

基于 Lagrange 方程建模的单级旋转倒立摆控制

吴爱国, 张小明, 张 钊

(天津大学电气与自动化工程学院, 天津 300072)

[摘要] 介绍一种新型单级旋转倒立摆系统的构成, 通过对其动力学特性的分析建立了基于 Lagrange 方程的数学模型。在平衡点附近给出系统的线性化模型, 对系统的稳定性、能控性和能观性进行了分析。利用线性二次型最优控制策略 LQR 方法设计了控制器, 并在仿真实验和实物实验中实现了倒立摆的平衡控制。实验表明, 系统稳定性好、鲁棒性较强。

[关键词] 旋转倒立摆; Lagrange 方程; 最优控制策略 LQR

[中图分类号] TP13 **[文献标识码]** A **[文章编号]** 1009-1742 (2005) 10-0011-05

1 引言

倒立摆 (IP, inverted pendulum) 是一个复杂的快速、非线性、多变量、强耦合、自然不稳定的非最小相位系统, 是重心在上、支点在下控制问题的抽象。目前在对倒立摆问题的研究中, 以小车式倒立摆为控制对象的文章很多^[1~3]。但是, 小车式倒立摆在机械系统上需要有很长的导轨, 这占用了较大的空间。另外, 由于小车式倒立摆有着繁多的传动机构, 在实验过程中经常因为机械系统的误差和故障影响控制效果, 从而干扰对控制算法本身性能的有效判断。

旋转式倒立摆与小车式倒立摆不同, 由于将小车的平动控制改为旋臂的旋转控制, 在硬件结构上减少了中间传动机构, 相对于小车式倒立摆具有更大的非线性、不稳定性和复杂性, 对控制算法提出了更高的要求。

笔者研究的是一种新型的旋转倒立摆装置, 设计了基于 Lagrange 方程建模的单级旋转倒立摆控制系统, 控制效果良好。

2 旋转倒立摆的控制系统结构

笔者使用的单级旋转倒立摆控制系统结构如图 1 所示。系统包括 PC 机、数据采集卡 MultiQ PCI/MQ3、功率放大器 UPM 2405、直流伺服电动机 SRV02、单级旋转倒立摆和光电角度传感器等几部分, 组成了一个单级旋转倒立摆闭环控制系统。

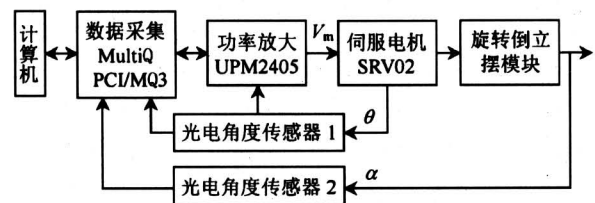


图 1 单级旋转倒立摆控制系统结构

Fig.1 The structure of single link rotary inverted pendulum control system

其中, 控制器输入为旋臂相对零位的转角 θ 和摆杆相对零位的转角 α ; 控制器输出为直流伺服电机的电枢电压 V_m 。因此, 该系统是一个双输入

[收稿日期] 2004-09-11; 修回日期: 2004-11-29

[基金项目] “九七三” 国家安全重大基础研究资助项目 (51314-04004); 国家自然科学基金资助项目 (69901005)

[作者简介] 吴爱国 (1954-), 男, 天津市人, 天津大学教授, 博导, 主要研究方向为电力传动系统的控制策略及智能大厦的控制

单输出闭环控制系统。

作为系统的控制对象，单级旋转倒立摆由连接在直流伺服电机转轴上的水平旋臂和可自由摆动的摆杆组成，旋臂和摆杆之间以铰链相连接。倒立摆系统具有2个自由度，旋臂为定轴转动，摆杆为空间一般运动。

由于受到铰链的作用，倒立摆杆只能沿圆周的切线方向摆动。此时，铰链上和直流电机转轴上的角位移传感器将检测到的角位移量，经过数据采集卡的A/D转换送入控制计算机。由计算机通过特定的控制算法给出控制电压信号，再经过数据采集卡的D/A转换以及功率放大器放大后加载于直流伺服电机，驱动旋臂在水平面内转动，从而使摆杆保持倒立平衡姿态。

3 系统数学模型的建立

对旋转倒立摆系统建立数学模型是实现倒立摆控制的基础，下面对实验采用的单级旋转倒立摆系统的数学模型进行分析。如图2所示，在忽略各种阻力和摩擦的条件下，旋臂和摆杆可以抽象为的2个匀质杆，其中旋臂长度为 r ，相对其水平方向零位的角位移为 θ ；摆杆质心与铰链距离为 L ，相对其竖直方向零位的角位移为 α 。

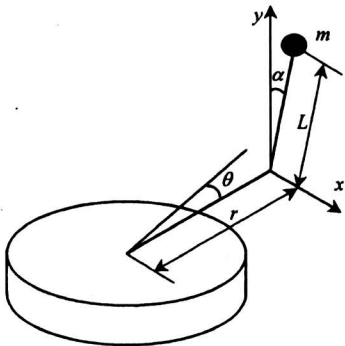


图2 系统模型分析

Fig.2 Analysis of the system model

由动力学理论，摆杆质心在 x 方向和 y 方向的速度分量为^[4]：

$$\begin{aligned} V_x &= r\dot{\theta} - L\cos\alpha(\dot{\alpha}), \\ V_y &= -L\sin\alpha(\dot{\alpha}) \end{aligned} \quad (1)$$

方程组式(1)给出了完整的摆杆速度描述，应用Lagrange方程可推导出系统的动态方程。

以旋臂所在水平面为零势能面，则系统的势能为摆杆的重力势能： $V = mgL\cos\alpha$ 。系统的动能由

4部分构成，包括：旋臂在水平面内的转动，摆杆在竖直平面内的转动，摆杆质心沿 x 轴方向的速度、沿 y 轴方向的速度。对应的动能分量分别用 T_1, T_2, T_3, T_4 表示，因此系统动能 T 为四者之和，即 $T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$ ，其中 $T_1 = J_1\dot{\theta}^2/2$ ， $T_2 = J_2\dot{\alpha}^2/2$ ， $T_3 = m(r\dot{\theta} - L\cos\alpha(\dot{\alpha}))^2/2$ ， $T_4 = m(-L\sin\alpha(\dot{\alpha}))^2/2$ 。所以系统动能为

$$T = J_1\dot{\theta}^2/2 + J_2\dot{\alpha}^2/2 + m(r\dot{\theta} - L\cos\alpha(\dot{\alpha}))^2/2 + m(-L\sin\alpha(\dot{\alpha}))^2/2 \quad (2)$$

设 R 为摆杆长度，由于 L 为 R 的一半，即 $R = 2L$ 。因此，摆杆对质心的转动惯量为 $J_2 = mR^2/12 = mL^2/3$ 。将 J_2 代入式(2)，可推导出Lagrange函数

$$L = T - V = J_1\dot{\theta}^2/2 + 2mL^2\dot{\alpha}^2/3 - mLr\cos\alpha(\dot{\theta}) + mr^2\dot{\theta}^2/2 - mgL\cos\alpha。$$

应用Lagrange方程 $L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q)$ ，其中 L 为拉格朗日算子， q 为系统的广义坐标， T 为系统的动能， V 为系统的势能。Lagrange方程由广义坐标 q_i 和 L 表示为

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = f_i。$$

在系统中， $i = 1, 2$ ， $q = \{\theta, \alpha\}$ ， f_i 为系统沿该广义坐标方向上的外力，可得方程组

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= T_{\text{output}} - B_{\text{eq}}\dot{\theta}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \alpha} &= 0, \end{aligned}$$

其中 T_{output} 为直流伺服电机的输出转矩，

$$T_{\text{output}} = \eta_m \eta_g K_t K_g (V_m - K_g K_m \theta) / R_m$$

在平衡点 $(\theta \dot{\theta} \alpha \dot{\alpha})^T = (0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ 附近，假设 θ 和 α 同 1 rad 相比很小，即 $\theta \ll 1$ ， $\alpha \ll 1$ ，则方程组可局部线性化为

$$\begin{aligned} (J_1 + mr^2)\dot{\theta} - mLr\ddot{\alpha} &= T_{\text{output}} - B_{\text{eq}}\dot{\theta}, \\ 4mL^2\ddot{\alpha}/3 - mLr\dot{\theta} - mgL\alpha &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

由方程组式(3)，代入上述相关参数，可以写出单级旋转倒立摆系统的线性化状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{\alpha} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-4G}{4J_1 + mr^2} & \frac{3rg}{4J_1 + mr^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-3rG}{(4J_1 + mr^2)L} & \frac{3(J_1 + mr^2)}{(4J_1 + mr^2)L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ \alpha \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{4\eta_m\eta_gK_tK_g}{(4J_1+mr^2)R_m} \\ 0 \\ \frac{3r\eta_m\eta_gK_tK_g}{(4J_1+mr^2)LR_m} \end{bmatrix} V_m \quad (4)$$

其中 $G = (\eta_m\eta_gK_tK_mK_g^2 + B_{eq}R_m)/R_m$

将系统各机械参数值代入式 (4)，得单级旋转倒立摆系统的线性化数学模型如下

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -14.52 & 39.32 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -13.98 & 81.78 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ \alpha \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 25.54 \\ 0 \\ 24.59 \end{bmatrix} V_m \quad (5a)$$

$$y = [1 \ 0 \ 1 \ 0][\theta \ \dot{\theta} \ \alpha \ \dot{\alpha}]^T \quad (5b)$$

上述推导过程中各参数的物理意义和数值单位如表 1 所示。

表 1 系统物理参数表

Table 1 The parameters of the system

符号	物理意义	数值及单位
L	摆杆质心到转轴距离/m	0.165
M	摆杆质量/kg	0.105
R	旋臂长度/m	0.175
J_1	旋臂的转动惯量/kg·m ²	2.0×10^{-3}
J_2	摆杆对质心转动惯量/kg·m ²	9.53×10^{-4}
g	重力加速度/m·s ⁻²	9.8
V_x	摆杆质心 x 方向速度/m·s ⁻¹	
V_y	摆杆质心 y 方向速度/m·s ⁻¹	
θ	旋臂角位移/rad	
$\dot{\theta}$	旋臂角速度/rad·s ⁻¹	
α	摆杆角位移/rad	
$\dot{\alpha}$	摆杆角速度/rad·s ⁻¹	
K_t	电动力矩系数/N·m·A ⁻¹	7.767×10^{-3}
K_m	反向电势系数/V·s·rad ⁻¹	7.767×10^{-3}
K_g	变速器齿轮比	5:1
R_m	直流电机电枢电阻/ Ω	2.6
V_m	直流电机电枢电压/V	
η_m	直流电机效率/%	69
η_g	变速器效率/%	90
B_{eq}	粘性阻尼系数/N·ms·rad ⁻¹	4.0×10^{-3}

由线性化数学模型得系统的特征值为 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -17.1209$, $\lambda_3 = 7.5407$, $\lambda_4 = -4.9398$ 。可见, $\lambda_3 = 7.5407$ 位于复平面的右半平面, 系统在平衡点附近不稳定。因此, 单级旋转倒立摆为开环不稳定系统, 需要设计控制器来镇定系统。同样可以计算出系统的能控性、能观性矩阵的秩均为 4, 因而系统能控、能观。下面的控制方案就是在上述

状态空间线性模型的基础上进行的。

4 旋转倒立摆的稳定控制

4.1 倒立摆系统的控制目标

在倒立摆系统中, 摆杆的位置有竖直向上和竖直向下两种平衡状态。二者的区别是竖直向下的状态(图 3 中 B 点)是稳定的平衡点, 而竖直向上的状态(图 3 中 A 点)是不稳定的平衡点。在不施加控制作用的情况下, 只要施加微小的扰动就会使系统偏离平衡点 A 而振荡发散。在振荡过程中, 由于存在空气阻力和机械摩擦力, 系统将耗散能量, 因此摆杆最终将回复到稳定的平衡点 B。倒立摆平衡状态的分析如图 3 所示。

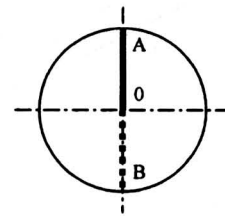


图 3 倒立摆平衡状态分析

Fig.3 Analysis of the balance position

倒立摆的控制目标就是使倒立摆在不稳定的平衡点附近的运动成为一个稳定的运动。控制夹角 α , θ 在各自的零点附近变化, 而整个摆处于一种动态平衡, 要使摆静止在平衡位置是不可能的, 只能是在平衡位置处的振荡^[5]。

4.2 最优控制策略 LQR 控制器设计

根据现代控制理论, 设最优控制量为 $U = -KX$, 使得系统二次型性能指标

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (X^T Q X + U^T R U) dt$$

取最小。

利用 Matlab 提供的 $lqr()$ 函数可以方便地算出控制矩阵 K , 选择合适的加权矩阵 Q 和 R , 取 $Q = [2.3 \ 45 \ 0 \ 0]$, $R = 1$, 矩阵 Q 和 R 用来平衡系统对输入量和输出量的敏感程度。

计算得出, 最优状态反馈增益矩阵为 $K = [-1.5166 \ -14.8245 \ -1.6098 \ -1.5470]$ 。系统的闭环极点为 -37.8150 , -19.7852 , $-2.6226 + 1.2008i$, $-2.6226 + 1.2008i$ 。可以看到, 系统 4 个极点均处于复平面的左半平面, 因此, 系统是镇定的^[6]。

4.3 仿真及实控实验结果

鉴于旋转式倒立摆的自然不稳定性，以及出于对实验设备的保护，不应直接在实验设备上进行调试。首先在 Matlab 的 Simulink 环境下进行仿真，建立仿真模型（如图 4）。

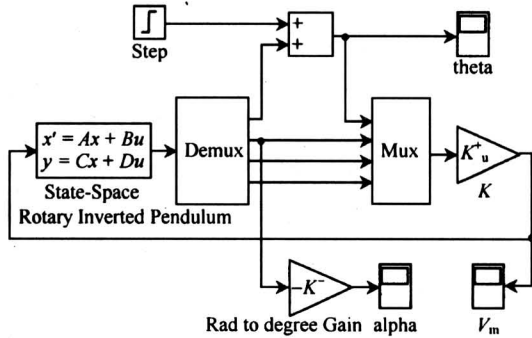


图 4 仿真系统结构图

Fig.4 The simulation system structure

系统仿真的阶跃响应曲线如图 5 所示，图 5 中 3 条响应曲线，从上至下依次为：摆杆角位移 α 、旋臂角位移 θ 和电枢电压 V_m 。在旋臂角位移 θ 的变化率为 1 rad/min 的阶跃输入下，摆杆偏角 α 的最大超调量不超过 $\pm 6^\circ$ ，并在 2 s 内达到稳定。

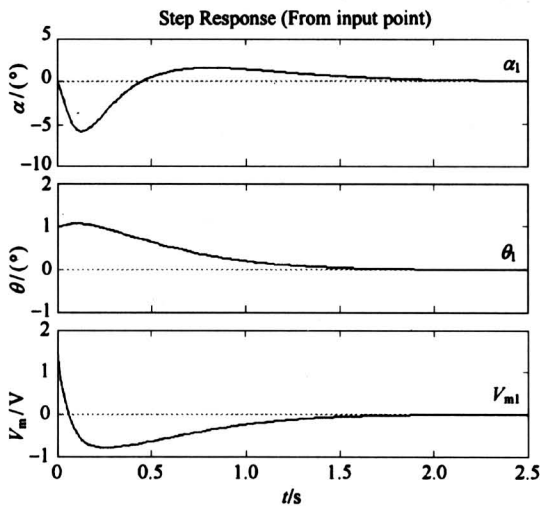


图 5 系统仿真曲线

Fig.5 The system simulation curves

再对实际的旋转倒立摆系统进行实控，主要考察倒立摆杆偏转角度 α 的控制曲线，得到实验曲线如图 6 所示。

由图 6 中可以看出，控制器开始工作后，在控制器 LQR 的调节下，倒立摆能够很好的稳定，

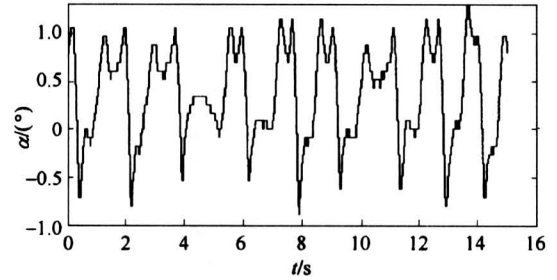


图 6 摆杆角度变化曲线

Fig.6 Tracking curves of the pole angle

摆杆角度变化幅度不超过 $\pm 1.5^\circ$ 。且在其摆动过程中可以接受在 $\pm 10^\circ$ 的扰动力矩范围内保证倒立摆稳定振动，控制系统的鲁棒性良好。

在此基础上，进一步检验控制系统的鲁棒性。在负责建立系统状态空间的 Matlab 程序中，将摆杆质量参数增大 1 倍，即由原来的 0.105 kg 变为 0.210 kg。这样，系统状态空间中摆杆质量 m 与实际所用摆杆的质量 0.105 kg 已经不相符。利用重新计算的状态反馈增益矩阵 K ，得到参数失配后的摆杆角度变化曲线，如图 7 所示。

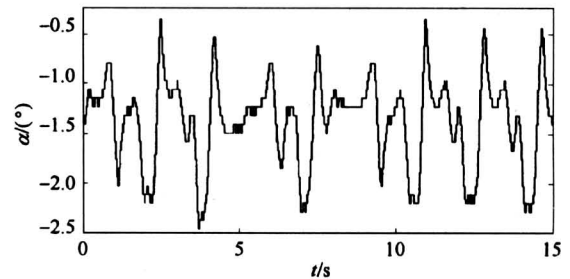


图 7 参数失配后的角度变化曲线

Fig.7 Tracking curves of the pole angle on the condition of parameter matching error

实验结果显示，摆杆仍能保持稳定的倒立平衡姿态。这说明虽然状态空间和状态反馈增益矩阵已经改变，但控制器对系统参数的变化不敏感，具有一定的自适应能力，且鲁棒性较强。

从系统实控曲线图 7 中还可以看出：在对实际系统的控制中，系统的平衡点并非处于零点。造成此现象的主要原因是，在倒立摆启动的瞬间，摆杆并非处于严格的竖直向上位置，而是与竖直方向之间存在微小的倾角。控制器能够根据除摆杆偏转角 α 以外的其他 3 个状态变量的变化进行修正并找到准确的平衡点。

5 结论

以单级旋转倒立摆为控制对象, 应用线性系统最优控制理论设计了 LQR 控制器, 由仿真及实控实验结果可以看出, 控制方法原理简单, 实现容易, 表现出较好的控制性能, 并在实际系统中实现了旋转倒立摆的稳定控制。

参考文献

- [1] Shiriaev A S, Friesel A, Perram J, Pogromsky A. On stabilization of rotational modes of an inverted pendulum [A]. Proc of the 39th IEEE Conference on Decision and Control [C]. NSW Australia Sydney, 2000, 12(5): 5047~5052
- [2] Mrad F, El-Hassan N, Mahmoud S E H, Alawieh B, Adlouni F. Real-time control of free-standing cart-mounted inverted pendulum using LabVIEW RT [A]. Conference Record of the 2000 IEEE Industry Applications Conference [C]. Italy Rome, 2000, 10(2): 1291~1298
- [3] Park J I, Lee S G. Synthesis of control inputs for simultaneous control of angle and position of inverted pendulum [A]. Proc of 1996 4th International Workshop on Advanced Motion Control [C]. Japan: Mie, 1996, 3(2): 619~624
- [4] Rotary Inverted Pendulum User Guides & Laboratories [M]. Quanser Inc, 2003
- [5] 张培仁, 都改欣, 卿志远, 梁家恩. 用 DSP 及脉宽调制驱动芯片 A3952 控制倒立摆 [J]. 电子技术, 2002, 1: 57
- [6] Du Gaixin, Huang Nanchen, Wu Gang. The rotational inverted-pendulum based on DSP controller [A]. Proc of the 4th World Congress on Intelligent Control and Automation [C]. China Shanghai, 2002, 7(4): 3101~3105

A Control System Based on the Lagrange Modeling Method for a Single Link Rotary Inverted Pendulum

Wu Aiguo, Zhang Xiaoming, Zhang Zhao

(School of Electrical Engineering & Automation, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

[Abstract] In this paper the design and realization of the rotary inverted pendulum (RIP) control system is presented. After analyzing its dynamic characteristics, the system model based on Lagrange method is devised. In addition, linear quadratic regulator (LQR) is designed and implemented on the RIP system by successfully balancing the pendulum in the inverted position. Simulation and experimental results are presented to show the stable and robust responses of the control system.

[Key words] rotary inverted pendulum; Lagrange method; LQR control strategy