2003年9月 第5卷第9期
中国工程科学 Engineering Science
Sep. 2003 Vol.5 No.9

学术论文

# 一类连续模糊算子及其应用

张世强
(重庆医科大学数学教研室，重庆 400016)

[摘要] 给出了一类连续模糊算子。从应用的观点出发，分析了常用的三角范算子与连续模糊算子之间的关系。提出了一个新的模糊综合评判标准和方法，指出新的模糊综合评判标准和方法的重要特性在于直接使用未转换的数据，避免丢失原始信息，避免增加干扰信息。对于不同文献中的相关结论，用此标准容易判断出那篇的结论最好。

[关键词] 模糊数学；模糊综合评判；三角范算子；连续模糊算子
[中图分类号] O159 [文献标识码] A [文章编号] 1009-1742 (2003) 09-0027-05

## 1 引言

自从 Zadeh 建立了模糊集合理论以来，模糊数学的分枝——Fuzzy 综合决策成为解决各类问题的自然而强有力的工具。这些问题出现在工程技术、生物医学、地理以及包括某些社会科学的领域。一般说来，这些问题的 Fuzzy 综合决策常用 Zadeh 算子解决，当 Zadeh 算子不能评判时，就用其他几个常用算子来处理。这就产生了一个新的问题，决策的标准已经被改变了。因此，面对不同文献中的相关结论，很难说出那个的结果最好。为了解决这个问题，笔者给出了一类连续的 Fuzzy 算子，同时给出了一个新的统一的 Fuzzy 综合决策准则。

## 2 三角算子的定义

首先引入一类重要算子——三角算子。它们的定义如下：

定义 1 (三角范式) 定义在闭区间 [0, 1] 上的三角范式 $T$ 是一个 [0, 1] × [0, 1] → [0, 1] 的二元函数，满足：

$T(x,y) = T(y,x)$;

$T[T(x,y),z] = T[x,T(y,z)]$;

$x \leqslant u$ and $y \leqslant v \Rightarrow T(x,y) \leqslant T(u,v)$;

$T(0,x) = 0, T(1,x) = x$。

定义 2 (反三角范式) 定义在闭区间 [0, 1] 上的反三角范式 $S$ 是一个 [0, 1] × [0, 1] → [0, 1] 的二元函数，满足：

$S(x,y) = S(y,x)$;

$S[S(x,y),z] = S[x,S(y,z)]$;

$x \leqslant u$ and $y \leqslant v \Rightarrow S(x,y) \leqslant S(u,v)$;

$S(0,x) = x, S(1,x) = 1$。

三角范式与反三角范式常统称为三角范算子。

## 3 Hamacher 算子的定义

在论域 $U$ 中引入一对重要算子——Hamacher 算子，其定义如下：

定义 3 $\forall \tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C} \in$ 模糊幂集 $F(U)$, $\forall u \in U$, $r \in [0, +\infty)$

1) $\tilde{A}$ 与 $\tilde{B}$ 的 Hamacher 积记为 $\tilde{C} = \tilde{A} \overset{\cdot}{r} \tilde{B}$，定义为

$$\tilde{C}(u) = (\tilde{A} \overset{\cdot}{r} \tilde{B})(u) = \frac{\tilde{A}(u)\tilde{B}(u)}{r + [1-r][\tilde{A}(u) + \tilde{B}(u) - \tilde{A}(u)\tilde{B}(u)]}。 \quad (1)$$

[收稿日期] 2003-03-04；修回日期 2003-05-06
[作者简介] 张世强 (1958-)，男，四川乐山市人，重庆医科大学副教授

2) $\tilde{A}$ 与 $\tilde{B}$ 的 Hamacher 和记为 $\tilde{C}=\tilde{A}\overset{+}{\mathrm{r}}\tilde{B}$，定义为

$$\tilde{C}(u)=(\tilde{A}\overset{+}{\mathrm{r}}\tilde{B})(u)=\frac{\tilde{A}(u)+\tilde{B}(u)+[r-2]\tilde{A}(u)\tilde{B}(u)}{1-\tilde{A}(u)\tilde{B}(u)+r\tilde{A}(u)\tilde{B}(u)}。\tag{2}$$

算子对（$\overset{\bullet}{\mathrm{r}}$，$\overset{+}{\mathrm{r}}$）被称为 Hamacher 算子。[1]

在定义 3 中，当 $r=0$ 且 $\tilde{A}(u)=\tilde{B}(u)=0$ 时，式（1）的分母为零；当 $r=0$ 且 $\tilde{A}(u)=\tilde{B}(u)=1$ 时，式（2）的分母为零。现重新定义 Hamacher 算子对（$\overset{\bullet}{\mathrm{r}}$，$\overset{+}{\mathrm{r}}$）如下：

**定义 4** $\forall\tilde{A}$，$\tilde{B}$，$\tilde{C}\in$ 模糊幂集 $F(U)$，$\forall u\in U$，$r\in[0,+\infty)$

1) $\tilde{A}$ 与 $\tilde{B}$ 的 Hamacher 积记为 $\tilde{C}=\tilde{A}\overset{\bullet}{\mathrm{r}}\tilde{B}$，定义为

$$(\tilde{A}\overset{\bullet}{\mathrm{r}}\tilde{B})(u)=\begin{cases}0 & r=0\text{ 且 }\tilde{A}(u)=\tilde{B}(u)=0,\\ \dfrac{\tilde{A}(u)\tilde{B}(u)}{r+[1-r][\tilde{A}(u)+\tilde{B}(u)-\tilde{A}(u)\tilde{B}(u)]} & \text{其他。}\end{cases}\tag{3}$$

2) $\tilde{A}$ 与 $\tilde{B}$ 的 Hamacher 和记为 $\tilde{C}=\tilde{A}\overset{+}{\mathrm{r}}\tilde{B}$，定义为

$$\tilde{C}(u)=(\tilde{A}\overset{+}{\mathrm{r}}\tilde{B})(u)=\begin{cases}1 & r=0\text{ 且 }\tilde{A}(u)=\tilde{B}(u)=1,\\ \dfrac{\tilde{A}(u)+\tilde{B}(u)+[r-2]\tilde{A}(u)\tilde{B}(u)}{1-\tilde{A}(u)\tilde{B}(u)+r\tilde{A}(u)\tilde{B}(u)} & \text{其他。}\end{cases}\tag{4}$$

## 4 Hamacher 算子的一个新重要性质

式（3）与式（4）已证明是关于变量 $\tilde{A}(u)$ 或 $\tilde{B}(u)$ 的单调函数[1]。但是，Hamacher 算子的一个新的重要性质至今还没有被任何文献提到。

下面给出新的结论：

**定理 1** $\forall u\in U$，式（4）是关于参数变量 $r$ 的单调递增函数。

**证明** $\forall u\in U$，设 $Y_1(r)=\tilde{C}(u)$，对参数变量 $r$ 求导得

$$\frac{\mathrm{d}Y_1(r)}{\mathrm{d}r}=\frac{\tilde{A}(u)\tilde{B}(u)[(1-\tilde{A}(u)\tilde{B}(u)+r\tilde{A}(u)\tilde{B}(u))-(\tilde{A}(u)+\tilde{B}(u)-2\tilde{A}(u)\tilde{B}(u)+r\tilde{A}(u)\tilde{B}(u))]}{[1-\tilde{A}(u)\tilde{B}(u)+r\tilde{A}(u)\tilde{B}(u)]^2}=$$

$$\frac{\tilde{A}(u)\tilde{B}(u)[1-(\tilde{A}(u)+\tilde{B}(u)-\tilde{A}(u)\tilde{B}(u))]}{[1-\tilde{A}(u)\tilde{B}(u)+r\tilde{A}(u)\tilde{B}(u)]^2}\geqslant 0$$

故 $Y_1(r)=\tilde{C}(u)\uparrow\Box$。

**定理 2** $\forall u\in U$，式（3）是关于参数变量 $r$ 的单调递减函数。

**证明** $\forall u\in U$，设 $Y_2(r)=\tilde{C}(u)$，对参数变量 $r$ 求导得

$$\frac{\mathrm{d}Y_2(r)}{\mathrm{d}r}=\frac{-\tilde{A}(u)\tilde{B}(u)[1-(\tilde{A}(u)+\tilde{B}(u)-\tilde{A}(u)\tilde{B}(u))]}{[r(1-\tilde{A}(u)-\tilde{B}(u)+\tilde{A}(u)\tilde{B}(u))+\tilde{A}(u)+\tilde{B}(u)+\tilde{A}(u)\tilde{B}(u)]^2}\leqslant 0,$$

故 $Y_2(r)=\tilde{C}(u)\downarrow\Box$。

式（4）定义了无穷个反三角范式；式（3）定义了无穷个三角范式。

定理 1 表明当参数变量 $r=0$ 时，式（4）是最小的反三角范式；定理 2 则表明，当参数变量 $r=0$ 时，式（3）是最大的三角范式。

显然定理 1 和定理 2 给出了一类连续的 Fuzzy 算子，这是 Hamacher 算子的一个新的重要性质。

## 5 连续的 Fuzzy 算子和其他常用的三角算子的关系

易证常用的三角算子之间有如下的关系：

$$\tilde{A}\otimes\tilde{B}\subseteq\tilde{A}\overset{\bullet}{\varepsilon}\tilde{B}\subseteq\tilde{A}\,\hat{\cdot}\,\tilde{B}\subseteq\tilde{A}\cap\tilde{B}\subseteq\tilde{A}\cup\tilde{B}\subseteq\tilde{A}\,\hat{+}\,\tilde{B}\subseteq\tilde{A}\overset{+}{\varepsilon}\tilde{B}\subseteq\tilde{A}\oplus\tilde{B}$$

文献［1］已证明 $\overset{\bullet}{\mathrm{r}}$ 是三角算子，$\overset{+}{\mathrm{r}}$ 是反三角算子。特别地：

1) 对于定义 4 中的连续的 Fuzzy 算子，当参数变量 $r=1$ 时，$\forall u\in U$，分别记定义 4 中的 $\tilde{C}(u)$ 为 $(\tilde{A}\overset{\bullet}{\mathrm{r}}\tilde{B})_1$ 与 $(\tilde{A}\overset{+}{\mathrm{r}}\tilde{B})_1$，则 Hamacher 算子（$\overset{\bullet}{\mathrm{r}}$，$\overset{+}{\mathrm{r}}$）就变成了概率积与概率和算子（$\hat{\cdot}$，$\hat{+}$）：

$$(\tilde{A}\overset{\bullet}{\mathrm{r}}\tilde{B})_1(u)=(\tilde{A}\,\hat{\cdot}\,\tilde{B})(u)=\tilde{A}(u)\tilde{B}(u),$$

$$(\tilde{A}\overset{+}{\mathrm{r}}\tilde{B})_1(u)=(\tilde{A}\,\hat{+}\,\tilde{B})(u)=\tilde{A}(u)+\tilde{B}(u)-\tilde{A}(u)\tilde{B}(u)。$$

2) 对于定义 4 中的连续的 Fuzzy 算子，当参数变量 $r=2$ 时，$\forall u\in U$，分别记定义 4 中的 $\tilde{C}(u)$ 为 $(\tilde{A}\overset{\bullet}{\mathrm{r}}\tilde{B})_2$ 与 $(\tilde{A}\overset{+}{\mathrm{r}}\tilde{B})_2$，则 Hamacher

算子（$\dot{\mathrm{r}}$，$\overset{+}{\mathrm{r}}$）就变成了 Einstain 算子（$\dot{\varepsilon}$，$\overset{+}{\varepsilon}$）：

$$(\tilde{A}\ \dot{\mathrm{r}}\ \tilde{B})_2(u) = (\tilde{A}\ \dot{\varepsilon}\ \tilde{B})(u) = \frac{\tilde{A}(u)\tilde{B}(u)}{1+[1-\tilde{A}(u)][1-\tilde{B}(u)]},$$

$$(\tilde{A}\ \overset{+}{\mathrm{r}}\ \tilde{B})_2(u) = (\tilde{A}\ \hat{\varepsilon}\ \tilde{B})(u) = \frac{\tilde{A}(u)+\tilde{B}(u)}{1+\tilde{A}(u)\tilde{B}(u)}。$$

给出新的结论如下：

**定理 3**　$\forall \tilde{A}$，$\tilde{B}\in F(U)$，当参数变量 $r=0$ 时，连续 Fuzzy 算子——Hamacher 算子（$\dot{\mathrm{r}}$，$\overset{+}{\mathrm{r}}$）与 Zadeh 算子（$\cap$，$\cup$）之间的关系为

$$(\tilde{A}\ \dot{\mathrm{r}}\ \tilde{B})_0 \subseteq (\tilde{A}\cap\tilde{B}) \subseteq (\tilde{A}\cup\tilde{B}) \subseteq (\tilde{A}\ \overset{+}{\mathrm{r}}\ \tilde{B})_0。\tag{5}$$

**证明**　如果参数变量 $r=0$，则 $\forall u\in U$，分别记定义 3 中的 $\tilde{C}(u)$ 为 $(\tilde{A}\ \dot{\mathrm{r}}\ \tilde{B})_0$ 与 $(\tilde{A}\ \overset{+}{\mathrm{r}}\ \tilde{B})_0$，即：

$$\tilde{A}\ \dot{\mathrm{r}}\ \tilde{B})_0(u) = \begin{cases} 0 & \tilde{A}(u)=\tilde{B}(u)=0, \\ \dfrac{\tilde{A}(u)\tilde{B}(u)}{\tilde{A}(u)+\tilde{B}(u)-\tilde{A}(u)\tilde{B}(u)} & \text{其他；} \end{cases}$$

$$(\tilde{A}\ \overset{+}{\mathrm{r}}\ \tilde{B})_0(u) = \begin{cases} 1 & \tilde{A}(u)=\tilde{B}(u)=1, \\ \dfrac{\tilde{A}(u)+\tilde{B}(u)-2\tilde{A}(u)\tilde{B}(u)}{1-\tilde{A}(u)\tilde{B}(u)} & \text{其他。} \end{cases}$$

记 Zadeh 算子为：

$$(\tilde{A}\cap\tilde{B})(u) = \tilde{A}(u)\wedge\tilde{B}(u),$$

$$(\tilde{A}\cup\tilde{B})(u) = \tilde{A}(u)\vee\tilde{B}(u)。$$

如果 $\tilde{A}(u)=\tilde{B}(u)=0$，则有

$$(\tilde{A}\ \dot{\mathrm{r}}\ \tilde{B})_0(u) = (\tilde{A}\cap\tilde{B})(u) = 0;$$

如果 $\tilde{A}(u)=\tilde{B}(u)=1$，则有

$$(\tilde{A}\ \overset{+}{\mathrm{r}}\ \tilde{B})_0(u) = (\tilde{A}\cup\tilde{B})(u) = 1;$$

如果 $0<\tilde{A}(u)+\tilde{B}(u)<2$，证明过程分为两步：

1）设 $\tilde{A}(u)\geqslant\tilde{B}(u)$，则有

$$(\tilde{A}\dot{\mathrm{r}}\tilde{B})_0(u) - (\tilde{A}\cap\tilde{B})(u) = \frac{\tilde{A}(u)\tilde{B}(u)}{\tilde{A}(u)+\tilde{B}(u)-\tilde{A}(u)\tilde{B}(u)} - \tilde{B}(u) =$$

$$\tilde{B}(u)\frac{\tilde{B}(u)[\tilde{A}(u)-1]}{\tilde{A}(u)+\tilde{B}(u)-\tilde{A}(u)\tilde{B}(u)} \leqslant 0,$$

$$(\tilde{A}\ \overset{+}{\mathrm{r}}\ \tilde{B})_0(u) - (\tilde{A}\cup\tilde{B})(u) = \frac{\tilde{A}(u)+\tilde{B}(u)-2\tilde{A}(u)\tilde{B}(u)}{1-\tilde{A}(u)\tilde{B}(u)} - \tilde{A}(u) =$$

$$\frac{\tilde{B}(u)[1-\tilde{A}(u)]^2}{1-\tilde{A}(u)\tilde{B}(u)} \geqslant 0。$$

2）设 $\tilde{A}(u)<\tilde{B}(u)$，则有

$$(\tilde{A}\ \dot{\mathrm{r}}\ \tilde{B})_0(u) - (\tilde{A}\cap\tilde{B})(u) = \frac{\tilde{A}(u)\tilde{B}(u)}{\tilde{A}(u)+\tilde{B}(u)-\tilde{A}(u)\tilde{B}(u)} - \tilde{A}(u) =$$

$$\tilde{A}(u)\frac{\tilde{A}(u)[\tilde{B}(u)-1]}{\tilde{A}(u)+\tilde{B}(u)-\tilde{A}(u)\tilde{B}(u)} \leqslant 0,$$

$$(\tilde{A}\ \overset{+}{\mathrm{r}}\ \tilde{B})_0(u) - (\tilde{A}\cup\tilde{B})(u) = \frac{\tilde{A}(u)+\tilde{B}(u)-2\tilde{A}(u)\tilde{B}(u)}{1-\tilde{A}(u)\tilde{B}(u)} - \tilde{B}(u) =$$

$$\frac{\tilde{A}(u)[1-\tilde{B}(u)]^2}{1-\tilde{A}(u)\tilde{B}(u)} \geqslant 0。$$

由此知式（5）成立。

**定理 4**　$\forall \tilde{A},\tilde{B}\in F(U)$，当参数变量 $r\to+\infty$ 时，连续 Fuzzy 算子——Hamacher 算子（$\dot{\mathrm{r}}$，$\overset{+}{\mathrm{r}}$）与有界积与有界和算子（$\otimes$，$\oplus$）之间的关系为

$$(\tilde{A}\ \dot{\mathrm{r}}\ \tilde{B})_{+\infty} \subseteq (\tilde{A}\otimes\tilde{B}) \subseteq (\tilde{A}\oplus\tilde{B}) \subseteq (\tilde{A}\ \overset{+}{\mathrm{r}}\ \tilde{B})_{+\infty}。\tag{6}$$

**证明**　如果参数变量 $r\to+\infty$，则 $\forall u\in U$，分别记定义 4 中的 $\tilde{C}(u)$ 为 $(\tilde{A}\ \dot{\mathrm{r}}\ \tilde{B})_{+\infty}$ 与 $(\tilde{A}\ \overset{+}{\mathrm{r}}\ \tilde{B})_{+\infty}$，即

$$\lim_{r\to+\infty}(\tilde{A}\ \dot{\mathrm{r}}\ \tilde{B}) = (\tilde{A}\ \dot{\mathrm{r}}\ \tilde{B})_{+\infty},$$

$$\lim_{r\to+\infty}(\tilde{A}\ \overset{+}{\mathrm{r}}\ \tilde{B}) = (\tilde{A}\ \overset{+}{\mathrm{r}}\ \tilde{B})_{+\infty}。$$

有界积与有界和算子（$\otimes$，$\oplus$）为：

$$(\tilde{A}\otimes\tilde{B})(u) = \max[0,\tilde{A}(u)+\tilde{B}(u)-1],$$

$$(\tilde{A}\oplus\tilde{B})(u) = \min[\tilde{A}(u)+\tilde{B}(u),1]。$$

证明过程分为两步：

1）如果 $0<\tilde{A}(u)\tilde{B}(u)$，则有

$$\lim_{r\to+\infty}(\tilde{A}\ \overset{+}{\mathrm{r}}\ \tilde{B})(u) = \lim_{r\to+\infty}\frac{\tilde{A}(u)+\tilde{B}(u)-2\tilde{A}(u)\tilde{B}(u)+r\tilde{A}(u)\tilde{B}(u)}{1-\tilde{A}(u)\tilde{B}(u)+r\tilde{A}(u)\tilde{B}(u)} =$$

$$1\geqslant(\tilde{A}\oplus\tilde{B})(u);$$

如果 $\tilde{A}(u)\tilde{B}(u)=0$,则有

$\lim\limits_{r\to+\infty}(\tilde{A}\overset{+}{\mathrm{r}}\tilde{B})(u)=\tilde{A}(u)+\tilde{B}(u)=(\tilde{A}\oplus\tilde{B})(u)$。

2) 如果 $\tilde{A}(u)\tilde{B}(u)\neq 0$ 且 $\tilde{A}(u)+\tilde{B}(u)-\tilde{A}(u)\tilde{B}(u)=1$,则有

$$\lim_{r\to+\infty}(\tilde{A}\overset{\cdot}{\mathrm{r}}\tilde{B})(u)=\lim_{r\to+\infty}\frac{\tilde{A}(u)\tilde{B}(u)}{r[1-\tilde{A}(u)-\tilde{B}(u)+\tilde{A}(u)\tilde{B}(u)]+\tilde{A}(u)+\tilde{B}(u)-\tilde{A}(u)\tilde{B}(u)}=$$

$$\tilde{A}(u)\tilde{B}(u)=\tilde{A}(u)+\tilde{B}(u)-1=(\tilde{A}\otimes B)(u);$$

如果 $\tilde{A}(u)\tilde{B}(u)\neq 0$ 且 $\tilde{A}(u)+\tilde{B}(u)-\tilde{A}(u)\tilde{B}(U)\neq 1$,则有

$$\lim_{r\to+\infty}(\tilde{A}\overset{\cdot}{\mathrm{r}}\tilde{B})(u)=0\leqslant\max[0,\tilde{A}(u)+\tilde{B}(u)-1]=(\tilde{A}\otimes\tilde{B})(u);$$

如果 $\tilde{A}(u)\tilde{B}(u)=0$,则有

$$\lim_{r\to+\infty}(\tilde{A}\overset{\cdot}{\mathrm{r}}\tilde{B})(u)=0=(\tilde{A}\otimes\tilde{B})(u)。$$

由此知式(6)成立。

定理1至定理4意指连续的Fuzzy算子——Hamacher算子,可以取代除Zadeh算子外的其他常用算子。同时,该算子与Zadeh算子有如下关系:

$$(\tilde{A}\overset{\cdot}{\mathrm{r}}\tilde{B})\subseteq(\tilde{A}\cap\tilde{B})\subseteq(\tilde{A}\cup\tilde{B})\subseteq(\tilde{A}\overset{+}{\mathrm{r}}\tilde{B})。\tag{7}$$

## 6 一个新的统一的Fuzzy综合决策准则

目前,Fuzzy综合决策成为解决各类问题的自然而强有力的工具。这些问题出现在工程技术、生物医学、地理以及包括某些社会科学的领域。一般说来,这些问题的Fuzzy综合决策常用Zadeh算子解决,当Zadeh算子不能评判时,就用其他几个常用算子来处理[1,2]。这就产生了一个新的问题,决策的标准已经被改变了,不同的学者使用各自的决策标准。因此,面对不同文献中的相关结论,很难说出那个的结果最好。为了解决这个问题,笔者给出了一类连续的Fuzzy算子,由它导出的式(7)则给出了一个新的统一的Fuzzy综合决策准则。

例 设 $\tilde{A}=[0.2\quad 0.1\quad 0.3\quad 0.2\quad 0.2]$,

$$\tilde{\boldsymbol{R}}=\begin{bmatrix}0.7&0.2&0.1&0\\0.5&0.4&0.1&0\\0.4&0.4&0.1&0.1\\0.3&0.5&0&0.2\\0.4&0.3&0.2&0.1\end{bmatrix},$$

试用模糊矩阵 $\tilde{\boldsymbol{B}}=\tilde{\boldsymbol{A}}\circ\tilde{\boldsymbol{R}}$ 确定最好的Fuzzy综合决策结果。

解 用Zadeh算子

$$(\cap,\cup)\Rightarrow\tilde{B}=[0.3\quad 0.3\quad 0.2\quad 0.2],$$

此时Zadeh算子失效。

用连续的Fuzzy算子——Hamacher算子($\overset{\cdot}{\mathrm{r}}$, $\overset{+}{\mathrm{r}}$),当参数变量 $r=0$ 时,

$$(\overset{\cdot}{\mathrm{r}},\overset{+}{\mathrm{r}})_0=[(\tilde{A}\overset{\cdot}{\mathrm{r}}\tilde{B})_0,(\tilde{A}\overset{+}{\mathrm{r}}\tilde{B})_0]\Rightarrow$$

$$\tilde{B}=[0.632\quad 0.456\quad 0.257\quad 0.224],$$

标准化后得 $\tilde{B}=[0.399\quad 0.292\quad 0.165\quad 0.144]$;

当参数变量 $r=1$ 时,$(\overset{\cdot}{\mathrm{r}},\overset{+}{\mathrm{r}})_1=(\hat{\cdot},\hat{+})\Rightarrow\tilde{B}=[0.378\quad 0.314\quad 0.097\quad 0.087]$,

标准化后得 $\tilde{B}=[0.431\quad 0.358\quad 0.111\quad 0.100]$;

当参数变量 $r=2$ 时,$(\overset{\cdot}{\mathrm{r}},\overset{+}{\mathrm{r}})_2=(\overset{\cdot}{\varepsilon},\overset{+}{\varepsilon})\Rightarrow\tilde{B}=[0.314\quad 0.240\quad 0.060\quad 0.054]$,

标准化后得 $\tilde{B}=[0.470\quad 0.359\quad 0.090\quad 0.081]$;

当参数变量 $r=10$ 时,$(\overset{\cdot}{\mathrm{r}},\overset{+}{\mathrm{r}})_{10}\Rightarrow\tilde{B}=[0.0334\quad 0.0274\quad 0.0081\quad 0.0072]$,

标准化后得 $\tilde{B}=[0.439\quad 0.361\quad 0.106\quad 0.094]$。

对于上例,有界积与有界和算子$(\otimes,\oplus)\Rightarrow\tilde{B}=[0\quad 0\quad 0\quad 0]$,不能作出评判。其原因是没有 $\tilde{A}(u)$ 与 $\tilde{B}(u)$ 满足 $\tilde{A}(u)+\tilde{B}(u)-1>0$。由式(6)可知,此时连续的Fuzzy算子$(\overset{\cdot}{\mathrm{r}},\overset{+}{\mathrm{r}})_{+\infty}$亦不能作出评判。由定理1和定理2可知,此时连续Fuzzy算子$(\overset{\cdot}{\mathrm{r}},\overset{+}{\mathrm{r}})_{+\infty}$中的三角范式$\overset{\cdot}{\mathrm{r}}$已被极端地弱化了。

对于上例,算子对$(\cap,\cup)$,$(\overset{\cdot}{\mathrm{r}},\overset{+}{\mathrm{r}})_0$,$(\overset{\cdot}{\mathrm{r}},\overset{+}{\mathrm{r}})_1$,和$(\overset{\cdot}{\mathrm{r}},\overset{+}{\mathrm{r}})_2$逐渐增加评判结果的精度。根据定理1和定理2可知,随着参数变量 $r$ 的增加,三角范式将逐渐被弱化,而反三角范式将逐渐被强化;当参数变量 $r$ 从最小值 $r=0$ 开始,随着参数变量 $r$ 的增加,即随着连续Fuzzy算子的变化,模糊综合评判的结果将逐渐从模糊到清晰。但是,随着参数变量 $r$ 的进一步增加,模糊综合评判的结果又将逐渐从清晰到模糊。

换言之,随着连续Fuzzy算子的变化,即随着参数变量 $r$ 的变化,能够找到参数变量 $r$ 的一个固定值。用由该固定值确定的Fuzzy算子去作模糊综合评判,将会获得最好的评判结果。如何找到这个固定值将另文讨论。

对于上例，使用常用算子的不同组合，如算子对($\cap$, $\hat{+}$)或($\cap$, $\overset{+}{\varepsilon}$)，($\cap$, $\oplus$)，($\otimes$, $\cup$)均不能作出评判。只有用算子对($\hat{\cdot}$, $\cup$)或($\dot{\varepsilon}$, $\cup$)可以作出评判。换言之，当 Zadeh 算子($\cap$, $\cup$)失效时，应该选择那对算子组合来进行决策，亦是一个困难的问题。

综上所述，从实用的观点出发，当 Zadeh 算子($\cap$, $\cup$)失效时，应该停止尝试过程，而采用式(7)给出的新的统一的 Fuzzy 综合决策准则。

## 7　结语

新的模糊综合评判标准和方法有如下重要特性：

1)直接使用未转换的数据；

2)避免丢失原始信息；

3)避免增加干扰信息；

4)对于不同文献中的相关结论，用此标准容易判断出谁的结论最好。

因此，新的模糊综合评判标准和方法具有特别重要的应用价值和意义。

### 参考文献

[1]　罗承忠. 模糊集引论 [M]. 北京：北京师范大学出版社，1989. 47～48，257～258

[2]　韩立岩，汪培庄. 应用模糊数学 [M]. 北京：首都经贸大学出版社，1998. 148～154

# A Sort of Continued Fuzzy Operators and Its Application

Zhang Shiqiang

(*Department of Mathematics*, *Chongqing University of Medical Sciences*, *Chongqing*　400016, *China*)

[**Abstract**]　A sort of continued fuzzy operators is given. Proceeded from applied point of view, relation between the triangle norm operators most in use and the continued fuzzy operators is analyzed. A new fuzzy synthetic evaluation criterion and method are given. The new fuzzy synthetic evaluation criterion and method have some important characteristics as follows: using directly untransformed data; avoiding loss of original information; avoiding increase in interference information; bing very easy to tell which result is better in different papers.

[**Key words**]　fuzzy mathematics; fuzzy synthetic evaluation; triangle norm operator; continued fuzzy operators

(cont. from p. 21)

# Optimizing Z-directional Steely Needlepoint Based on Fiber Bending and Elongation

Zhu Jianxun[1,2], He Jianmin[1], Wang Haiyan[1], Zhou Zhigang[2]

(1. *College of Economics Management*, *Southeast University*, *Nanjing*　210096 *China*;
2. *NanJing Fiberglass Reseach & Design Institute*, *Nanjing*　210012 *China*)

[**Abstract**]　This paper analyzes the mechanism of fiber bending and elongation of integrated piercing process, and builds the mechanical model of steely needle, then discusses the increasing and decreasing relation between maximum bending stress, maximum shear stress and the resistance that acts on needlepoint and radius and length of needlepoint, then optimizes the form of needlepoint according to the result.

[**Key words**]　integrated piercing; bending stress; shear stress; radius of needlepoint; length of needlepoint; optimization