学术论文

区间灰数表征与算法改进及其 GM (1, 1) 模型应用研究

方志耕，刘思峰，陆　芳，万　军，刘　斌
（南京航空航天大学经济与管理学院，南京　210016）

[摘要]　针对目前区间灰数的表征和运算过程中存在着较为严重的问题，即：运算结果对灰数的灰度进行不必要的放大，造成信息的严重失真，笔者定义了标准区间灰数与第一和第二标准区间灰数的概念，分析了第一和第二标准区间灰数之间的关系，进一步设计了普通区间灰数与标准区间灰数之间的转换规则，提供了标准区间灰数之间的比较与运算法则，较好地解决了区间灰数之间的大小比较与运算问题。最后，将这一研究成果应用于基于区间数的 GM (1, 1) 模型预测问题，取得了良好的效果。

[关键词]　区间灰数；标准区间灰数；表征；GM (1, 1) 模型；运算规则
[中图分类号] O159　**[文献标识码]** A　**[文章编号]** 1009－1742 (2005) 02－0057－05

1　引言

灰系统理论是我国著名学者邓聚龙教授 1982 年创立的一门新兴横断学科[1]。灰数尤其是区间灰数表征及其运算问题，在灰系统理论的研究与应用过程中起到了重要作用。然而，目前的区间灰数的表征及其运算存在着较为严重的问题[2~8]。例如，在某种情况下，它会对计算结果灰度产生不正常的放大。

例 1　若给定区间灰数 $a_{11}(g)=1$，$a_{12}(g)=5$，$a_{21}(g)=[2,3]$，$a_{22}(g)=[0,1]$，其中 g 表示灰数(文献[1] 中，灰数符号用 $\otimes$ 表示 —— 笔者注)，对这些给定灰数，用已有的灰数运算规则对其进行计算[1~5]，其计算结果为

$$x(g)=[a_{22}(g)-a_{21}(g)]/[(a_{11}(g)+a_{22}(g))-(a_{12}(g)+a_{21}(g))]=[1/7,\ 3/5] \quad (1)$$

$$\max\{x(g)\}=\left.\frac{3}{7}\right|_{a_{21}=3,a_{22}=0},$$

$$\min\{x(g)\}=\left.\frac{1}{5}\right|_{a_{21}=2,a_{22}=1} \quad (2)$$

然而，用普通的数学计算方法所算得式 (1)[8]的最大和最小值如式 (2) 所示。也就是说，如果按普通的经典数学计算方法，式 (1) 的可能值域（区间灰数）应为 $x'(g)=[1/5,\ 3/7]$。

显然，由式 (1) 和 (2) 的运算结果可知，$1/7<[1/5,\ 3/7]<3/5$，它表明：采用目前的区间灰数运算规则对区间灰数进行运算，会造成运算结果与经典数学的运算结果的不一不致。

根据灰数的灰度定义[1]，可计算出 $x(g)$ 和 $x'(g)$ 的灰度分别为：$g^{\circ}{}_1(g)=1.2308$ 和 $g^{\circ}{}_2(g)=0.7273$。

由此可见，采用目前的区间灰数运算规则对区间灰数进行运算，其运算结果的灰度大于经典数学的运算结果，主要原因在于：采用传统的灰数计算方法可能会造成同一个灰数在相同的计算条件下取了不同的值。例如，在式 (1) 中，当分子中取 $a_{22}(g)=1$，$a_{21}(g)=2$；而分母中取 $a_{22}(g)=0$，

[收稿日期]　2003－09－26；修回日期　2004－10－09
[基金项目]　国家自然科学基金资助项目 (70473037)；国家教育部博士学科点科研基金资助项目 (20020287001)；江苏省自然科学基金重点资助项目 (BK2003211)；江苏省研究生创新计划项目；南京航空航天大学创新集体基金项目；南京航天航空大学科研创新基金项目 (Y0488－091)；南京航空航天大学特聘教授科研创新基金项目 (1009－260812)
[作者简介]　方志耕 (1962－)，男，安徽池州市人，南京航空航天大学副教授，博士研究生

$a_{21}(g)=3$时,可得式(1)中 $x(g)$ 的左端点的值为1/7;这使得 $x(g)$ 的左端点 值被不正常地缩小。同样的理由，传统的灰数计算方法，在某种情况下也会使其右端点的值被不正常地放大。

为了克服这种灰代数计算方法的蔽端，笔者仅对这一问题进行一些讨论。

2 标准区间灰数及其运算

定义1（标准区间灰数） 若某区间灰数可表示成式（3）所示的形式，且在式（3）中，a_i 称为 G_i 的白部，而

$$G_i = g_i + c_i\gamma_i,\ i = 1, 2, \cdots \tag{3}$$

$c_i\gamma_i$ 称为G_i的灰部,其中 c_i 称为灰系数,γ_i 称为单位灰数(或灰数单位)，则称式（3）所表示的灰数形式为标准区间灰数[6~10]，或简称为标准灰数。

定义1规定了区间灰数的标准表达形式。根据定义1，若存在2个标准区间灰数 $G_K = a_K + c_K\gamma_K$ 和 $G_L = -a_L - c_L\gamma_L$,且 $G_K + G_L = 0$,则称 G_K 和 G_L 互为相反灰数。

若存在2个标准区间灰数 $G_K = a_K + c_K g\gamma_K$ 和 $G_L = 1/G_K$,则称 G_K 和 G_L 互为灰倒数。

定理1（灰数的标准表达式） 任一区间灰数 $G_i \in [a_i, b_i]$，$a_i \leqslant b_i$，$i = 1, 2, \cdots$ 均可表示成定义1中的标准灰数的形式[2,3]，见式（3）。

证明 为不失一般性，对任一区间灰数 $G_i \in [a_i, b_i]$，$a_i \leqslant b_i$，$i = 1, 2, \cdots$ 进行如下变换：

$$G_i \in [a_i, b_i] = [a_i, b_i] + [a_i, a_i] - [a_i, a_i] = [a_i, a_i] + [0, b_i - a_i] = a_i + (b_i - a_i)\cdot[0,1],$$

令 $c_i = (b_i - a_i)$,$\gamma_i \in [0,1]$;则由上式可得

$$G_i = a_i + c_i\gamma_i \tag{4}$$

为标准区间灰数的表达形式，式中 a_i 称为 G_i 的白部,而 $c_i\gamma_i$ 称为 G_i 的灰部,在灰部 $c_i\gamma_i$ 中 $c_i = 1/(b_i - a_i)$称为灰系数,γ_i 称为单位灰数（或灰数单位）。

定理1构造性地证明，阐述任一区间灰数都可通过标准变换将其变为式（4）所示的标准形式。

定义2（标准区间灰数的运算规则） 若任意若干个标准区间灰数之间的代数运算 $F(g) = g(G_1, G_2, \cdots, G_n)$ 仍采用经典数学的运算规则[2,3]，且将这若干个灰数的取数 γ_i，$\gamma_i \in [0, 1]$，$i = 1, 2, \cdots$ 定为某确定的常数时，所得到的最小值和最大值：

$$\min\{F(g)\} = \min g(G_1, G_2, \cdots, G_n)\ |_{\gamma_i = c_i, c_i \in [0,1], i = 1,2,\cdots n},$$

$$\max\{F(g)\} = \max g(G_1, G_2, \cdots, G_n)\ |_{\gamma_i = c_i, c_i \in [0,1], i = 1,2,\cdots n},$$

分别作为 $F(g) = g(G_1, G_2, \cdots, G_n)$ 的左右端点值的运算过程称为标准区间灰数的运算过程。

3 第一和第二标准灰数

定义3（第一和第二标准灰数）

任给某一灰数 $G_i \in [a_i, b_i]$,($a_i \leqslant b_i$, $i = 1, 2, \cdots$)，若对其左端点值进行标准化变换，即

$$G_i^{(1)} \in [a_i, b_i] = a_i - a_i + [a_i, b_i] = a_i + [0, b_i - a_i] = a_i + (b_i - a_i)[0, 1] = a_i + (b_i - a_i)\gamma_i^{(1)},\ (0 \leqslant \gamma_i^{(1)} \leqslant 1) \tag{5}$$

$$G_i^{(2)} \in [a_i, b_i] = b_i - b_i + [a_i, b_i] = b_i - [0, b_i - a_i] = b_i - (b_i - a_i)[0, 1] = b_i - (b_i - a_i)\gamma_i^{(2)},\ (0 \leqslant \gamma_i^{(2)} \leqslant 1) \tag{6}$$

任一标准灰数，均可标准化为第一和第二标准化灰数的形式。尽管这两种不同表达形式的标准灰数在形式上是有差异的，但本质上应该是一致的，因为他们所表达的是同一个灰数。

定理2（第一和第二标准灰数的取数之和为1）

任给某一灰数 $G_i = [a_i, b_i]$，($a_i \leqslant b_i$，$i = 1, 2, \cdots$)，若将其表达成第一标准灰数（$G_i^{(1)}$）和第二标准灰数($G_i^{(2)}$),其中 $\gamma_i^{(1)}$，($0 \leqslant \gamma_i^{(1)} \leqslant 1$) 和 $\gamma_i^{(2)}$，($0 \leqslant \gamma_i^{(2)} \leqslant 1$) 分别表示这两标准灰数的取数，则对于同一个灰数而言，这两种不同表达形式的标准灰数取数之和为1，即 $\gamma_i^{(1)} + \gamma_i^{(2)} = 1$。

证明 为不失一般性，任给某一灰数 $G_i \in [a_i, b_i]$，($a_i \leqslant b_i$，$i = 1, 2, \cdots$)，按定义1，将其表示成第一和第二标准灰数的形式，如式（6）和式（7）所示。

由于式（6）和式（7）所表达的是同一个灰数，因此，尽管这两种不同表达形式的标准灰数在形式上是有差异的，但本质上是应该相等的，即

$$G_i^{(1)} = G_i^{(2)},\ a_i + (b_i - ai)\gamma_i^{(1)} = b_i - (b_i - a_i)\gamma_i^{(2)},\ \gamma_i^{(1)} + \gamma_i^{(2)} = 1 \tag{7}$$

由定理2可知，同一灰数的不同标准的表达形式不同，但并没有本质上的差别[2~4]，可以用图1来表示。尽管这两种标准灰数的表达形式没有差别，但是，在实际问题的计算过程中，为了便于对问题的理解和避免取数的混淆，一般情况下，在同

一问题的计算过程中，应尽量采用同一种形式的标准灰数，尤其是对于同一灰数而言，更应如此。

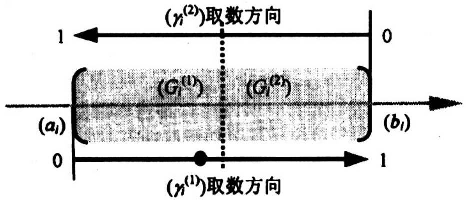

图 1　第一和二标准灰数取数 $\gamma_i^{(1)}$ 和 $\gamma_i^{(2)}$ 之间的关系

Fig.1　Relationship between $\gamma_i^{(1)}$ and $\gamma_i^{(2)}$

4　标准灰数的大小判定

灰数的大小比较是灰系统理论与应用研究中涉及到的最基本也是最重要的问题之一。首先讨论单个标准灰数的大小判定问题，然后再研究由单个标准灰数所复合的复合标准灰数的大小判定问题。

定义 4（单个标准灰数的大小比较）

任意 2 个灰数 $G_1 \in [a_1, b_1] = a_1 + b_1\gamma_1$ 和 $G_2 = [a_2, b_2] = a_2 + b_2\gamma_2$，若满足：

若 $G_1 - G_2 \geqslant 0$，则 $G_1 \geqslant G_2$；若 $G_1 - G_2 < 0$，则 $G_1 < G_2$。

根据定义 4，可以将 2 个单个标准灰数 $G_1 \in [a, b]$，$(a \leqslant b)$ 和 $G_2 \in [c, d]$ $(c \leqslant d)$ 之间的大小判定问题归结为以下情况：

1) 当 $b < c$ 时，称 $[a, b] < [c, d]$，即灰数 $[a, b]$ $(a \leqslant b)$ 小于灰数 $[c, d]$ $(c \leqslant d)$；

2) 当 $b \leqslant c$ 时，称 $[a, b] \leqslant [c, d]$，即灰数 $[a, b]$ $(a \leqslant b)$ 小于等于灰数 $[c, d]$ $(c \leqslant d)$；且仅当 $b = c$ 时，等号成立；

3) 当 $a = c$，$b = d$，且两灰数的取数一致（$\gamma_1 = \gamma_2$）时[1]，即满足

$G_1 \in [a_1, b_1] = \gamma_1 a_1 + (1 - \gamma_1) b_1$,

$\gamma_1 = [0, 1]$，$G_2 \in [a_2, b_2] = a_2 + b_2\gamma_2$,

$\gamma_2 = [0, 1]$，且 $\gamma_1 = \gamma_2$,

则称 $[a, b] = [c, d]$，即灰数 $[a, b]$ $(a \leqslant b)$ 等于灰数 $[c, d]$ $(c \leqslant d)$；

4) 当 $a = c$，$b = d$，且两灰数的取数不一致（$\gamma_1 \neq \gamma_2$）时，若 $(\gamma_1 < \gamma_2)$，则 $G_1 > G_2$；若 $\gamma_1 > \gamma_2$，则 $G_1 < G_2$。

以上给出了在一般情况下较易于对其大小进行判别的几种最简单的灰数形式及其判定方法。

定义 5（复合标准灰数）　若某灰数（G_K）是由若干个标准灰数（G_{ij}）经过若干次加、减、乘、除等其他形式的数学运算而得到的，则称该灰数（G_K）为复合标准灰数，简称为复合灰数，表示为

$$G_K = f(g_{ij})\gamma_{ij} = [\min_{\gamma_{ij}} f(\cdot), \max_{\gamma_{ij}} f(\cdot)],$$

$$(0 \leqslant \gamma_{ij} \leqslant 1,\ i,\ j = 1, 2, \cdots)。\tag{8}$$

由定义 5 可知，由单个标准灰数经过若干次数学运算而得到的灰数为复合标准灰数；由复合标准灰数，或者复合标准灰数与单个标准灰数经过若干次数学运算而得到的灰数也称为复合标准灰数。复合标准灰数与第一、第二标准灰数也具有相同的表达形式，具有白部、灰部和灰系数，只是其灰部的灰系数系由若干单个灰数的灰系数复合而成。

定义 6（复合灰数大小的判定）　任给 2 个复合灰数：$G_K = f(g_{ij})_{\gamma_{ij}}$，$(0 \leqslant \gamma_{ij} \leqslant 1,\ i,\ j = 1, 2, \cdots)$ 和 $G_L = f(g_{uv})_{\gamma_{uv}}$ $(0 \leqslant \gamma_{uv} \leqslant 1,\ u,\ v = 1, 2, \cdots)$，若无论 γ_{ij} 和 γ_{uv} 取任何取数，都能满足 $G_K \geqslant G_L$，即 $G_K|_{\gamma_{ij}=[0,1]} \geqslant G_L|_{\gamma_{uvj}=[0,1]}$，则称复合灰数 G_K 不比 G_L 小；若无论 γ_{ij} 和 γ_{uv} 取任何取数，都能满足 $G_K < G_L$，即 $G_K|_{\gamma_{ij}=[0,1]} < G_L|_{\gamma_{uv}=[0,1]}$，则称复合灰数 G_K 比 G_L 小；若无论 γ_{ij} 和 γ_{uv} 取任何取数，都能满足 $G_K = G_L$，即 $G_K|_{\gamma_{ij}=[0,1]} = G_L|_{\gamma_{uv}=[0,1]}$，则称复合灰数 G_K 等于 G_L；否则，则称复合灰数 G_K 和 G_L 之间的大小无法判定[1~4]。

例 2　给定 2 个单个标准灰数，$G_1 \in a + (b - a)\gamma_1$，$(0 \leqslant \gamma_1 \leqslant 1)$；$G_1 = c + (d - c)\gamma_2$，$(0 \leqslant \gamma_2 \leqslant 1)$；则，这两个标准灰数通过加法和减法而复合的复合标准灰数分别为：$G_{12}^{(1)}$，$G_{12}^{(2)}$。

$$\begin{aligned} G_{12}^{(1)} &= G_1 + G_2 = \\ &a + (b - a)\gamma_1 + c + (d - c)\gamma_2 = \\ &(a + c) + ((b - a)\gamma_1 + (d - c)\gamma_2) \end{aligned}\tag{9}$$

$$\begin{aligned} G_{12}^{(2)} &= G_1 - G_2 = \\ &a + (b - a)\gamma_1 - c - (d - c)\gamma_2 = \\ &(a - c) + ((b - a)\gamma_1 - (d - c)\gamma_2) \end{aligned}\tag{10}$$

5　案例研究

根据标准灰数的表征与运算规则，以基于灰矩阵形式的 2×2 的零和矩阵博弈为例，计算其混合策略的解，如例 3 所示。

例 3　求解灰矩阵博弈 $G(g) = \{S_1(g), S_2(g), A(g)\}$，其中：

$$A(g)=\begin{pmatrix}[0,1] & [2,3]\\ 4 & 2\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\gamma_{11} & 2+\gamma_{12}\\ 4 & 2\end{bmatrix},$$
$$(\gamma_{11}\in[0,1]),(\gamma_{12}\in[0,1])$$

问题的解。

解：运用2×2的零和矩阵博弈混合策略的求解公式[4]与本文提供的标准灰数的表征与计算方法，并由题意知：$a_{11}(g)=\gamma_{11}, a_{12}(g)=2+\gamma_{12}$，$a_{21}(g)=4, a_{22}(g)=2$，故局中人1和2的最优灰混合策略及其最优灰博弈值分别如式（11）至式（15）所示。原灰数计算方法与标准灰数计算方法的比较情况，如表1所示。

$$x_1^*(g)=\frac{a_{22}(g)-a_{21}(g)}{(a_{11}(g)-a_{22}(g))-(a_{12}(g)-a_{21}(g))}=\begin{cases}\frac{2}{3}, if, \gamma_{11}=1,\gamma_{12}=0\\ \frac{2}{5}, if, \gamma_{11}=0,\gamma_{12}=1\end{cases},$$

$$\text{即}: x_1^*(g)=\left[\frac{2}{5},\frac{2}{3}\right] \tag{11}$$

$$x_2^*(g)=\frac{a_{11}(g)-a_{12}(g)}{(a_{11}(g)-a_{22}(g))-(a_{12}(g)-a_{21}(g))}=\begin{cases}\frac{1}{3}, if, \gamma_{11}=1,\gamma_{12}=0\\ \frac{3}{5}, if, \gamma_{11}=0,\gamma_{12}=1\end{cases},$$

$$\text{即}: x_2^*(g)=\left[\frac{1}{3},\frac{3}{5}\right] \tag{12}$$

$$y_1^*(g)=\frac{a_{22}(g)-a_{12}(g)}{(a_{11}(g)-a_{22}(g))-(a_{12}(g)-a_{21}(g))}=\begin{cases}0, if, \gamma_{12}=0\\ \frac{1}{4}, if, \gamma_{11}=1,\gamma_{12}=1'\end{cases},$$

$$\text{即}: y_1^*(g)=\left[0,\frac{1}{4}\right] \tag{13}$$

$$y_2^*(g)=\frac{a_{11}(g)-a_{21}(g)}{(a_{11}(g)-a_{22}(g))-(a_{12}(g)-a_{21}(g))}=\begin{cases}1, if, \gamma_{12}=0\\ \frac{4}{5}, if, \gamma_{11}=0,\gamma_{12}=1'\end{cases},$$

$$\text{即}: y_2^*(g)=\left[\frac{4}{5},1\right] \tag{14}$$

$$v_G^*(g)=\frac{a_{11}(g)\cdot a_{22}(g)-a_{12}(g)\cdot a_{21}(g)}{(a_{11}(g)-a_{22}(g))-(a_{12}(g)-a_{21}(g))}=\begin{cases}2, if, \gamma_{12}=0\\ \frac{5}{2}, if, \gamma_{11}=1,\gamma_{12}=1'\end{cases},$$

$$\text{即}: v_G^*(g)=\left[2,\frac{5}{2}\right] \tag{15}$$

表1 两种不同计算方法的结果比较

Table 1 Compare data of two arithmetic

指标	原灰数计算方法		标准灰数计算方法	
	计算结果	灰度	计算结果	灰度
$x_1^*(g)$	[5/2,2/3]	0.5000	[5/2,2/3]	0.5000
$x_2^*(g)$	[1/5,1]	1.330	[1/3,3/5]	0.5700
$y_1^*(g)$	[0,1/3]	2.0000	[0,1/4]	2.0000
$y_2^*(g)$	[3/5,4/3]	0.4889	[5/4,1]	0.2222
$v_G^*(g)$	[6/5,4]	1.0769	[2,5/2]	0.4444

6 结语

笔者定义了标准区间灰数与第一和第二标准区间灰数的概念，设计了普通区间灰数与标准区间灰数之间的转换规则，提供了标准区间灰数之间的比较与运算法则，从而较好地解决了区间灰数之间的大小比较与运算问题，并将这一研究成果应用于基于区间数的GM（1，1）模型预测问题，取得了良好的效果。

参考文献

[1] 刘思峰，郭天榜，党耀国，等．灰色系统理论及其应用［M］．北京：科学出版社，1999

[2] Zhigeng Fang, Sifeng Liu. Grey matrix model based on pure strategy [A]. Limerick, Ireland, Mohamed I Dessouky, Cathal Heavey, eds. Proceedings of the 32nd International Conference on Computers & Industrial Engineering [C]. Gemini International Limited Dublin 15, Ireland, 2003. 520～525

[3] 方志耕，刘思峰．基于纯策略的灰矩阵二人有限零和博弈模型研究［J］，南京航空航天大学学报，2003，35(4)：441～445

[4] 《运筹学》教材编写组．运筹学［M］．北京：清华大学出版社，1990

[5] Daniel Friedman. On economy applications of evolutionary game theory [J]. Evolutionary Economics, Spring-Verlag, 1998, (8): 15～34

[6] Yan-An Hwng. Axiomatizations of the core on the universal domain and other natural domains [J]. International Journal of Game Theory, Int J Game Theory, 2001, 29: 597～623
[7] In-Koo Cho, Hao L I, How complex are networks playing repeated games? [J]. Economic Theory, 1999,(13):93～123
[8] Canals J, Vega-Redondo J. Multi-level evolution population games [J]. International Journal of Game Theory, Spring-Verlag, 1998, (27): 21～35
[9] 潘晓辉, 阵　强. MATLAB 全攻略宝典 [M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2000.
[10] 张维迎. 博弈论与信息经济学 [M], 上海: 上海人民出版社, 2000

Study on Improvement of Token and Arithmetic of Interval Grey Numbers and Its GM(1,1) Model

Fang Zhigeng, Liu Sifeng, Lu Fang, Wan Jun, Liu Bin
(*Nanjing University of Aeronautics and Astronautics*,
School of Economics and Management, *Nanjing*　210016, *China*)

[**Abstract**]　Aimed at the severe problems in tokens and computations of grey numbers, which expanded unnecessarily and distorted the information heavily, this paper defined the standard interval grey number and the first and the second standard grey number, and analyzed their relationship. Furthermore, it designed the transformation rule from general grey number to the standard interval grey number, and developed the operation principle of the standard interval grey number to solve preferably the above problems. Last, the paper established the GM (1,1) model based on the interval grey number and got a good effect.

[**Key words**]　interval grey number; standard interval grey number; token; GM(1,1) model; computation rules