

# 基于 $\mu$ 综合鲁棒控制的四轮转向 车辆操纵稳定性研究

殷国栋, 陈南, 李普

(东南大学机械工程系, 南京 210096)

**[摘要]** 车辆总是承担不同的载荷, 车辆建模亦存在着误差, 传统四轮转向控制器难以达到原有的性能指标; 针对外界干扰, 采用  $\mu$  综合鲁棒控制方法, 构造横摆角速度跟踪综合控制系统设计框架, 选取了不同环节的权函数。仿真结果表明, 四轮转向车辆控制系统具有良好的动态性能、鲁棒稳定性和鲁棒性能, 有效地提高了车辆操纵稳定性和安全性。

**[关键词]** 四轮转向; 鲁棒控制; 操纵稳定性;  $\mu$  综合

**[中图分类号]** U461.6 **[文献标识码]** A **[文章编号]** 1009-1742(2005)04-0054-05

## 1 前言

四轮转向 (four-wheel steering, 4WS) 是提高车辆操纵稳定性和主动安全性的有效控制策略, 已成为目前的研究热点之一。4WS 控制系统的研究大多以经典控制理论为基础<sup>[1]</sup>, 依赖于一个确定性模型。考虑汽车是包含各种不确定因素的非线性、模型不确定性的复杂系统, 车辆在行驶过程中受到很多不确定性因素的影响, 诸如载荷变化、外部干扰、路面不平及刹车/加速时轮胎侧偏特性的变化等, 因而针对此类情况的鲁棒控制设计受到重视。设计车辆鲁棒控制器有可能解决使车辆控制系统性能恶化的不确定性, 常见的有  $H_2/H_\infty$  控制等<sup>[1]</sup>。

常规的  $H_\infty$  控制由于实质是将各类不确定性总体叠加, 导致对鲁棒性而言常常过分保守。而  $\mu$  综合鲁棒控制方法是鲁棒控制分析与综合的一种有效手段。该方法对不同不确定性分别建模, 可同时兼顾系统的稳定鲁棒性和性能鲁棒性, 通过定义结构奇异值作为度量, 采用矩阵不等式方法 (LMI)

确定其上下界, 引入定标矩阵实现上界的迭代逼近<sup>[2]</sup>。此方法大大改善了  $H_\infty$  控制设计的保守性。

本文根据 4WS 车辆控制器设计对稳定鲁棒性和性能鲁棒性的严格要求, 提出横摆角速度跟踪控制算法框架, 根据系统性能的要求选取不同环节的权函数, 采用  $\mu$  综合方法实现 4WS 车辆控制器设计。仿真结果表明, 4WS 控制系统对模型参数的摄动具有良好的动态性能、稳定鲁棒性和性能鲁棒性, 有效地提高了车辆操纵稳定性和安全性。

## 2 车辆四轮转向系统动力学模型

研究四轮转向汽车操纵稳定性可以采用两自由度转向模型, 其简化数学表达式为

$$mv(\dot{\beta} + \gamma) = F_{y1} + F_{y2}, I_z \dot{\gamma} = L_f F_{y1} - L_r F_{y2} \quad (1)$$

$$F_{y1} = K_f \left( \delta_f - \beta - \frac{L_f \gamma}{v} \right), \\ F_{y2} = K_r \left( \delta_r - \beta + \frac{L_r \gamma}{v} \right) \quad (2)$$

式中  $\delta_f$  和  $\delta_r$  为前、后轮转角;  $F_{y1}$  和  $F_{y2}$  为前、后轮

**[收稿日期]** 2004-05-28; **修回日期** 2004-08-06

**[基金项目]** Ford-NSFC 福特-中国研究与发展基金及国家自然科学基金联合资助项目 (50122153), 江苏省“十五”科技攻关资助项目 (BE2003013)

**[作者简介]** 殷国栋 (1976-), 男, 山东济南市人, 东南大学博士生

所受的侧向力,线性轮胎模型是假定汽车转向时前、后轮所受侧向力大小与前后轮侧偏角成线性关系; $m$  为汽车质量; $I_x$  为横摆惯性力矩; $\beta$  为质心点的侧偏角; $\gamma$  为横摆角速度; $v$  为行驶速度; $L_f, L_r$  为质心至前、后轴的距离; $K_f, K_r$  为前、后轮的侧偏刚度。

根据汽车转向响应的横摆角速度  $\gamma$  和车辆质心的侧偏角  $\beta$ , 可得到侧向加速度

$$a_y = \frac{d^2 y}{dt^2} = v \left( \gamma + \frac{d\beta}{dt} \right) \quad (3)$$

式中  $y$  为侧向位移。

由式 (1) 和式 (2) 可得到如下状态方程形式的线性汽车模型:

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{(K_f + K_r)}{mv} & -1 - \frac{(L_f K_f - L_r K_r)}{mv^2} \\ \frac{(-L_f K_f + L_r K_r)}{I_x} & -\frac{(L_f^2 K_f + L_r^2 K_r)}{I_x v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \gamma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{K_f}{mv} & \frac{K_r}{mv} \\ \frac{L_f K_f}{I_x} & -\frac{L_r K_r}{I_x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_f \\ \delta_r \end{bmatrix} \quad (4)$$

考虑到方向盘转角与前轮转角一般都是比例关系, 仿真计算以前轮转角为输入。由于横摆角速度便于测量, 而质心侧偏角难以测量, 控制系统只取横摆角速度作为反馈变量来设计方向盘转角跟踪横摆角速度的  $\mu$  综合鲁棒控制, 如图 1 所示 4WS 车辆闭环控制系统。前、后轮转向角到车辆质心横摆角速度的传递函数为

$$\begin{aligned} G_{fr} &= \frac{b_1 s + b_2}{s^2 + a_1 s + a_2}, \\ G_{rr} &= \frac{b_3 s + b_4}{s^2 + a_1 s + a_2} \end{aligned} \quad (5)$$

其中

$$b_1 = \frac{L_f K_f}{I_x}; b_2 = \frac{K_f K_r (L_f + L_r)}{mv I_x};$$

$$b_3 = -\frac{L_r K_r}{I_x}, b_4 = -b_2;$$

$$a_1 = \frac{L_f^2 K_f + L_r^2 K_r}{I_x v} + \frac{K_f + K_r}{mv};$$

$$a_2 = \frac{K_f K_r (L_f + L_r)^2}{mv^2 I_x} + \frac{L_r K_r - L_f K_f}{I_x}.$$

理想横摆角速度增益定义为  $\gamma_{fr}(s) = \frac{1 + ks}{1 + \tau s} \cdot \frac{b_2}{a_2}, k$  和  $\tau$  为理想增益系数, 经反复试算得到。

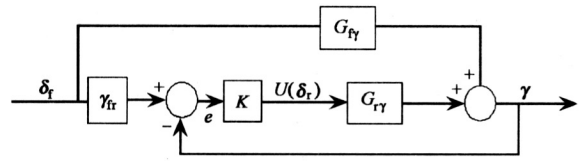


图 1 4WS 车辆闭环控制系统

Fig.1 4WS vehicle closed-loop control system

### 3 $\mu$ 综合鲁棒控制器设计

#### 3.1 $\mu$ 综合鲁棒性能定理<sup>[2]</sup>

用结构奇异值  $\mu$  定量地表征结构化不确定性对线性动态系统稳定性及性能的影响。如图 2 所示, 对于传递函数矩阵  $M$  表示的广义标称系统,  $M \in C^{n \times n}$ , 块对角阵集合  $\Delta(s)$  表示结构化不确定性扰动,  $\omega$  表示外部输入,  $z$  表示外部误差输出,  $\mu$  可定义为

$$\mu_{\Delta}(M) = \begin{cases} (\min_{\Delta \in \underline{\Delta}} \|\bar{\sigma}(\Delta)\| : \Delta \in \underline{\Delta}, \det(I - M\Delta) = 0) \text{ }^{-1} \\ 0; \text{ 如果 } \det(I - M\Delta) \neq 0, \forall \Delta \in \underline{\Delta} \end{cases}$$

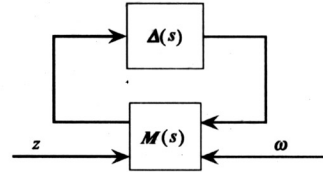


图 2 鲁棒性能分析的  $M - \Delta$  结构

Fig.2 System performance analysis

Dolye 等通过引入一个假想不确定性  $\Delta_p, \Delta$  是实际扰动, 定义:

$$\Delta_q := \left\{ \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta_p \end{bmatrix} \mid \Delta \in C_{q_1 \times p_1}, \Delta_p \in C_{q_2 \times p_2} \right\},$$

$M(s)$  有  $q_1 + q_2$  个输入和  $p_1 + p_2$  个输出,  $M(s)$  是  $P(s)$  和  $K(s)$  的线性分式变换 (LFT),

$$M(s) = F_1(P(s), K(s)) = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \quad (6)$$

为无模型扰动情况下的系统闭环阵。

如图 3 所示闭环系统对所有扰动  $\Delta$  稳定的充要条件为  $\mu_{\Delta}(M) < 1, \forall \omega, \omega$  表示频率域。

如图 2, 图 3 所示的鲁棒性能分析的  $M - \Delta$  结构框图, 鲁棒性能定理可描述为

$$\begin{cases} \mu_1(M_{11}) < 1 \\ \max_{\Delta \in \underline{\Delta}} \mu_2(F_u(M, \Delta)) < 1 \end{cases}$$

基于鲁棒性能的 4WS 车辆广义控制逻辑框图如图 4 所示。

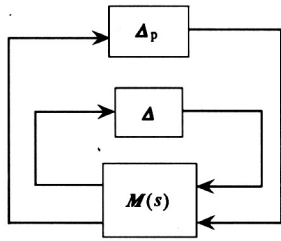


图 3 鲁棒稳定性要求鲁棒性能的  $M - \Delta$  结构  
Fig.3 Stability structure for robust performance

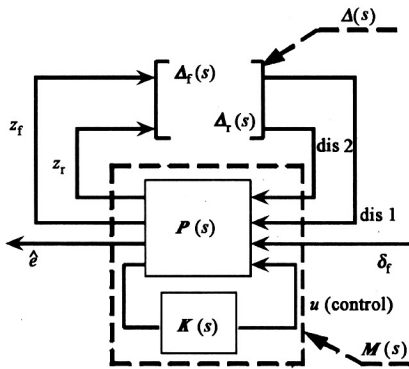


图 4 4WS 车辆广义系统框图  
Fig.4 Vehicle generalized system

### 3.2 $\mu$ 综合鲁棒控制器设计

$P(s)$  为广义 4WS 车辆系统,  $K(s)$  为  $\mu$  综合反馈控制传递矩阵,  $\gamma$  为传感器输出的横摆角速度,  $u$  为控制输出的控制量; dis1, dis2 和  $z_f, z_r$  为前后轮车辆系统不确定性模块的输入及输出; 以及实际系统中不确定性的环节  $\Delta_f$  和  $W_{11}, \Delta_r$  和  $W_{12}$ , 建模中所有不确定性都归入归一化  $\Delta_f, \Delta_r$ , 它描述了标称模型  $P(s)$  和实际系统模型  $M(s)$  之间的差别。另外  $\Delta_f, \Delta_r$  是稳定的且仅知道有范数边界条件  $\|\Delta_f\|_\infty < 1, \|\Delta_r\|_\infty < 1$  及其结构。  $W_{11}, W_{12}$  为模型不确定性频率加权函数,  $W_2$  为系统性能加权函数反映在指定频率范围内系统所要求达到的性能权重。  $\delta_f$  为前轮转角输入,  $\hat{e}$  为四轮转向车辆系统跟踪横摆角速度的控制误差信号输出。对式(6)表达的四轮转向闭环控制系统用 LFT 形式描述:  $\{F_u(P, \Delta): \Delta \in \underline{\Delta}, \|\Delta\|_\infty < 1\}$ 。四轮转向车辆  $\mu$  综合控制闭环系统如图 5 所示。

$\mu$  综合算法是在所有稳定的控制器  $K$  中最小化闭环系统的  $F_1(P(s), K(s))$  的  $\mu_{\bar{\Delta}}(\cdot)$  峰值。即

$\min_{K \text{ 稳定}} \max_{\omega} \mu_{\bar{\Delta}}[F_1(P, K)(j\omega)]$ , 引入尺度变换矩阵  $D(s), D(s)$  为稳定可逆的最小相位矩阵,  $D_\omega$  是尺度矩阵集合中的元素, 且在每个  $\omega$  处相互独立, 上式可写成  $\min_{K \text{ 稳定}} \min_{D_\omega \in \underline{D}} \| [D_\omega F_1(P, K)(j\omega) D_\omega^{-1}] \|_\infty$ 。

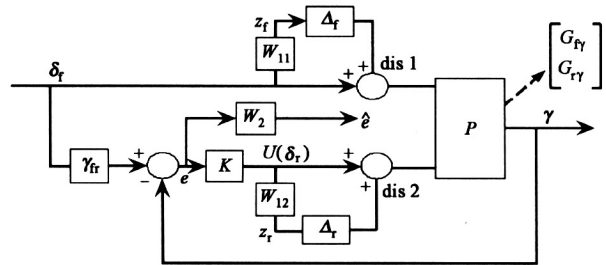


图 5 4WS 车辆  $\mu$  综合控制闭环系统  
Fig.5 4WS vehicle closed-loop control system based on  $\mu$  synthesis

对稳定的车辆系统摄动  $\Delta_f, \Delta_r$ , 且  $\|\Delta_f\|_\infty < 1, \|\Delta_r\|_\infty < 1$ , 找寻一个稳定的控制器  $K(s)$ , 使得闭环车辆系统在摄动情况下仍能保持稳定, 方向盘转角跟踪横摆角速度的瞬态响应, 加权灵敏度传递函数矩阵

$$S(\Delta) = W_2(\gamma_{fr} - (W_{11}\Delta_f + I)G_{f\gamma}) \cdot ((W_{12}\Delta_r + I)KG_{r\gamma} + I)^{-1}$$

有  $\|S(\Delta)\|_\infty < 1$  成立。

4WS 车辆系统  $\mu$  控制器可描述为

$$\dot{x}_\mu = A_\mu x_\mu + B_\mu u, y_\mu = C_\mu x_\mu + D_\mu u \quad (7)$$

$\mu$  控制器  $K(s)$  的设计采用  $D - K$  迭代法, 在  $D - K$  迭代中, 设计  $\mu$  综合鲁棒控制器转化为寻求稳定的控制阵  $K(s)$  和尺度矩阵  $D(s)$ , 首先保持  $D(s)$  不变, 则上式实际上是  $H_\infty$  优化控制问题, 通过求解 Riccati 方程得到; 保持  $K(s)$  不变, 即在已知一稳定的控制器  $K(s)$  前提下, 对  $D(s)$  进行凸优化。

### 4 四轮转向车辆控制系统仿真

定义:  $G_{f0} = G_{f\gamma}(v_0), G_{r0} = G_{r\gamma}(v_0)$ , 车辆系统仿真参数如表 1 所示。

表 1 四轮转向车辆参数

Table 1 4WS vehicle data

$m$	$L_f$	$L_r$	$K_f/$	$K_r/$	$v/$	$I_z/$
/kg	/m	/m	$N \cdot \text{rad}^{-1}$	$N \cdot \text{rad}^{-1}$	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$
1 740	1.12	1.52	37 500	75 000	35	2 045

基于多变量不确定性的四轮转向车辆系统模

型, 定义<sup>[3]</sup>

$$G_f = (1 + \Delta_f W_{11})G_{f0}, G_r = (1 + \Delta_r W_{12})G_{r0} \quad (8)$$

对于车辆扰动  $\Delta_f, \Delta_r$ , 考虑  $\|\Delta_f\|_\infty < 1, \|\Delta_r\|_\infty < 1$ , 把式 (8) 改写为

$$\begin{cases} \left| \frac{G_f(v) - G_{f0}}{G_{f0}} \right| \leq \|W_{11}(j\omega)\|; \\ \left| \frac{G_r(v) - G_{r0}}{G_{r0}} \right| \leq \|W_{12}(j\omega)\| \end{cases} \quad (9)$$

式 (9) 也可表达成另外一种形式:

$$\begin{cases} \|W_{11}(j\omega)\| \geq \left\{ \max_{v \in V} \left\| \frac{G_f(v) - G_{f0}}{G_{f0}} \right\| \right\}, \\ \|W_{12}(j\omega)\| \geq \left\{ \max_{v \in V} \left\| \frac{G_r(v) - G_{r0}}{G_{r0}} \right\| \right\} \end{cases} \quad (10)$$

$V \in [0, 50]$

根据式 (10) 及 4WS 车辆系统要求横摆角速度跟踪与尽量控制质心侧偏角为零的控制目标,  $W_1, W_2$  经过不断的试算, 现取模型不确定性加权函数  $W_1 = \text{diag}[W_{11}, W_{12}]$ ,  $G_{fy}, G_{ry}$  对应的加权函数  $W_{11} = W_{12} = \frac{0.06(s+1)}{s/200+1}$ ; 加权函数矩阵  $W_1$  取对角, 且对角元素  $W_{11}, W_{12}$  相等, 说明车辆系统不确定性描述在某种意义上关于标称模型  $P$  是“球形”的。加权函数表明在低频处存在 6% 的建模误差, 在高频处模型不确定性高达 100%, 在更高频处不确定性比重会更大。

系统的跟踪误差  $e$  要求:  $\|e\|_\infty < 1/\|W_2\|_\infty$ , 性能加权函数取  $W_2 = \frac{0.4(s+3)}{s+0.03}$ , 其稳态跟踪误差  $< 0.03/1.2 = 2.5\%$ 。

模型不确定性加权函数  $W_{11}, W_{12}$  为乘法扰动, 如图 5 所示在 simulink 中建模, 方向盘转角输入为单位角阶跃输入, 现假设前轮转角为  $4^\circ$ 。考虑实际车辆系统乘法扰动外扰以白噪声为理论近似, 假设白噪声功率谱密度图 (PSD) 的高度为  $0.02 \text{ rad/s}$ , 采样时间为  $0.01 \text{ s}$ 。

基于以上加权函数, 通过三次  $D-K$  迭代得到 20 阶控制器, 由于阶次过高, 应用 MATLAB/simulink 控制工具箱<sup>[4]</sup>, 基于截断的均衡模型降阶, 控制器降为 4 阶, 经分析系统仍能维持原有的鲁棒性。鲁棒性能的满足只有在每一个频率点处闭环系统频率响应  $\mu_\Delta < 1$  才行,  $\mu$  分析法在  $\omega$  的大部分频段上改善了  $\bar{\sigma}(\cdot)$  的值, 但在峰值处没有改变, 通过下一步的迭代来降低  $\mu$  的峰值。这里用三阶

的多项式拟合尺度矩阵  $D(s)$ , 经过三次迭代就可以得到一个性能较好的  $K_\mu$  控制器, 闭环系统的鲁棒性不断改善, 直至  $\mu < 1$ 。从表 2 中可以看出  $\mu$  的峰值最终是 0.456, 这说明用  $K_\mu$  控制器的闭环系统达到了鲁棒性能的要求。

表 2  $D-K$  迭代结果

Table 2 Summary of  $D-K$  Iteration

迭代	控制器阶数	尺度矩阵 $D$ 阶数	$\gamma$ 值	$\mu$ 峰值
1	8	0	12.688	0.525
2	20	12	0.491	0.475
3	20	12	0.457	0.456

图 6 为横摆角速度操纵稳定性响应, 可以看出, 给方向盘一个角阶跃输入, 前轮转角为  $4^\circ$  的工况下, 4WS 横摆角速度峰值为  $0.06 \text{ rad/s}$ ; 在时间  $1 \text{ s}$  时基本稳定; 控制器设计的目标即为横摆角速度跟踪控制。在白噪声的外扰下, 横摆角速度基本上跟踪方向盘的转角, 稳定时间也比较快, 说明  $\gamma$  的  $K_\mu$  控制器对系统的鲁棒性能有改善。图 7 为质心侧偏角响应曲线, 如图 4 所示, 系统反馈量为  $\gamma$ , 设计的是理想横摆角速度增益, 但 4WS 车辆质心侧偏角只是在较短时间内有小的波动, 最大峰值不到  $0.008 \text{ rad}$ , 基本保持为零, 说明设计的 4WS  $\mu$  控制器  $K_\mu$  对运动姿态也得到较好的控制。图 8 为侧向加速度响应曲线, 汽车侧向加速度在常速下的最大幅度一般不高于  $3 \sim 4 \text{ m/s}^2$ , 4WS 由于后轮转向的加入, 使侧向加速度的过渡过程变得复杂; 侧向加速度阶跃响应的最大幅值升高, 性能指标值的变化规律变得也较为复杂, 设计的控制器使得侧向加速度  $a_y$  最大幅值为  $3.4 \text{ m/s}^2$ , 说明控制器很好地控制了侧向加速度性能, 响应曲线也充分

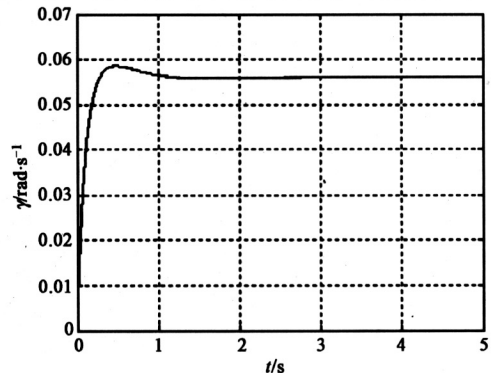


图 6 横摆角速度响应曲线

Fig.6 Yaw rate response

证明侧向加速度反应时间迅速, 转向运动平稳, 在扰动工况下车辆仍能保持良好的动态性能。

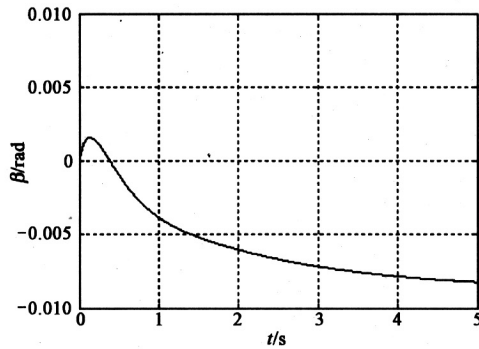


图7 质心侧偏角阶跃响应曲线

Fig.7 Slip angle response

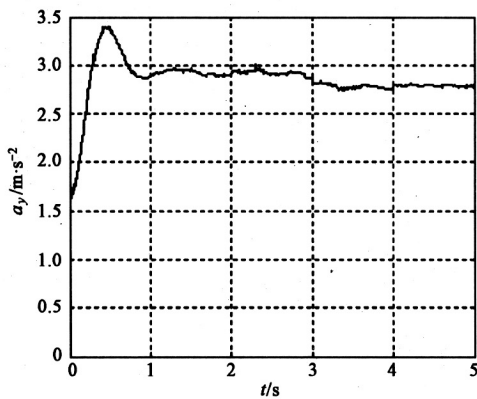


图8 侧向加速度响应曲线

Fig.8 Lateral acceleration response

仿真结果证明, 通过  $\mu$  综合鲁棒控制设计, 不仅可以使 4WS 车辆系统具有良好的操纵稳定性和鲁棒性, 而且对外界干扰具有较好的抑制性能。

## 5 结语

笔者应用  $\mu$  综合鲁棒控制设计方法, 以模型不确定性的四轮转向车辆为对象, 基于横摆角速度跟踪理论对 4WS 车辆控制系统进行分析, 同时考虑了系统鲁棒稳定性、鲁棒性能及系统的动态性能。结果表明, 系统具有良好的跟踪性能, 对外扰有很强的抑制作用, 改善了以往控制器设计的保守性及车辆转向响应性能, 有效地提高了车辆操纵稳定性和安全性。

### 参考文献

- [1] You S S, Chai Y H. Multi-objective control synthesis: an application to 4WS passenger vehicles [J]. *Mechatronics*, 1999, 9 (9): 363~390
- [2] Packard A, Doyel J. The complex structured singular value [J]. *Automatica*, 1993, 29: 71~109
- [3] Gao Xiaoming, McVey B D, Tokar R L. Robust controller design of four wheel steering systems using  $\mu$  synthesis techniques [J]. *Proceeding of the 34th IEEE Conference on Decision & Control*, 1995, 1 (1): 875~882
- [4] Balas G J, Doyle J C, Glover K, et al.  $\mu$ -Analysis and Synthesis Toolbox User's Guide [M]. The Math Works, 2001

## Handling Stability for Four-wheel Steering Vehicle Based on $\mu$ Synthesis Robust Control

Yin Guodong, Chen Nan, Li Pu

(Department of Mechanical Engineering, Southeast University,  
Nanjing 210096, China)

**[Abstract]** The vehicles always undertake different loadings including external disturbances and the design of vehicle control system has model errors. The primary design techniques for 4WS controller are their inability to degrade the performance of closed-loop systems. The design of yaw rate tracking control system architecture by using  $\mu$  synthesis robust control is presented and the weighting functions are selected. The results show that the control system has fine dynamic characteristic, robust stability and robust performance, and the 4WS vehicle with the proposed control strategy can provide greater maneuverability and driving safety.

**[Key words]** four-wheel steering; robust control; handling stability;  $\mu$  synthesis