出改进的牛顿第二定律及万有引力定律。

首先将能量守恒定律和原有的牛顿第二定律及万有引力定律 (即在式 (10) 中 $D = 2$, 在式 (15) 中 $\epsilon = 0$) 计算的各量代入式 (17), 得到

$$\Pi_0 = 571.4215。$$

此时根据能量守恒定律计算的 $v_p^2 = 1.0767 \times 10^7$, 根据原有的牛顿第二定律及万有引力定律计算的 $v_p^2 = 1.1351 \times 10^7$ 。两者相差 5.4%。

Π_0 不等于零, 可用最优化方法确定 D 和 ϵ 。

目前应用的最优化方法可以分为两类: 一类可以不依赖初值, 但程序复杂; 另一类要求初值足够好, 但程序简单。文中采用后一类中的搜索法^[1]。

先固定 $D = 2$, 搜索 ϵ 值, 当 $\epsilon = 0.0146$ 时 Π 达到最小值 139.3429; 然后固定 ϵ , 搜索 D 值, 当 $D = 1.99989$ 时 Π 达到最小值 137.3238; 然后固定 D 值, 搜索 ϵ 值, 当 $\epsilon = 0.01458$ 时 Π 达到最小值 137.3231; 由于两次搜索后的 Π 值极为接近, 于是可以停止搜索, 得到最后结果:

$$D = 1.99989, \epsilon = 0.01458, \Pi = 137.3231。$$

此时 Π 值仅为 Π_0 值的 24%。而根据能量守恒定律计算的 $v_p^2 = 1.0785 \times 10^7$, 根据改进的牛顿第二定律及万有引力定律计算的 $v_p^2 = 1.1073 \times 10^7$ 。两者相差仅 2.7%。

由此得到适用实例的改进的牛顿第二定律及万

有引力定律如下:

$$\text{改进的万有引力定律 } F = -GMm/r^{1.99989}。$$

$$\text{改进的牛顿第二定律 } F = ma^{1.01458}。$$

6 结论

牛顿第二定律及万有引力定律是根据实验结果总结出来的。实例表明, 原有的牛顿第二定律及万有引力定律需要改进。为了从理论上导出这两个定律, 可以根据能量守恒定律, 用变维分形方法针对一个实例 (小球沿长斜面滚下) 同时导出改进的牛顿第二定律及万有引力定律。

参考文献

- [1] 付显华. 水星进动问题新解[J]. 天文学报, 1989, (4): 350~354
- [2] 付显华. 改进的牛顿万有引力公式[J]. 自然杂志, 2001, (1): 58~59
- [3] Turcotte D L. Fractals and chaos in geology and geophysics [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1992. 1~22
- [4] 付显华. 流体力学中的变维分形[A]. 第二届全国计算水力学会议论文集[C]. 武汉: 中国水利学会水力学专业委员会, 1993. 202~207
- [5] 付显华. 分形技术在油气勘探应用中的改进——变维分形技术[J]. 中国海上油气(地质), 1994, (3): 210~214
- [6] Fu Yuhua. Analyses and fractal single point method for solving hydraulic problems in ocean engineering [A]. International Meeting on Petroleum Engineering 29986 [C]. Beijing: SPE, Nov 1995. 347~356

Deriving Improved Newton's Second Law and the Law of Gravity at One Time with Form of Fractal Formula

Fu Yuhua

(China Offshore Oil Research Center, Beijing 100027, China)

[Abstract] Newton's second law and the law of gravity are summarized with experimental results. For discussing the possibility of deriving the two laws theoretically, according to the law of conservation of energy, the method of deriving improved Newton's second law and the law of gravity at one time with variable dimension fractal method is presented for an example (a small ball moves down along a long incline). For the sake of convenience, the results suitable for this example with the constant dimension fractal form are as follows: improved law of gravity $F = -GMm/r^{1.99989}$, and improved Newton's second law $F = ma^{1.01458}$.

[Key words] Newton's second law; the law of gravity; theoretical derivation