

广义塑性力学及其运用

郑颖人¹, 孔亮²

(1. 中国人民解放军后勤工程学院, 重庆 400041; 2. 宁夏大学固体力学研究所, 银川 750021)

[摘要] 分析了经典塑性力学用于岩土类材料的问题, 它采用了3个不符合岩土材料变形机制的假设。从固体力学原理直接导出广义塑性位势理论, 将经典塑性力学改造为更一般的塑性力学——广义塑性力学。广义塑性力学采用了塑性力学中的分量理论, 能反映应力路径转折的影响, 并避免了采用正交流动法则所引起的过大剪胀等不合理现象, 也不会产生当前非关联流动法则中任意假定塑性势面引起的误差。给出了广义塑性力学的屈服面理论、硬化定律和应力-应变关系, 并建立了考虑应力主轴旋转的广义塑性位势理论。屈服条件是状态参数, 也是试验参数, 只能由试验给出。应用表明, 广义塑性力学可作为岩土材料的建模理论, 还可应用于诸如极限分析等土力学的诸多领域, 具有广阔的应用前景。

[关键词] 岩土塑性力学; 广义塑性力学; 塑性势; 屈服面; 本构模型

[中图分类号] TU41 **[文献标识码]** A **[文章编号]** 1009-1742(2005)11-0021-16

1 前言

多数岩土工程都处于弹塑性状态, 因而岩土塑性在岩土工程的设计中至关重要。早在1773年Coulomb提出了土体破坏条件, 其后推广为Mohr-Coulomb条件。1857年Rankine研究了半无限体的极限平衡, 提出了滑移面概念。1903年Kotter建立了滑移线方法。Fellenius(1929)提出了极限平衡法。以后Terzaghi、Sokolovskii又将其发展形成了较完善的岩土滑移线场方法与极限平衡法。1975年, W. F. Chen在极限分析法的基础上又发展了土的极限分析法, 尤其是上限法。不过上述方法都是在采用正交流动法则的基础上进行的。滑移线法与极限分析法只研究力的平衡, 未涉及土体的变形与位移。20世纪50年代开始, 人们致力于岩土本构模型的研究, 力求获得岩土塑性的应力-应变关系, 再结合平衡方程与连续方程, 从而求解岩土塑性问题。70年代发现, 用一个塑性势面和屈服面

很难使计算结果与实际吻合; 采用正交流动法则不符合岩土实际情况, 还会产生过大的体胀。由此, 双屈服面与多重屈服面模型^[1~4]、非正交流动法则在岩土本构模型中应运而生。

真正的土力学必须建立在符合土本身特性的本构模型的基础上, 而本构模型的建立必须有符合岩土材料变形机制的建模理论。岩土塑性力学是一门新兴学科, 也是建立岩土本构模型的基础。

2 经典塑性力学用于岩土材料问题

2.1 岩土类材料的特点

岩土类材料是由颗粒材料堆积或胶结而成, 属于摩擦型材料。摩擦材料的特点是抗剪强度中含有摩擦力项, 它的抗剪强度随压应力的增大而增大, 因而岩土材料的屈服条件与金属材料明显不同, 称此为岩土的压硬性, 即随压应力的增大岩土的抗剪强度与刚度增大。

岩土为多相材料, 岩土颗粒间有孔隙, 在各向

[收稿日期] 2005-04-13; **修回日期** 2005-06-13

[基金项目] 国家自然科学基金资助项目(10402014)

[作者简介] 郑颖人(1933-), 男, 浙江镇海县人, 中国工程院院士, 解放军后勤工程学院教授, 博士生导师, 从事岩土力学、岩土工程与地下工程研究

等压作用下, 岩土颗粒间的水、气排出, 产生塑性体变, 出现屈服, 称为岩土的等压屈服特性。金属材料在各向等压作用下是不会产生塑性体变的。

岩土的体应变还与剪应力有关, 即在剪应力的作用下岩土会产生塑性体变(剪胀或剪缩), 一般称为岩土的剪胀性(含剪缩)。这在力学上表现为球张量与偏张量的交叉作用, 即球应力会产生剪变(负值), 这也是压硬性的一种表现; 反之, 剪应力会产生体变。纯塑性金属材料是不具有这一特性的。

2.2 经典塑性力学用于岩土类材料出现的问题

岩土塑性力学脱胎于经典塑性力学, 然而经典塑性力学只适用于金属材料, 当用于岩土类摩擦材料时就会出现一些不符合实际的情况, 理论计算结果与土工试验结果出现诸多矛盾^[1, 2]。大量的土工试验表明, 岩土类材料具有如下几点变形机制。

1) 按照经典塑性力学中的传统塑性势理论, 塑性应变增量的方向唯一取决于应力状态, 而与应力增量无关。文献[5, 6]的试验证实, 岩土塑性应变增量的方向不仅与应力有关, 还与应力增量密切相关, 如图1所示。表明岩土材料不具有塑性应变增量方向与应力唯一性假设, 亦即不遵守传统塑性势理论。岩土材料塑性应变增量的方向不仅取决于应力状态, 而主要取决于应力增量。

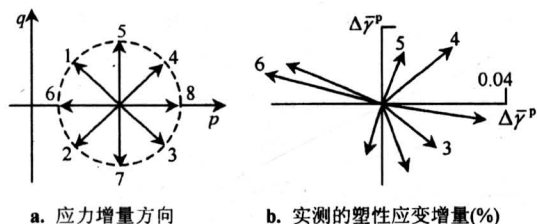


图1 应力增量方向对岩土塑性应变增量方向的影响

Fig.1 Relationship between directions of stress increments and plastic strain increments

2) Poorooshab^[7], Frydman, Lade 等试验证实, 岩土类材料不遵守关联流动法则和德鲁克公设。

3) 基于传统塑性势理论的单屈服面模型, 用莫尔-库仑一类剪切屈服面作屈服面时, 若用关联流动法则, 将会导致远大于实际的剪胀变形。

4) Matsouka 等人试验证实^[8], 尽管主应力的方向大小相同, 但如果应力主轴发生旋转, 即主应力轴

方向变化也会产生塑性变形。而按经典塑性力学是算不出这种变形的, 表明经典塑性力学没有考虑应力主轴旋转而难以适应实际岩土工程。

上述岩土变形机制与经典塑性力学相矛盾。

传统塑性位势理论是经典塑性力学的核心, 可表示为

$$d\epsilon_{ij}^p = \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda \quad (1)$$

式中 $d\epsilon_{ij}^p$ 为塑性应变增量, Q 为塑性势函数, $d\lambda$ 为一非负的比例系数。式(1)表明, $d\epsilon_{ij}^p$ 的方向始终与塑性势面正交。应用关联流动法则, 屈服面就是塑性势面, 因而塑性应变增量方向也与屈服面正交, 由此得出塑性应变增量方向只与应力状态有关, 而与应力增量无关的结论。根据式(1), 对3个主方向必有

$$d\epsilon_1^p : d\epsilon_2^p : d\epsilon_3^p = \frac{\partial Q}{\partial \sigma_1} : \frac{\partial Q}{\partial \sigma_2} : \frac{\partial Q}{\partial \sigma_3} \quad (2)$$

式(2)是传统塑性位势理论的基本特征, 即各塑性应变增量分量存在比例关系。由此还可推证塑性主应变增量与主应力增量的关系为

$$d\epsilon_i^p = [A_p]_{3 \times 3} d\sigma_i \quad (3)$$

塑性矩阵 A_p 元素 a_{1i}, a_{2i}, a_{3i} ($i=1, 2, 3$) 有

$$a_{1i} : a_{2i} : a_{3i} = \frac{\partial Q}{\partial \sigma_1} : \frac{\partial Q}{\partial \sigma_2} : \frac{\partial Q}{\partial \sigma_3} \quad (4)$$

式(2)和式(4)表明, 各塑性主应变增量或 A_p 中的各行元素成比例, 只有一个势函数就可求出3个塑性主应变或 A_p , 这是传统塑性位势理论的特点。由于塑性应变增量分量互成比例, 因而塑性应变增量方向不随塑性应变增量分量大小而变, 导致传统塑性位势理论与岩土材料变形机制的矛盾。

在德鲁克公设提出前后, 经典塑性力学一直沿用关联流动法则, 即塑性势函数与屈服函数相同。实际土工试验表明, 岩土材料不服从关联流动法则, 它只是一种假设。图2的简单摩擦系统, 在一定程度上也说明岩土类材料不符合正交流动法则^[9]。图2中 Q 是位移矢量的方向, 而 $O-C$ 相当于子午平面上的屈服面, 所以位移矢量与屈服面并不正交, 表明德鲁克公设不适用于岩土类材料。

德鲁克公设一直是关联流动法则的理论支柱, 本来是作为弹塑性稳定材料的定义提出来的, 因此不是所有客观材料的力学行为都必须满足这个公设所导出的结论^[10]。大量的实践表明, 金属材料适应德鲁克公设, 而岩土材料不适应这一公设。

在经典塑性力学中, 将屈服函数写成3个主应

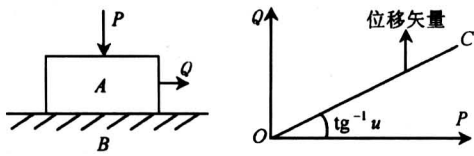


图 2 岩土材料不适用正交流动法则示意图

Fig. 2 Normality-flow law is not applicable to geomaterials

力或 3 个应力张量不变量的函数，这就忽略了应力增量中 3 个剪应力增量 $d\tau_{ij}$ 所引起的塑性变形。即经典塑性力学中不考虑应力主轴的旋转，假设应力主轴与应力增量主轴始终共轴，只有主应力增量 $d\sigma_1, d\sigma_2, d\sigma_3$ ，而 $d\tau_{12} = d\tau_{23} = d\tau_{13} = 0$ 。实际岩土工程中，应力主轴会发生旋转，即存在主轴旋转的应力增量分量 $d\tau_{ij}$ ，并由此产生相应的塑性变形。不考虑应力主轴旋转也是经典塑性力学的一个假设，无法算出应力主轴旋转产生的塑性变形。

2.3 经典塑性力学特有的 3 条假设

经典塑性力学属于连续介质力学范畴，一般具有各向同性、均质、连续、小变形等基本假设。此外，经典塑性力学还具有下面 3 条特有的假设：

1) 假设应力空间中只存在一个满足式 (1) 的塑性势函数，导致塑性应变增量分量成比例；塑性应变增量方向只与应力有关，而与应力增量无关。

2) 假设应力与应力增量主轴共轴，不考虑应力主轴旋转。

3) 材料服从关联流动法则。

上述假设，不适应岩土材料的变形机制。消除上述假设，将经典塑性力学改造成更一般的塑性力学，称它为广义塑性力学^[11-15]，它既符合岩土类材料的变形机制，也能适应金属材料变形机制。

3 不计应力主轴旋转的广义塑性位势理论

广义塑性力学从固体力学原理直接导出广义塑性位势理论。在不计应力主轴旋转情况下（应力主轴、应力增量主轴及塑性应变增量主轴共轴），引入张量定律，从理论上导出了广义塑性位势理论^[16]。应力和应变都是二阶张量，按张量定律必有

$$d\epsilon_{ij}^p = \sum_{k=1}^3 d\epsilon_k^p \frac{\partial Q_k}{\partial \sigma_{ij}} \quad (k = 1, 2, 3) \quad (5)$$

式中 σ_k 与 ϵ_k^p 分别为 3 个主应力和 3 个塑性主应

变。当张量 A_{ij} （如 $d\epsilon_{ij}^p$ ）的 3 个主方向 A_k （如 $d\epsilon_k^p$ ）与张量 B_{ij} （如 σ_{ij} ）的 3 个主方向 B_k （如 σ_k ）相同，则有

$$A_{ij} = A_k \frac{\partial B_k}{\partial B_{ij}} \quad (6)$$

则式 (5) 得证。

根据梯度定义，有

$$d\epsilon_i^p = \sum_{k=1}^3 d\lambda_k \text{grad} G_k = \sum_{k=1}^3 d\lambda_k \frac{\partial Q_k}{\partial \sigma_i} \quad (7)$$

式中 Q_k 为 3 个线性无关的任意势函数； $d\lambda_k$ 为 3 个塑性因子。将式 (7) 代入式 (5)，则有

$$d\epsilon_{ij}^p = \sum_{k=1}^3 d\lambda_k \frac{\partial Q_k}{\partial \sigma_{ij}} \quad (k = 1, 2, 3) \quad (8)$$

式 (8) 称为不计应力主轴旋转的广义塑性位势理论，它与传统塑性位势理论有如下 3 点区别：

1) 广义塑性位势理论有 3 个塑性势面，且 3 个塑性势面必须线性无关；而传统塑性位势理论只有一个塑性势面。

2) 广义塑性位势理论中，塑性应变增量方向由 3 个塑性应变增量分量的方向和大小来定，而 3 个分量既与塑性势面有关，又与屈服面及应力增量有关。传统塑性位势理论是其特例，此时塑性应变增量分量成比例，塑性应变增量方向由此势函数唯一地确定，而与应力增量无关。由此表明，传统塑性力学中可事先确定塑性应变增量总量的势面。而广义塑性力学中，因塑性应变增量总量方向与应力增量有关，无法事先确定塑性应变增量总量方向（即势面）。但可事先确定塑性应变增量的 3 个分量方向，即知 3 个分量的势面。

3) 3 个塑性因子 $d\lambda_k$ ($k = 1, 2, 3$) 不要求都大于零或等于零。 $d\lambda_k$ 与屈服面有关，当屈服面与塑性势面向向， $d\lambda_k > 0$ ；屈服面与塑性势面反向，则 $d\lambda_k < 0$ 。岩土材料的体积屈服面既可与塑性势面向向（体缩），也可与塑性势面反向（体胀）。而传统塑性力学中只有一个塑性势面，因而 $d\lambda$ 一定大于零或等于零。

式 (8) 中 3 个塑性势函数是可任选的，但必须保持线性无关，最符合这一条件并应用最方便的是选用主应力空间中的 3 个坐标轴作塑性势函数，如选 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 或 p, q, θ 不变量为势函数。这种情况下构造屈服函数也最为方便。这说明势函数可采用任何一种形式的 3 个张量不变量。

取 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 的等值面为 3 个塑性势函数即

$Q_1 = \sigma_1, Q_2 = \sigma_2, Q_3 = \sigma_3$ 时, 式 (8) 变为

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda_1 \frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_{ij}} + d\lambda_2 \frac{\partial \sigma_2}{\partial \sigma_{ij}} + d\lambda_3 \frac{\partial \sigma_3}{\partial \sigma_{ij}} \quad (9)$$

式中 $d\lambda_1, d\lambda_2, d\lambda_3$ 分别为相应上述 3 个势面的塑性因子, 将 $\sigma_1 = Q_1, \sigma_2 = Q_2, \sigma_3 = Q_3$ 代入式 (9) 或按其物理意义均能得到

$$d\lambda_1 = d\epsilon_1^p, d\lambda_2 = d\epsilon_2^p, d\lambda_3 = d\epsilon_3^p,$$

可见 $d\lambda_k$ 具有明确的物理意义。

如果取 p, q, θ_σ 为塑性势函数, 有

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda_1 \frac{\partial p}{\partial \sigma_{ij}} + d\lambda_2 \frac{\partial q}{\partial \sigma_{ij}} + d\lambda_3 q \frac{\partial \theta_\sigma}{\partial \sigma_{ij}} \quad (10)$$

同理有

$$d\lambda_1 = d\epsilon_v^p, d\lambda_2 = d\bar{\gamma}_q^p, d\lambda_3 = d\bar{\gamma}_\theta^p,$$

式中 $d\epsilon_v^p, d\bar{\gamma}_q^p, d\bar{\gamma}_\theta^p$ 分别为塑性体应变增量, q 方向与 θ_σ 方向的塑性剪应变增量 (图 3)。

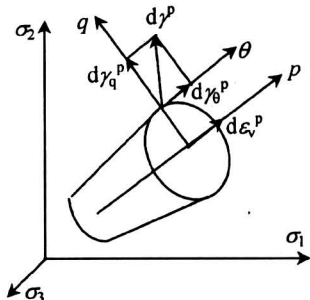


图 3 塑性应变增量的方向

Fig.3 Directions of plastic strain increment

塑性应变增量可分解为塑性体应变增量与塑性剪应变增量

$$d\epsilon_v^p = \sum_{k=1}^3 d\lambda_k \frac{\partial Q_k}{\partial p} = d\lambda_1 \quad (11)$$

$$d\bar{\gamma}^p = \sum_{k=1}^3 \left[\left(d\lambda_k \frac{\partial Q_k}{\partial q} \right)^2 + \left(d\lambda_k \frac{1}{q} \frac{\partial Q_k}{\partial \theta_\sigma} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (12)$$

塑性剪应变可分为 q 方向上的塑性剪应变增量 $d\bar{\gamma}_q^p$ 和 θ_σ 方向上的塑性剪应变增量 $d\bar{\gamma}_\theta^p$:

$$\begin{aligned} d\bar{\gamma}_q^p &= \sum_{k=1}^3 d\lambda_k \frac{\partial Q_k}{\partial q} = d\lambda_2, \\ d\bar{\gamma}_\theta^p &= \sum_{k=1}^3 d\lambda_k \frac{1}{q} \frac{\partial Q_k}{\partial \theta_\sigma} = d\lambda_3, \\ d\bar{\gamma}^p &= [(d\bar{\gamma}_q^p)^2 + (d\bar{\gamma}_\theta^p)^2]^{1/2} \\ &= [(d\lambda_2)^2 + (d\lambda_3)^2]^{1/2} \quad (13) \end{aligned}$$

从实际情况来看, 无论是岩土或金属材料, $d\bar{\gamma}_\theta^p$ 一般不大, 可认为 $d\bar{\gamma}_\theta^p = 0$ 。假定在 $d\bar{\gamma}_q^p$ 中忽

略 θ_σ 的影响, 相当于忽略了洛德角的影响, 即有

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda_1 \frac{\partial p}{\partial \sigma_{ij}} + d\lambda_2 \frac{\partial q}{\partial \sigma_{ij}} = d\epsilon_v^p \frac{\partial p}{\partial \sigma_{ij}} + d\bar{\gamma}_q^p \frac{\partial q}{\partial \sigma_{ij}} \quad (14)$$

这就是国内常用的“南水”双屈服面模型^[4]。

对于金属材料, $d\epsilon_v^p = 0$, 因而式 (14) 变为单屈服面模型, 即有 $Q = Q_2 = q$, 此时, 在子午平面上塑性应变增量方向在 q 方向上。

4 塑性势面与屈服面的关系

经典塑性力学中采用总量势面; 而广义塑性力学必须采用分量势面。广义塑性力学采用了塑性力学中的分量理论。屈服面主要用来确定塑性应变增量的大小。经典塑性力学中确定塑性因子 $d\lambda$; 而广义塑性力学中确定 3 个塑性因子 $d\lambda_k$ 。

塑性应变增量矢量的方向由塑性势面确定, 而大小按其相应的屈服面确定。这就表明塑性势面与屈服面必须相关。例如求塑性应变增量分量 $d\epsilon_v^p$ (塑性体应变), 其塑性势面的法线方向必为 $d\epsilon_v^p$ 方向 (应力 p 方向); 与此相应的屈服面的硬化参量必为 ϵ_v^p , 屈服面必为 $f_v(\sigma_{ij}, \epsilon_v^p)$ 。按屈服面的定义, 它就是 ϵ_v^p 的等值面, 即 p 方向上的分量屈服面称为体积屈服面。同理, 相应 q 方向上塑性势面的屈服面为 q 方向的剪切屈服面 $f_q(\sigma_{ij}, \bar{\gamma}_q^p)$; 相应 θ_σ 方向上塑性势面的屈服面为 θ_σ 方向的剪切屈服面 $f_\theta(\sigma_{ij}, \bar{\gamma}_\theta^p)$ 。可见, 塑性势一旦确定, 其相应的硬化参量与屈服条件也就确定, 它们有一一对应的关系。对于金属材料, 塑性势面与屈服面不仅相应, 而且相等, 这是一种特例。

屈服面一般应由试验确定。在等向硬化模型的情况下, 体积屈服面、 q 方向剪切屈服面与 θ_σ 方向剪切屈服面可表达为如下形式

$$\begin{aligned} H_v(\epsilon_v^p) &= f_v(\sigma_{ij}) = f_v(p, q, \theta_\sigma), \\ H_q(\bar{\gamma}_q^p) &= f_q(\sigma_{ij}) = f_q(p, q, \theta_\sigma), \\ H_\theta(\bar{\gamma}_\theta^p) &= f_\theta(\sigma_{ij}) = f_\theta(p, q, \theta_\sigma) \quad (15) \end{aligned}$$

微分式 (15), 可得

$$\begin{aligned} d\epsilon_v^p &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial f_v}{\partial p} dp + \frac{1}{A_1} \frac{\partial f_v}{\partial q} dq + \frac{1}{A_1} \frac{\partial f_v}{\partial \theta_\sigma} d\theta_\sigma = d\lambda_1, \\ d\bar{\gamma}_q^p &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial f_q}{\partial p} dp + \frac{1}{A_2} \frac{\partial f_q}{\partial q} dq + \frac{1}{A_2} \frac{\partial f_q}{\partial \theta_\sigma} d\theta_\sigma = d\lambda_2, \\ d\bar{\gamma}_\theta^p &= \frac{1}{A_3} \frac{\partial f_\theta}{\partial p} dp + \frac{1}{A_3} \frac{\partial f_\theta}{\partial q} dq + \frac{1}{A_3} \frac{\partial f_\theta}{\partial \theta_\sigma} d\theta_\sigma = d\lambda_3 \quad (16) \end{aligned}$$

式中 $A_1 = \partial H_v / \partial \epsilon_v^p$, $A_2 = \partial H_q / \partial \bar{\gamma}_q^p$, $A_3 = \partial H_\theta / \partial \bar{\gamma}_\theta^p$.

当塑性应变总量与应力具有唯一性关系时, 即上述 $A_1 = A_2 = A_3 = 1$ 时, 并略去 θ_σ 对 ϵ_v^p 及 p 对 $\bar{\gamma}_\theta^p$ 的影响, 屈服面可简化为

$$\begin{aligned} \epsilon_v^p &= f_v(\sigma_{ij}) = f_v(p, q_\sigma), \\ \bar{\gamma}_q^p &= f_q(\sigma_{ij}) = f_q(p, q, \theta_\sigma), \\ \bar{\gamma}_\theta^p &= f_\theta(\sigma_{ij}) = f_\theta(p, \theta_\sigma) \end{aligned} \quad (17)$$

微分式 (17) 得

$$\begin{aligned} d\epsilon_v^p &= \frac{\partial f_v}{\partial p} dp + \frac{\partial f_v}{\partial q} dq_\sigma = d\lambda_1, \\ d\bar{\gamma}_q^p &= \frac{\partial f_q}{\partial p} dp + \frac{\partial f_q}{\partial q} dq + \frac{\partial f_q}{\partial \theta_\sigma} d\theta_\sigma = d\lambda_2, \\ d\bar{\gamma}_\theta^p &= \frac{\partial f_\theta}{\partial p} dp + \frac{\partial f_\theta}{\partial \theta_\sigma} d\theta_\sigma = d\lambda_3 \end{aligned} \quad (18)$$

由上看出, 塑性势面与屈服面存在如下关系:

1) 塑性势面可以任取, 但必须保证各势面间线性无关, 屈服面则不可任取, 它必须与塑性势面对应, 并有明确的物理意义, 如取 σ_1 为势面, 则对应的屈服面必为塑性主应变 ϵ_1^p 的等值面。可见, 屈服面必然与塑性势面相关联, 即必须保持屈服面与塑性势面对应, 在特殊情况下两者亦可相同, 如服从米赛斯屈服条件的金属材料, 屈服面与塑性势面同为圆筒形。

2) 取 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 或 p, q, θ_σ 为塑性势面, 相应的屈服面最简单, 并具有明确的物理意义, 即为 3 个塑性主应变的等值面或为塑性体应变、 q 方向塑性剪切应变与 θ_σ 方向塑性剪应变的等值面。

3) 由于 3 个塑性势面线性无关, 则相应的 3 个屈服面也必然互相独立。例如体积屈服面与 q 方向上及 θ_σ 方向上的剪切屈服面都各自独立。这表明体积屈服面只能用来计算塑性体积变形, 而与塑性剪切变形无关, 反之亦然。

4) 通常的剪胀, 指剪应力 $dq, d\theta_\sigma$ 所引起的体胀, 即式 (16) 中的 $\frac{1}{A_1} \frac{\partial f_v}{\partial p} dp$ 和 $\frac{1}{A_1} \frac{\partial f_v}{\partial \theta_\sigma} d\theta_\sigma$ 。

5) 对于采用米赛斯屈服条件的金属材料, 式 (16) 中只保留 $(\partial f_q / \partial q) dq$ 一项, 其余均为零。

5 岩土材料的加载条件 (屈服条件)

广义塑性力学中, 相应 3 个塑性势函数有 3 个屈服条件: 体积屈服条件、 q 方向及 θ_σ 方向的剪切屈服条件。

5.1 体积屈服面

以 ϵ_v^p 为硬化参量的屈服面称为体积屈服面, 即 ϵ_v^p 的等值面。按土性及其状态不同, 将体积屈服面分为压缩型、硬化压缩剪胀型和软化压缩剪胀型, 见图 4。

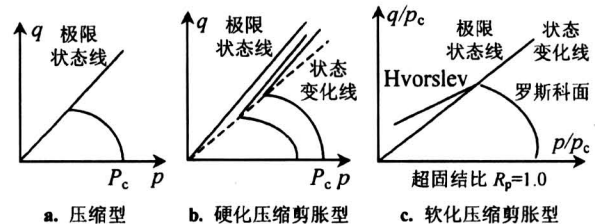


图 4 体积屈服面

Fig. 4 Volumetric yield surface

5.1.1 压缩型体积屈服面 松砂、正常固结土等土体, 受力后土体体积压缩。其体积屈服面常用的是椭圆型曲线, 如图 4a 所示。其表达式为

$$p[1 + (\eta/M)^2] = p_c \quad (19)$$

式中 $\eta = q/p$, M 为极限状态线的斜率, p_c 为加载面与 p 轴的右交点。

5.1.2 硬化压缩剪胀型体积屈服面 中密砂、弱超固结土等土体, 应力应变曲线处于应变硬化状态, 土体体变先压缩后剪胀。这类屈服面一般应用不多, 近年来有所进展。通过中密砂试验^[17]并按屈服面的定义, 由试验拟合得出了 S 形的屈服曲线 (图 4b)。图 4b 中, 来自试验的状态变化线下方为体积压缩, 其体积屈服条件一般为类似剑桥模型的椭圆形屈服曲线; 在状态变化线上方只产生体胀, 由试验获得的屈服条件近似为一条直线。由此得出屈服曲线为两段屈服曲线组成的 S 形屈服曲线。在低剪应力状态下产生体缩, 高剪应力状态下产生体胀, 两段屈服曲线具有相反的法线方向。

5.1.3 软化压缩剪胀型体积屈服面 密砂、超固结土、岩石等岩土体, 应力应变曲线先处于应变硬化状态, 后处于应变软化状态, 其体变也是先压缩后剪胀。这类岩土体的体积屈服面目前研究不多, Hvorslev 面可认为是软化压缩剪胀型体积屈服面。图 4c 上人为地把极限状态线与状态变化线合为一条, 而实际试验是 2 条曲线, 这是其不足之处。

5.2 剪切屈服面

剪切屈服面是以 $\bar{\gamma}^p$ 为硬化参量的屈服面, 即等 $\bar{\gamma}^p$ 的一簇空间曲面。剪切屈服面的表达式为

$$\Phi_\gamma(p, q, \theta_\sigma, \gamma^p) = \beta p^2 + \alpha_1 p + \bar{\sigma}_+^n - k \quad (20)$$

式中 β, α_1, k 为与 γ^p 有关的系数, $n = 2$ 或 1 , $\bar{\sigma}_+^n = J_2^{1/2}/g(\theta_\sigma), g(\theta_\sigma)$ 为偏平面上 q 的形状函数。

从试验结果看, 多数岩土剪切屈服曲线在子午平面上是双曲线或抛物线。当加载面 Φ_γ 发展到

与 $\bar{\gamma}^p$ 无关时, 加载面就成为破坏面 F_γ , 式 (20) 中的系数与 $\bar{\gamma}^p$ 无关。表 1 列出了 16 种常用的破坏准则, 给出了相应的 β, α_1, k 及 $g(\theta_\sigma)$ 。

表 1 不同屈服条件的系数值

Table 1 Value of coefficients for various yield conditions

| 屈服条件 | n | β | α_1 | k | $g(\theta_\sigma)$ |
|-----------------------|-----|-----------------------------|--|---|--|
| 米赛斯条件 | 1 | 0 | 0 | c | 1 |
| 广义米赛斯条件 | 1 | 0 | $\text{tg } \bar{\varphi}$ | \bar{c} | 1 |
| 外角外接圆锥 | 1 | 0 | $\frac{6\sin\varphi}{\sqrt{3}(3+\sin\varphi)}$ | $\frac{6c\cos\varphi}{\sqrt{3}(3+\sin\varphi)}$ | 1 |
| 内角外接圆锥 | 1 | 0 | $\frac{3\sin\varphi}{\sqrt{3}\sqrt{3+\sin^2\varphi}}$ | $\frac{3c\cos\varphi}{\sqrt{3}\sqrt{3+\sin^2\varphi}}$ | 1 |
| 内切圆锥 (德鲁克-普拉格条件) | 1 | 0 | $\frac{(a-d)}{p}\exp\left(-\frac{p}{c}\ln\frac{a}{a-d}\right)$ | c | 1 |
| Dimaggio-sandler | 1 | 0 | 0 | $2c/3^{1/2}$ | $3^{1/2}/2\cos\theta_\sigma$ |
| 屈瑞斯卡条件 | 1 | 0 | 按广义米赛斯条件确定 | | $3^{1/2}/2\cos\theta_\sigma$ |
| 广义屈瑞斯卡条件 | 1 | 0 | $\text{tg } \bar{\varphi}$ | \bar{c} | $\frac{3-\sin\varphi}{2(\sqrt{3}\cos\theta_\sigma-\sin\theta_\sigma\sin\varphi)}$ |
| 莫尔-库仑条件 | 1 | 0 | $\frac{6\sqrt{3}\sin\varphi}{\sqrt{2}\sqrt{3}(9-\sin^2\varphi)}$ | $\frac{6\sqrt{3}c\cos\varphi}{\sqrt{2}\sqrt{3}(9-\sin^2\varphi)}$ | 1 |
| 莫尔-库仑等面积圆锥 | 1 | 0 | $\frac{3\sin\varphi}{\sqrt{3}\sqrt{3+\sin^2\varphi}}$ | $\frac{3c\cos\varphi}{\sqrt{3}\sqrt{3+\sin^2\varphi}}$ | 1 |
| 平面应变下关联流动法则莫尔-库仑匹配条件 | 1 | 0 | $\sin\varphi$ | $c\cos\varphi$ | 1 |
| 平面应变下非关联流动法则莫尔-库仑匹配条件 | 1 | 0 | 0 | $2c/3^{1/2}$ | $[(3^{1/2}\cos\theta_\sigma)/2 - (\sin\theta_\sigma)/2]^{-1}, \theta_\sigma \leq 0^\circ$ $[(3^{1/2}\cos\theta_\sigma)/2 + (\sin\theta_\sigma)/2]^{-1}, \theta_\sigma \geq 0^\circ$ |
| 双剪应力条件 | 1 | 0 | $\text{tg } \bar{\varphi}$ | \bar{c} | $K[(3^{1/2}\cos\theta_\sigma)/2 - (\sin\theta_\sigma)/2]^{-1}, \theta_\sigma \leq \text{tg}^{-1}(3^{-1/2}\sin\varphi)$ $K[(3^{1/2}\cos\theta_\sigma)/2 + (\sin\theta_\sigma)/2]^{-1}, \theta_\sigma \geq \text{tg}^{-1}(3^{-1/2}\sin\varphi)$ |
| 广义双剪应力条件 | 1 | 0 | $\text{tg } \bar{\varphi}$ | \bar{c} | $2K/[(1+K) - (1-K)\sin 3\theta_\sigma], K = (3-\sin\varphi)/(3+\sin\varphi)$ (同上双曲线型行) |
| 克维兹-潘德条件 | 2 | $-\text{tg}^2\bar{\varphi}$ | $2\bar{c}\text{tg}\bar{\varphi}$ | $\bar{c}^2 - a^2\text{tg}\bar{\varphi}$ | (同上双曲线型行) |
| 双曲线型 | 2 | 0 | $1/a$ | d/a | (同上双曲线型行) |
| 抛物线型 | 2 | $\text{tg}^2\bar{\varphi}$ | $-2(a-a_1)\text{tg}^2\bar{\varphi}$ | $\text{tg}\bar{\varphi}(2a-\bar{c}\text{tg}\bar{\varphi})\bar{c}$ | (同上双曲线型行) |
| 椭圆型 | 2 | $\text{tg}^2\bar{\varphi}$ | $-2(a-a_1)\text{tg}^2\bar{\varphi}$ | $\text{tg}\bar{\varphi}(2a-\bar{c}\text{tg}\bar{\varphi})\bar{c}$ | (同上双曲线型行) |

注 $\bar{c} = 6c \cos \varphi / [3^{1/2} (3 - \sin \varphi)]$, $\text{tg } \bar{\varphi} = 6\sin \varphi / [3^{1/2} (3 - \sin \varphi)]$

应当指出, 由徐干成、郑颖人提出的莫尔-库仑等面积圆条件是按偏平面上圆面积与莫尔-库仑不等边六角形面积相等得出的。它不但消除了莫尔-库仑条件的奇异性, 而且计算结果与莫尔-库仑条件计算结果十分接近, 因而完全可等代莫尔-库仑条件。平面应变下莫尔-库仑匹配条件实际上就是平面应变下的莫尔-库仑条件, 这种情况下, 六角形锥体已转化为圆锥体。系数 α_1, k 是在关联流动法则与非关联流动法则 (设体变为零, 即膨胀角

为 $\varphi/2$) 下导出。关联流动法则下为内切圆锥。

文献 [18] 中提出一个经验性的适用于岩体的破坏条件, 一般称为 Hoek-Brown 破坏条件, 其表式达为

$$F = q^2 g^2(\theta_\sigma) + \bar{\sigma}_c q g(\theta_\sigma) + 3\bar{\sigma}_c p - s\sigma_c^2 = 0 \tag{21}$$

式中 $\bar{\sigma}_c = m\sigma_c/3$; $q = (3J_2)^{1/2}$; $p = I_1/3$; σ_c 为单轴抗压强度; m, s 为岩土材料常数, 取决于岩

石性质及破碎程度；形状函数 $g(\theta_\sigma)$ 为

$$g(\theta_\sigma) = [4(1 - e^2)\cos^2(\pi/6 + \theta_\sigma) + (1 - 2e)^2] / [2(1 - e^2)\cos^2(\pi/6 + \theta_\sigma) + (2e - 1)D] \quad (22)$$

式中 $D = [4(1 - e^2)\cos(\pi/6 + \theta_\sigma) + 5e^2 - 4e]^{1/2}$ ； $e = q_1/q_c$ ； q_1, q_c 为受压与受拉时的偏应力。

偏平面上的剪切屈服曲线，一般取偏平面上破坏条件的形状函数 $g(\theta_\sigma)$ 。式 (20) 中的 $g(\theta_\sigma)$ 可写成

$$g(\theta_\sigma) = J_2^{1/2}/\bar{\sigma}_+ = r_\sigma/r_c = q/q_m \quad (23)$$

式中 r_c, q_m 为三轴压缩 π 平面上的半径和 q 值； r_σ, q 为 π 平面上相应任一 θ_σ 的半径与 q 值。

形状函数的选择，通常应根据试验结果来定，应用真三轴试验就能确定 $g(\theta_\sigma)$ 。此外，它还应满足如下条件：

- 1) 剪切屈服曲线应是凸曲线，即要求

$$1/g(\theta_\sigma) + (1/g(\theta_\sigma))'' \geq 0 \quad (24)$$

- 2) $g(30^\circ) = 1, r_\sigma(30^\circ) = r_c, g(-30^\circ) = K,$

$$r_\sigma(-30^\circ) = r_1, K = r_1/r_c, \quad (25)$$

式中 r_1 为三轴拉伸时 π 平面上的半径。 $K = 1$ ，最简单的凸曲线是圆； $K = 1/2$ 时，唯一不凹的曲线是直线。

- 3) 当 $\theta_\sigma = 30^\circ$ 和 $\theta_\sigma = -30^\circ$ 时

$$dg(\theta_\sigma)/d\theta_\sigma = 0 \quad (26)$$

满足式 (26) 是为了消除奇异性，简化计算。

莫尔-库仑条件并不是最符合实际的，随着真三轴土工试验仪器的出现，可通过试验来获得偏平面上的剪切屈服曲线。Lade 根据砂的真三轴试验得出 Lade 屈服条件^[19] (图 5) 为

$$F = \sigma_1\sigma_2\sigma_3/p^2 = I_3/I_1^3 = k \text{ (常数)} \quad (27)$$

或 $F = -(2J_2^{2/3}\sin 3\theta_\sigma)/3^{3/2} - I_1J_2/3 +$

$$(1/27 - 1/k)I_1^2 = 0 \quad (28)$$

Matsuoka-Nakai 也根据砂的真三轴试验得出屈服条件^[20, 21] (图 5) 为

$$I_1I_2/I_3 = k \text{ (常数)} \quad (29)$$

或 $(\sigma_2 - \sigma_3)^2/\sigma_2\sigma_3 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2/\sigma_3\sigma_1 +$

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2/\sigma_1\sigma_2 = k \text{ (常数)} \quad (30)$$

这两种屈服条件在 π 平面上都是不规则的形状，近似为一曲边三角形，如图 5 所示。这两种条件没有角点，都是光滑曲线，而且 Lade 屈服曲线外接莫尔-库仑破坏条件的 3 个内角顶点，而 Matsuoka-Nakai 破坏曲线外接莫尔-库仑条件 6 个内角点。

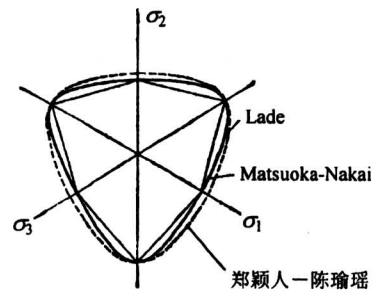


图 5 π 平面上 Lade, Matsuoka-Nakai 和郑颖人-陈瑜瑶屈服曲线

Fig. 5 Yield curve of Lade, Matsuoka-Nakai and Zheng-Chen in the π plane

清华大学根据砂的真三轴试验^[22]，提出了双圆弧的 π 平面上屈服曲线的形式，如图 6 所示。双圆弧屈服曲线只用常规三轴拉伸和压缩试验，就可得到形状函数 $g(\theta_\sigma)$ ，而无需做真三轴试验。

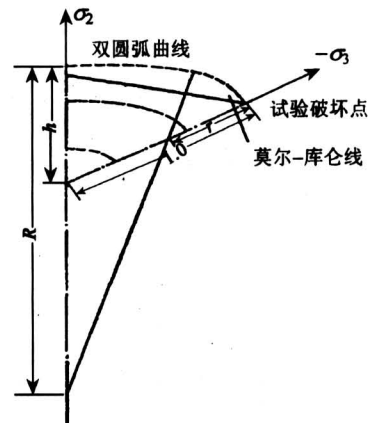


图 6 π 平面上渥太华砂的真三轴试验结果

Fig. 6 True triaxial test results of Ottawa sands in π plane

通过对重庆红粘土的真三轴试验^[23]，拟合得出形状函数为

$$g(\theta_\sigma) = 2K / [(1 + K) - (1 - K)\sin 3\theta_\sigma + n\cos^2 3\theta_\sigma] \quad (31)$$

式中 K, n 为系数， $K = 0.69, n = 0.45$ 。屈服曲线与 Lade 屈服曲线十分接近 (图 5)。当无试验数据时， K 可采用三轴拉伸试验时偏平面上的半径 r_1 与三轴压缩试验时偏平面上的半径 r_c 之比， $n = 0.4 \sim 0.5$ 内取值。

5.3 θ_σ 方向与 q 方向的剪切屈服面

θ_σ 方向的剪切屈服面以 $\bar{\gamma}_\theta$ 为硬化参量，用来

求 θ_σ 方向的塑性应变增量 $d\bar{\gamma}_\theta^p$ 。直接通过试验拟合 θ_σ 方向的剪切屈服面有一定困难，但可通过真三轴试验得出塑性应变增量在 θ_σ 方向的偏离程度，由此求得 $d\bar{\gamma}_\theta^p$ 与 $d\bar{\gamma}^p$ 的关系，即求得剪切屈服面 F_γ 与 θ_σ 方向剪切屈服面的关系，而求得 F_θ 。

文献 [23] 通过对重庆红粘土的真三轴试验指出，应力水平低时塑性应变增量方向与应力增量方向不发生偏离，如同弹性情况一样；但应力水平高时，两者出现偏离（图 7），但偏离不大，多数在 $6^\circ \sim 14^\circ$ 之间。这一试验结果与国内外的一些试验结果^[22, 24]基本一致，表明土体在 θ_σ 方向存在塑性应变增量 $d\bar{\gamma}_\theta^p$ 。由此可以认为偏离角近似为常量，即 q 方向的塑性剪应变增量 $d\bar{\gamma}_q^p$ 与 θ_σ 方向的塑性剪应变增量 $d\bar{\gamma}_\theta^p$ 近似成比例，即有

$$d\bar{\gamma}_\theta^p = d\bar{\gamma}_q^p \operatorname{tg} \alpha = d\bar{\gamma}^p \sin \alpha \quad (32)$$

式中 α 为偏离角。

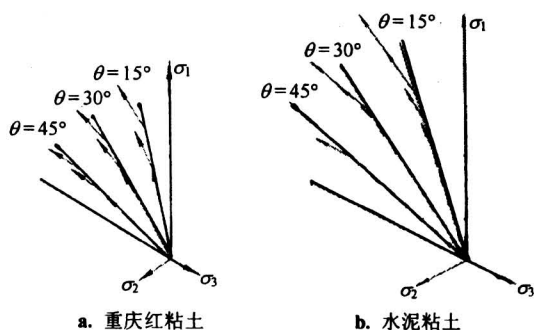


图 7 试验得应力增量与塑性应变增量的偏离状况

Fig.7 Directions of plastic strain increments in π plane

式 (32) 意味着屈服函数 Φ_γ , Φ_q , Φ_θ 都成比例，由此可得

$$\Phi_\theta = \Phi_\gamma \sin \alpha = \Phi_q \operatorname{tg} \alpha \quad (33)$$

$$\Phi_q = \Phi_\gamma \cos \alpha \quad (34)$$

求得了 θ_σ 方向与 q 方向的剪切屈服面。

在实际计算中，常用的近似方法是把 α 角视为零，即略去 θ_σ 方向的塑性应变增量，而增大 q 方向的塑性应变增量，使 $d\bar{\gamma}_q^p = d\bar{\gamma}^p$ 。这是一种等代的方法，即采用 $\Phi_q = \Phi_\gamma$, $\Phi_\theta = 0$ ，使计算简化，目前采用的双屈服面属与于这种情况。

6 广义塑性力学中的硬化定律

传统塑性力学的 $d\lambda$ 与硬化参量的函数有

关，即

$$d\lambda = \frac{1}{A} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} \quad (35)$$

硬化函数或硬化模量 A 与硬化参量有关。建立 A 的表达式称为硬化定律。在等向强化情况下，引用相容性条件或一致性条件，可得

$$A = - \frac{\partial \Phi}{\partial H} \frac{\partial H}{\partial \epsilon_{ij}^p} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \quad (36)$$

金属材料不产生体积应变，因而可选用塑性剪应变 γ^p ，塑性总应变 ϵ^p 或塑性功 W^p 作为硬化参量。广义塑性力学采用分量塑性势面与分量屈服面，各屈服面都有各自的硬化参量，可各自表征各分量的硬化历史。体积屈服面、剪切屈服面、 q 方向与 θ_σ 方向剪切屈服面都应采用各自硬化参量的硬化定律。

1) ϵ_v^p 硬化定律 设 $H = H(\epsilon_v^p)$ 或 $H = \epsilon_v^p$ ，则

$$A = - \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_v^p} \frac{\partial \epsilon_v^p}{\partial \epsilon_{ij}^p} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} = - \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_v^p} \delta_{ij} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} = - \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_v^p} \frac{\partial Q}{\partial p} \quad (37)$$

其矩阵形式为

$$A = - \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_v^p} \{ \delta \}^T \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\} \quad (38)$$

式中 $\delta^T = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$ ；广义塑性力学中，如 $\Phi = -\epsilon_v^p$, $Q = p$ ，则 $A = 1$ ；如 $\Phi = -H(\epsilon_v^p)$, $Q = p$ ，则 $A = \partial H / \partial \epsilon_v^p$ 。

2) $\bar{\gamma}_q^p$ 硬化定律 设 $H = H(\bar{\gamma}_q^p)$ 或 $H = \bar{\gamma}_q^p$ ，则

$$A = - \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\gamma}_q^p} \frac{\partial Q}{\partial q} \quad (39)$$

广义塑性力学中，如 $\Phi = -\bar{\gamma}_q^p$, $Q = q$ ，则 $A = 1$ ；如 $\Phi = -H(\bar{\gamma}_q^p)$, $Q = q$ ，则 $A = \partial H / \partial \bar{\gamma}_q^p$ 。

3) $\bar{\gamma}_\theta^p$ 硬化定律 同理，设 $H = H(\bar{\gamma}_\theta^p)$ ，或 $H = \bar{\gamma}_\theta^p$ ，则 $A = - \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\gamma}_\theta^p} \frac{\partial Q}{\partial \theta_\sigma}$ 。广义塑性力学中，如 $\Phi = -\bar{\gamma}_\theta^p$, $Q = \theta_\sigma$ ，则 $A = 1$ ；如 $\Phi = -H(\bar{\gamma}_\theta^p)$, $Q = \theta_\sigma$ ，则 $A = \partial H / \partial \bar{\gamma}_\theta^p$ 。

4) ϵ_i^p 硬化定律 同理，广义塑性力学中，如 $\Phi = -\epsilon_i^p$, $Q = \sigma_i$ ，则 $A = 1$ ；如 $\Phi = -H(\epsilon_i^p)$, $Q = \sigma_i$ ，则 $A = \partial H / \partial \epsilon_i^p$ 。

各种硬化参量的硬化定律见表 2。

7 广义塑性力学的应力应变关系

广义塑性力学中，应力-应变关系较为复杂，

表 2 采用各种硬化参量的硬化定律

Table 2 Hardening laws of different hardening parameters

| H | A _{一般} | A _{特殊} (k, i=1, 2, 3) |
|---|---|---|
| 塑性功 W ^p | $-\frac{\partial \Phi}{\partial W^p} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}}$ | |
| 塑性应变 ϵ_{ij}^p | $-\frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{ij}^p} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}}$ | |
| 塑性主应变 ϵ_i^p | $-\frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_i^p} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_i}$ | 1 ($\Phi_k = -\epsilon_i^p, Q_k = \sigma_i$) |
| 塑性体应变 ϵ^p | $-\frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon^p} \frac{\partial Q}{\partial p}$ | 1 ($\Phi = -\epsilon^p, Q = p$) |
| q 方向塑性剪应变 $\bar{\gamma}_q^p$ | $-\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\gamma}_q^p} \frac{\partial Q}{\partial q}$ | 1 ($\Phi = -\bar{\gamma}_q^p, Q = q$) |
| θ_σ 方向塑性剪应变 $\bar{\gamma}_\theta^p$ | $-\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\gamma}_\theta^p} \frac{\partial Q}{\partial \theta_\sigma}$ | 1 ($\Phi = -\bar{\gamma}_\theta^p, Q = \theta_\sigma$) |

因为 3 个屈服面可能全部处于加载状态，即全部屈服，也可能只有其中一、二个屈服面处于加载状态，即部分屈服。当全部屈服时，应采用全部屈服时的应力-应变关系；而当只有一个屈服面屈服时应采用单屈服面应力-应变关系；当 2 个屈服面屈服时采用双屈服面应力-应变关系，单屈服面与双屈服面应力-应变关系是其特例。

7.1 广义塑性力学中的弹塑性柔度矩阵

弹塑性刚度矩阵 D_{ep} 可由弹塑性柔度矩阵 C_{ep} 求逆得到，而求 C_{ep} 的关键是求塑性柔度矩阵 C_p 。

1) 依据单屈服面模型中 C_{ep} 推广求广义塑性力学中的 C_{ep} ：

$$d\epsilon = d\epsilon^e + \sum_{k=1}^3 d\epsilon_k^p = C_e + \sum_{k=1}^3 C_{pk} d\sigma = (C_e + C_p) d\sigma = C_{ep} d\sigma \quad (40)$$

与单屈服面类似有

$$C_{pk} = \left\{ \frac{\partial Q_k}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial \Phi_k}{\partial \sigma} \right\}^T / A_k \quad (k = 1, 2, 3) \quad (41)$$

式中 A_k 见表 2。因此有

$$C_{ep} = C_e + \frac{1}{A_1} \left\{ \frac{\partial Q_1}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial \Phi_1}{\partial \sigma} \right\}^T + \frac{1}{A_2} \left\{ \frac{\partial Q_2}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial \Phi_2}{\partial \sigma} \right\}^T + \frac{1}{A_3} \left\{ \frac{\partial Q_3}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial \Phi_3}{\partial \sigma} \right\}^T \quad (42)$$

2) 先求主应力空间中的塑性柔度矩阵 A_p ，然后通过转换矩阵求 C_{ep}

如果 $\epsilon_k^p = F_k(\sigma_i)$, ($k, i=1, 2, 3$)，则有

$$d\epsilon_k^p = A_p d\sigma_i =$$

$$\begin{bmatrix} \partial F_1 / \partial \sigma_1 & \partial F_1 / \partial \sigma_2 & \partial F_1 / \partial \sigma_3 \\ \partial F_2 / \partial \sigma_1 & \partial F_2 / \partial \sigma_2 & \partial F_2 / \partial \sigma_3 \\ \partial F_3 / \partial \sigma_1 & \partial F_3 / \partial \sigma_2 & \partial F_3 / \partial \sigma_3 \end{bmatrix} d\sigma_i \quad (43)$$

通过坐标变换，可由 A_p 获得一般应力-应变关系中的塑性柔度矩阵 C_p

$$d\epsilon^p = C_p d\sigma = [T]_{6 \times 3} [A_p]_{3 \times 3} [T]_{3 \times 6}^T d\sigma \quad (44)$$

$$T = \begin{bmatrix} l_1^2 & l_2^2 & l_3^2 & 2l_1 l_2 & 2l_2 l_3 & 2l_3 l_1 \\ m_1^2 & m_2^2 & m_3^2 & 2m_1 m_2 & 2m_2 m_3 & 2m_3 m_1 \\ n_1^2 & n_2^2 & n_3^2 & 2n_1 n_2 & 2n_2 n_3 & 2n_3 n_1 \end{bmatrix}^T \quad (45)$$

由此有 $C_{ep} = C_e + C_p$ 。

7.2 广义塑性力学中 D_{ep} 一般表达式

广义塑性力学中，采用等值面硬化规律可直接导出 D_{ep} 的一般表达式^[14]，应力-应变关系为

$$d\sigma = \left(D - D \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\}_{6 \times 3} [\alpha_{kl}]_{3 \times 3}^{-1} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right\}_{3 \times 6}^T D \right) d\epsilon \quad (46)$$

式中 $\left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\}_{6 \times 3} = \left\{ \frac{\partial Q_1}{\partial \sigma} \frac{\partial Q_2}{\partial \sigma} \frac{\partial Q_3}{\partial \sigma} \right\}$,
 $\left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right\}_{3 \times 6}^T = \left\{ \frac{\partial \Phi_1}{\partial \sigma} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \sigma} \frac{\partial \Phi_3}{\partial \sigma} \right\}^T$,

$$\alpha_{kl} = \left\{ \frac{\partial \Phi_k}{\partial \sigma} \right\}^T D \left\{ \frac{\partial Q_l}{\partial \sigma} \right\} + \delta_{kl} A_k,$$

其中 $\delta_{kl} = \begin{cases} 1 & k=l \\ 0 & k \neq l \end{cases}$, $A_k = \frac{\partial \Phi_k}{\partial H_{\sigma k}} \left\{ \frac{\partial H_{\sigma k}}{\partial \epsilon_k^p} \right\}^T$.
 $\left\{ \frac{\partial Q_k}{\partial \sigma} \right\}$ ($k=1, 2, 3$)。即有

$$D_{ep} = D - D \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\}_{6 \times 3} [\alpha_{kl}]_{3 \times 3}^{-1} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right\}_{3 \times 6}^T D \quad (47)$$

单屈服面情况下，式 (47) 即变化为传统塑性力学中的弹塑性矩阵表达式，传统塑性力学是广义塑性力学的一个特例。

8 广义塑性力学的加卸载准则^[14]

加卸载准则既可由加卸载定义直接作出判断，同时还可由屈服面状态给出加卸载准则。经典塑性力学经常采用后者；广义塑性力学中采用加卸载定义来判断加卸载较为方便，且一般分为应力型与应变型 2 种加卸载条件。塑性变形与应力之间没有一一对应关系，所以应力型加卸载准则理论上存在不足，因而采用应变型加卸载准则。

无论加载或卸载，总应变 ϵ 是单调变化量，硬化材料或软化材料加载时，应变 ϵ 总是增大，

卸载时应变 ϵ 总是减少。采用应变作为硬化材料加卸载准则是一种较简单的形式（其他形式略），以压缩型土的体变为例，可写成

$$\begin{aligned} \epsilon_v < \epsilon_{vm}, d\epsilon_v^e < 0 & \quad \text{弹性卸载,} \\ \epsilon_v < \epsilon_{vm}, \epsilon_v + d\epsilon_v^e < \epsilon_{vm}, d\epsilon_v^e > 0 & \quad \text{弹性加载,} \\ \epsilon_v = \epsilon_{vm}, d\epsilon_v^e = 0 & \quad \text{中性加载,} \\ \epsilon_v = \epsilon_{vm}, d\epsilon_v^e > 0 & \quad \text{加载,} \\ \epsilon_v = \epsilon_{vm}, d\epsilon_v^e < 0 & \quad \text{卸载} \end{aligned} \quad (48)$$

式中 $d\epsilon_v^e = dp/K$ （由 dp 引起的弹性体积应变）， K 为弹性剪切模量， ϵ_{vm} 为历史上最大体应变。

同理可用来分析剪切屈服情况。由于假设 $d\bar{\gamma}_q^p$ 与 $d\bar{\gamma}_q^e$ 成比例，因而 $\bar{\gamma}_q^p$ 加卸载准则与 $\bar{\gamma}_q^e$ 加卸载准则相同。这个准则非常适用于迭代法的数值分析，因为采用弹性迭代得出弹性应变增量可以直接进行加卸载判断。硬化剪胀土是压缩剪胀型土体，土体体变有缩有胀，此时土体加卸载准则，不能采用式（48）。其加卸载准则参见文献 [1, 25]。

9 考虑应力主轴旋转的广义塑性位势理论^[26]

经典塑性力学中假设应力主轴不发生偏转，即硬化过程中应力主轴方向不变。实际上，由于应力导致的各向异性，应力主轴方向会发生偏转，并同时由此引起塑性变形。为了反映主应力轴旋转所产生的塑性变形，国内外学者做了不少工作，主要在两方面：直接建立一般应力增量分量与一般应变增量分量之间的关系模式，不过这样做太复杂；采用运动硬化模型，屈服面随主应力轴旋转而运动，当应力路径复杂时，很难给出屈服面运动规律。

通过应力增量的分解，分解出共轴应力增量与旋转应力增量（主轴旋转所产生的应力增量）。建立包含旋转应力增量在内的广义塑性位势理论，就能求出应力主轴旋转产生的塑性变形。

9.1 应力增量的分解

9.1.1 二维应力增量的分解 应力增量可分解为共轴部分分量 $d\sigma_c$ 与旋转部分分量 $d\sigma_r$ ，即

$$d\sigma = d\sigma_c + d\sigma_r = \mathbf{T}_1 \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_3 \end{bmatrix} \mathbf{T}_1^T + \mathbf{T}_1 \begin{bmatrix} 0 & K_2 \\ K_2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{T}_1^T \quad (49)$$

式中 $K_1 = d\sigma_1$, $K_3 = d\sigma_2$, $K_2 = d\theta(\sigma_1 - \sigma_2)$ ，变换矩阵

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (50)$$

9.1.2 三维应力增量分解 若将二维应力增量分解推广到三维情况，可得

$$d\sigma = d\sigma_c + d\sigma_r = d\sigma_c + d\sigma_{r1} + d\sigma_{r2} + d\sigma_{r3} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} d\sigma_1 & d\theta_1(\sigma_1 - \sigma_2) & d\theta_3(\sigma_1 - \sigma_3) \\ d\theta_1(\sigma_1 - \sigma_2) & d\sigma_2 & d\theta_2(\sigma_2 - \sigma_3) \\ d\theta_3(\sigma_1 - \sigma_3) & d\theta_2(\sigma_2 - \sigma_3) & d\sigma_3 \end{bmatrix} \mathbf{T}^T \quad (51)$$

式中 $d\theta_1, d\theta_2, d\theta_3$ 分别表示旋转应力增量 $d\sigma_{r1}, d\sigma_{r2}, d\sigma_{r3}$ 引起的绕第三、第一、第二主应力轴旋转的旋转角增量； \mathbf{T} 为变换矩阵，同式（45）。由式（51）可见，应力主轴旋转角增量引起剪应力增量，即

$$d\tau_{ij} = d\theta_i(\sigma_i - \sigma_j), (i, j = 1, 2, 3) \quad (52)$$

9.2 考虑应力主轴旋转的广义塑性位势理论

由土工试验可知，在主应力和主应变空间内，旋转应力增量 $d\sigma_r$ 引起 6 个应变方向的塑性应变，需引用 6 个塑性势函数。可以任意选择势函数，但必须保持势函数的线性无关。一般可把 6 个应力分量写成 6 个势函数，6 个应力分量的方向就是 6 个势面的方向。结合式（8）可得考虑应力主轴旋转的广义塑性位势理论

$$d\epsilon_{ij}^p = d\epsilon_{ijc}^p + d\epsilon_{ijr}^p = \sum_{k=1}^3 d\lambda_k \frac{\partial Q_k}{\partial \sigma_{ij}} + \sum_{kr=1}^6 d\lambda_{kr} \frac{\partial Q_{kr}}{\partial \sigma_{ij}} \quad (53)$$

式中 $d\epsilon_{ijc}^p$ 为共轴应力增量 $d\sigma_c$ 引起的塑性应变增量； $d\epsilon_{ijr}^p$ 为旋转应力增量 $d\sigma_r$ 引起的塑性应变增量； $d\lambda_{kr}$ 为与应力主轴旋转相关的 6 个塑性系数，可采用试验数据拟合的方法得到，但这方面的研究目前还不成熟。

10 岩土屈服条件的确定^[23]

岩土材料极其复杂，不同的土性常有不同的屈服条件，导致计算结果的不唯一性。笔者提出用试验、按科学方法来建立屈服条件，尽量减少确定屈服条件的随意性。

10.1 屈服条件（加载条件）的物理意义

弹性力学基本方程与塑性力学基本方程的差别在于应力-应变关系。表 3 中列出了不同力学状态下的应力-应变关系及其参数的影响因素，可见，弹性材料或是塑性材料，弹性参数与屈服条件都是材料的状态参数，这就是屈服条件的物理含义。

图 8 示出了线弹性、非线性弹性、经典塑性与广义塑性的应力-应变曲线。线弹性情况下是条直线，非线性弹性情况下是条曲线，由此即可确定

E 与 E_t ；经典塑性情况下是一组曲线，广义塑性情况下是几组曲线，需要按屈服面定义将试验曲线转换为屈服曲线。

表 3 不同力学状态下的应力-应变关系及其参数的影响因素

Table 3 Stress-strain relation and influencing factors of parameter under various mechanical states

| 力学状态 | 应力-应变关系 | 力学参数 | 参数的影响因素 |
|-------|---|------------------|--------------|
| 线弹性 | 单轴情况下 $\epsilon_i = \sigma_i / E$ | E (弹性模量) | 材性 |
| 非线性弹性 | 单轴情况下 $\epsilon_i = \sigma_i / E_t$ | E_t (切线弹性模量) | 材性与应力状态 |
| 经典塑性 | $d\epsilon_{ij}^p = \frac{1}{A} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} \quad A = -\frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{ij}^p} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}}$ | Φ (加载面) | 材性、应力状态与应力历史 |
| 广义塑性 | 分量应力-应变关系 $d\epsilon_{ij}^p = \sum_{k=1}^3 \frac{1}{A_k} \frac{\partial \Phi_k}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} \quad A_k = \frac{\partial \Phi_k}{\partial \epsilon_{ij}^p} \quad (k=1, 2, 3)$ | Φ_k (分量加载面) | 材性、应力状态与应力历史 |

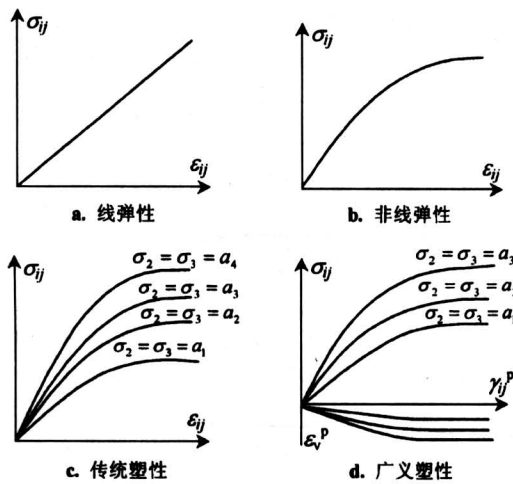


图 8 线弹性、非线性弹性、传统弹塑性、广义弹塑性应力应变关系

Fig.8 Stress-strain curves of linear elasticity, non-linear elasticity, classical plasticity and generalized plasticity

由图 8 可见，弹性参数与屈服条件都应由试验确定。岩土的性质差异很大，只有用当地土获得的屈服条件，才能提高计算的准确度，且较为经济。

10.2 屈服条件及其参数的建立

10.2.1 由试验数据作屈服面 由室内试验可测出总应变，将塑性应变从总应变中分离出来，得塑性应变与应力的关系，如图 9 所示。对塑性应变分量 $\epsilon_1^p = b_1$ 的不同值，在不同的应力路径上，相应地找出其对应的应力状态 c_1, c_2, \dots, c_n (图 9)，如取 $\epsilon_1^p = b_2$ ，则可在应力空间中找出其对应的应力状态 d_1, d_2, \dots, d_n ，这样就可

在 $\sigma_1 - 2^{1/2}\sigma_2$ 平面内作出等 $\epsilon_1^p = b_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$ 的空间曲线来 (图 10)，即 ϵ_1^p 为硬化参量的等值面。按照屈服面的定义，它就是 ϵ_1^p 的屈服面。同理也可作出 ϵ_2^p 及 ϵ_3^p 的屈服面。

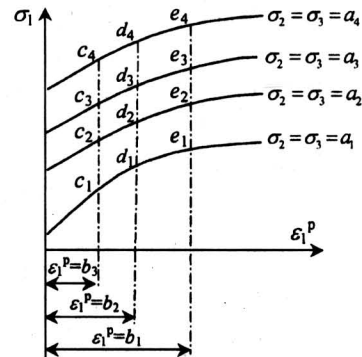


图 9 塑性应变与应力的关系

Fig.9 Relation between stress and plastic strain

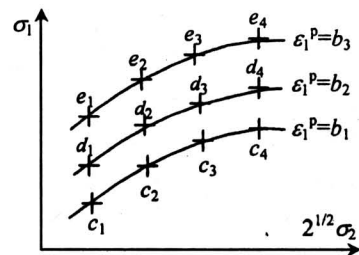


图 10 屈服面

Fig.10 Yield surface

通常，图 10 所示的屈服曲线可写成：

$$\Phi_k = \Phi_k(\sigma_i, \epsilon_k^p), \quad (k, i = 1, 2, 3) \quad (54)$$

或 $H_k(\epsilon_k^p) = f_k(\sigma_i), \quad (k, i = 1, 2, 3) \quad (55)$

式中 $H_k (\epsilon_k^p)$ 是硬化函数。由于试验获得的屈服曲线并不完全符合等向强化，因而宜采用式 (54)。

10.2.2 剪切屈服面的拟合

1) 子午面上 γ 方向的剪切屈服曲线 常用的剪切屈服曲线是双曲线型和抛物线型。

a. 双曲线型 双曲线的方程为

$$q = p / (a + b p) \tag{56}$$

根据试验，针对不同的 $\bar{\gamma}^p$ 值，用表 4 数据拟合，可得出 a ， b 与 $\bar{\gamma}^p$ 的关系

$$a = -0.11 \bar{\gamma}^p + 2.2 \tag{57}$$

$$b = 8 \times 10^{-5} \bar{\gamma}^p - 0.000 5 \tag{58}$$

则 γ 方向双曲线型剪切屈服面为

$$\phi_\gamma = p/q - (8 \times 10^{-5} \bar{\gamma}^p - 0.000 5) p + 0.11 \bar{\gamma}^p - 2.2 \tag{59}$$

b. 抛物线型 其方程为

$$q^2 = a p \tag{60}$$

表 4 可见， a 是 $\bar{\gamma}^p$ 的函数，通过拟合得

$$a = -9.6 + 4 280 \bar{\gamma}^p - 12 587 \bar{\gamma}^{p^2} \tag{61}$$

抛物线型剪切屈服面为

$$\phi_\gamma = -9.6 + 4 280 \bar{\gamma}^p - 12 587 \bar{\gamma}^{p^2} - q^2/p \tag{62}$$

表 4 a ， b 与 $\bar{\gamma}^p$ 的关系

Table 4 Value of a ， b and $\bar{\gamma}^p$

| $\bar{\gamma}^p$ | a | b | $\bar{\gamma}^p$ | a | b |
|------------------|-------|-------------|------------------|-------|-------------|
| 1 | 1.899 | -0.000 506 | 7 | 1.115 | 0.000 089 3 |
| 2 | 1.689 | -0.000 43 | 8 | 1.058 | 0.000 135 |
| 3 | 1.439 | -0.000 104 | 9 | 1.021 | 0.000 181 9 |
| 4 | 1.293 | -0.000 105 | 10 | 0.969 | 0.000 357 |
| 5 | 1.17 | 0.000 169 9 | 11 | 0.944 | 0.000 347 8 |
| 6 | 1.123 | 0.000 141 | 12 | 0.914 | 0.000 574 |

c. 子午面上 γ 方向剪切屈服面的验证 将试验数据与模型曲线做了一系列对比，由图 11 可见，双曲线型屈服面是合理的。若这二种类型的曲线都拟合得不理想，应另设曲线重新拟合。获得 Φ_γ 后，由式 (34) 求得 q 方向剪切屈服曲线 Φ_q 。

2) 偏平面上的 q 方向和 θ_0 方向剪切屈服面 要确定偏平面上 q 方向和 θ_0 方向剪切屈服曲线，需要进行真三轴试验。在一般情况下， θ_0 影响产生的塑性变形约 10%，可借鉴前人的试验结果。

10.2.3 体积屈服曲线 用等值面理论，在 $p-q$ 平面内作出等 ϵ_v^p 面，即为体积屈服面。体积屈服面的形状根据土性可分为压缩型和压缩剪胀型。

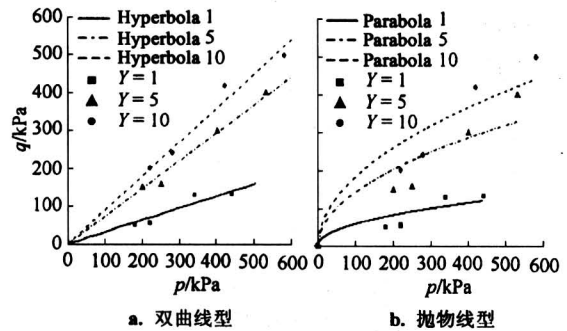


图 11 双曲线型与抛物线型

Fig.11 Hyperbola type and parabola type

1) 压缩型 这类体积屈服面是封闭形的，一端与 p 轴相接，另一端与极限线相接。其形状有子弹形、蛋形、椭圆形、直线形等。从重庆红粘土的常规试验的数据可以得出椭圆的拟合关系式为

$$p^2/a^2 + q^2/b^2 = 1 \tag{63}$$

对不同的 ϵ_v^p 值拟合出不同的 a^2 ， b^2 值，见表 5。

表 5 a^2 ， b^2 与 ϵ_v^p 的关系

Table 5 Value of a^2 ， b^2 and ϵ_v^p

| $\epsilon_v^p/\%$ | a^2 | b^2 | $\epsilon_v^p/\%$ | a^2 | b^2 |
|-------------------|--------|--------|-------------------|---------|--------|
| 0.5 | 23 000 | 6 500 | 2 | 86 000 | 32 000 |
| 0.8 | 35 500 | 10 000 | 2.5 | 107 000 | 41 000 |
| 1.0 | 44 000 | 15 000 | 3 | 128 000 | 52 000 |
| 1.5 | 65 000 | 21 300 | 3.5 | 149 000 | 62 500 |
| 1.8 | 77 500 | 26 000 | 4 | 169 900 | 75 000 |

从 a^2 ， b^2 值中可拟合出 a^2 ， b^2 与 ϵ_v^p 关系为

$$a^2 = 4.2 \times 10^4 \epsilon_v^p + 1.92 \times 10^3 \tag{64}$$

$$b^2 = 1.96 \times 10^3 (\epsilon_v^p)^2 + 1.08 \times 10^4 \epsilon_v^p + 640 \tag{65}$$

拟合的屈服条件与试验数据对比，从图 12 可见，拟合的椭圆形屈服条件与试验数据比较吻合。

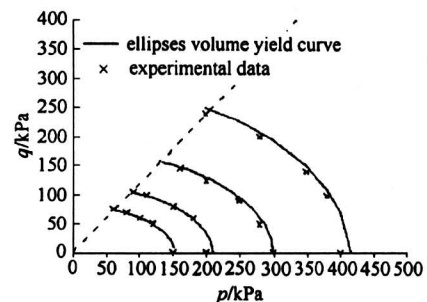


图 12 压缩型土体 (重庆红粘土) 的椭圆型体积屈服条件与试验数据的验证

Fig.12 Proof of compressive type volumetric yield condition based on test data

2) 压缩剪胀型 段建立、郑颖人、陈瑜瑶提出的压缩剪胀型土体的屈服面是一个 S 型曲线，在状态变化线的上部分近似为直线，下部分近似为椭圆。因此用分段曲线来拟合这类体积屈服条件。

$$\text{直线段 } q = a_1 p + b_1, \quad (66)$$

$$\text{曲线段 } p^2/a_2^2 + q^2/b_2^2 = 1 \quad (67)$$

由福建标准砂的试验数据，对不同的 ϵ_v^p 值，可以找到 a_1, b_1, a_2^2, b_2^2 的值，见表 6 和表 7。

从表 6 可以看出， a_1 随 ϵ_v^p 的变化不大，可以认为直线段的体积屈服曲线的斜率是一定的，对于福建标准砂取 $a_1 = 1.4$ 。由表 6 与表 7 的数据，可以拟合出 a_1, b_1, a_2^2, b_2^2 与 ϵ_v^p 关系：

$$b_1 = -138.06\epsilon_v^p + 1.06 \quad (68)$$

$$a_2 = 1.89 \times 10^6 (\epsilon_v^p)^2 - 3.19 \times 10^5 \epsilon_v^p + 28\,300 \quad (69)$$

$$b_2 = 1.05 \times 10^6 (\epsilon_v^p)^2 + 5.5 \times 10^5 \epsilon_v^p - 17\,300 \quad (70)$$

表 6 直线段 a_1, b_1 与 ϵ_v^p 的关系

Table 6 Value of a_1, b_1 and ϵ_v^p on line sect

| $\epsilon_v^p/\%$ | a_1 | b_1 | $\epsilon_v^p/\%$ | a_1 | b_1 |
|-------------------|-------|---------|-------------------|-------|---------|
| 0.03 | 1.38 | -3.0818 | 0.20 | 1.38 | -26.560 |
| 0.05 | 1.38 | -5.843 | 0.25 | 1.41 | -33.480 |
| 0.10 | 1.40 | -12.746 | 0.3 | 1.40 | -40.350 |
| 0.12 | 1.42 | -15.507 | 0.35 | 1.37 | -47.260 |
| 0.15 | 1.39 | -19.650 | 0.40 | 1.40 | -54.180 |

表 7 曲线段 a_2^2, b_2^2 与 ϵ_v^p 的关系

Table 7 Value of a_2^2, b_2^2 and ϵ_v^p on line sect

| $\epsilon_v^p/\%$ | a_2^2 | b_2^2 | $\epsilon_v^p/\%$ | a_2^2 | b_2^2 |
|-------------------|---------|---------|-------------------|---------|---------|
| 0.03 | 2 000 | -1 700 | 0.20 | 4 000 | 2 500 |
| 0.05 | 1 700 | -1 400 | 0.25 | 6 500 | 5 000 |
| 0.10 | 1 500 | -600 | 0.30 | 10 200 | 7 800 |
| 0.12 | 1 700 | -200 | 0.35 | 15 000 | 11 200 |
| 0.15 | 2 200 | 700 | 0.40 | 20 100 | 15 000 |

将拟合的屈服条件与试验数据对比，见图 13，拟合的屈服条件与试验曲线比较吻合。

11 广义塑性力学的实际应用

11.1 岩土建模方面的应用

以广义塑性力学为理论基础，建立符合土体实

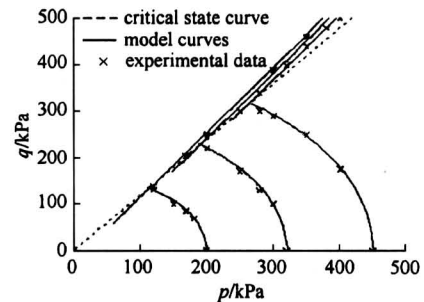


图 13 压缩剪胀型土体（福建标准砂）的体积屈服条件与试验数据的验证

Fig.13 Proof of hardening compressive dilatative type volumetric yield condition based on test data

际变形特性的本构模型是广义塑性力学最主要的应用之一。文献 [27] 以广义塑性力学为建模理论，建立了一个能考虑应力洛德角影响的土体的三屈服面模型；文献 [25] 建立了一个基于广义塑性力学的硬化剪胀土模型；文献 [23] 以试验结果为依据，拟合出了重庆红粘土与福建标准砂的体积屈服面和剪切屈服面；文献 [28] 通过试验拟合，求得 3 个塑性主应变等值面为屈服面。文献 [29, 30] 将广义塑性力学与次加载面理论结合，建立了一个新颖的循环塑性模型，通过多种应力路径的验证，表明模型能较好地反映循环荷载作用下土体呈现出非线性、滞回性与变形的积累性 3 方面主要特征。

按广义塑性力学，分别建立 3 个分量塑性势面与相应的 3 个屈服面，构成了土体本构模型。如果略去洛德角方向的塑性应变增量分量，就将上述三屈服面模型简化为双屈服面模型。若进一步略去塑性体应变，就可简化为单屈服面模型。为了便于分析不同屈服面对土体变形的影响程度，表 8 给出了几种基于广义塑性力学的土体模型的计算结果。

从表 8 可见，在均布荷载作用下地基表面处的沉降变形： q 方向上剪切变形引起的沉降占总沉降中的 64.5%； θ_v 方向上剪切变形引起的沉降占总沉降的 16.1%；总剪切变形引起的沉降占总沉降的 80.6%；体积变形引起的沉降占总沉降的 19.4%。采用剪切单屈服面模型时，变形计算误差可达 35.5%，当不计 θ_v 影响时计算误差可增至 38.7%，采用双屈服面模型时，变形计算误差可达 16%，不计 θ_v 影响时计算误差可增至 19.4%。

表 8 几种基于广义塑性力学的土体模型及其计算所得的地基表面沉降量^[9, 26]

Table 8 Several soil models based on generalized plastic mechanics and the calculated settlements of foundation

| 方案 | 屈服函数与塑性势函数 | 均载作用下/m | 所有荷载作用下/m | | | | |
|----|---|---------|-----------|-------|-------|------|------|
| | | | x=0.5 | x=2.5 | x=6.0 | x=11 | x=17 |
| 1 | $f=f_q(p, q); Q=q$ | 0.19 | 0.94 | 0.73 | 0.35 | 0.22 | 0.17 |
| 2 | $f=f_q(p, q, \theta); Q=q$ | 0.20 | 1.11 | 0.86 | 0.37 | 0.22 | 0.17 |
| 3 | $f_1=f_v(p, q), f_2=f_q(p, q); Q_1=p, Q_2=q$ | 0.25 | 1.13 | 0.90 | 0.45 | 0.29 | 0.23 |
| 4 | $f_1=f_v(p, q), f_2=f_q(p, q, \theta_a); Q_1=p, Q_2=q$ | 0.26 | 1.23 | 0.93 | 0.46 | 0.29 | 0.23 |
| 5 | $f_1=f_v(p, q), f_2=f_q(p, q, \theta_a), f_3=f_\theta(q, \theta_a); Q_1=p, Q_2=q, Q_3=\theta_a$ | 0.31 | 1.30 | 1.03 | 0.55 | 0.37 | 0.31 |

当偏载与均载共同作用时，在最大变形处的沉降变形： q 方向剪切变形引起的沉降占总沉降中的 80.5%； θ_a 方向上剪切变形引起的沉降占总沉降的 5.4%；总剪切变形引起的沉降占总沉降的 85.9%；体积变形引起的沉降占总沉降的 14.1%。采用剪切单屈服面模型时，变形计算误差可达 19.5%，当不计 θ_a 影响时误差可增至 27.7%。采用双屈服面模型时，变形计算误差可达 5.4%；当不计 θ_a 影响时，变形计算误差可增至 13.1%。

11.2 极限分析方面的应用

当前的滑移线理论中都采用经典塑性理论中的关联流动法则，对于金属材料，其塑性势面（速度滑移线）与屈服面一致，都是圆形曲线。金属材料的破坏面（应力特征线）也是基于米赛斯屈服条件，而获得的圆形曲线，因而应力特征线与速度滑移线一致，如图 14a 所示，它们与 x 轴的夹角为 $\pi/4$ 。对于岩土材料，一般也采用关联流动法则，假设塑性势面与莫尔-库仑屈服面一致。按前人研究，此时应力特征线与速度滑移线夹角成 φ 角。而试验得知，岩土材料并不服从关联流动法则。广义塑性力学的出现，从理论上证明了塑性势面与莫尔-库仑屈服面之间成一定的角度，因而应按非关联流动法则来研究速度滑移线。文献 [31] 中导出了基于广义塑性力学（非关联流动法则）的速度滑移线方程，它与莫尔-库仑屈服条件无关，但应力特征线与莫尔库仑屈服条件有关，并证明了速度滑移线与应力特征线之间处处都成 $\varphi/2$ 角，如图 14a 所示。在图 14b 所示的简单应力场中，速度滑移线是圆弧线，应力特征线是对数螺旋线，在同一点上滑移线与特征线成 $\varphi/2$ 夹角。文献 [31] 中以平顶钝角楔体的 Prandtl 解为例，给出了基于非关联流动法则的极限荷载解与速度解，并指出基于非关联流动法则的极限荷载解与关联流动法则的极限荷

载解一致，而速度解是不同的。采用非关联法则，应力特征线（破坏面）与速度滑移线（速度矢量）成 $\varphi/2$ 角；而采用关联法则，两者间成 φ 角，即应力特征线与速度矢量成 φ 角。

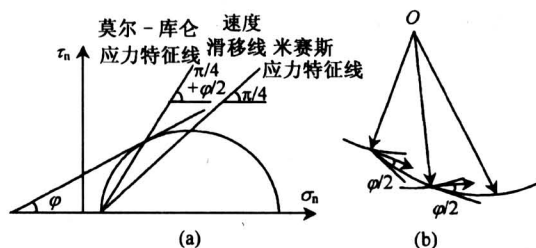


图 14 速度滑移线与应力特征线的关系

Fig. 14 Relationship between velocity slip line and stress characteristic line

基于传统塑性理论的极限分析方法，广泛应用于金属材料并获得了成功，W. F. Chen^[9] 等人又将其推广应用到岩土工程领域。由于金属材料与岩土材料的特性不同，尽管导出的岩土材料极限分析上限法的最终计算结果是合理的，但理论上却存在多种矛盾，如假设应力滑移线与速度滑移线重合，但在分析中却采用速度方向与应力滑移线成 φ 角；传统塑性理论中假设体积不变，但计算中却出现远大于实际的体积剪胀变形；假设塑性势面与屈服面相同，而实验证明，对于岩土材料两者并不相同，这些矛盾影响着岩土塑性理论的进一步发展。文献 [32] 建立了基于广义塑性力学的极限分析上限法，尽管其计算结果与现行方法的计算结果一致，但它消除了现行上限法在理论上存在的种种矛盾。

广义塑性力学还会对岩土动力模型、运动强化模型及各种新的岩土本构模型产生影响，有些已经被认可的方法也会受到影响而需进行某些改造。

12 结论

1) 广义塑性力学消除了经典塑性力学中的传统塑性势假设、正交流动法则假设与不考虑应力主轴旋转的假设, 从固体力学原理直接导出了广义塑性位势理论。

2) 广义塑性力学是基于分量塑性势面与分量屈服面的理论, 能反映应力路径转折的影响, 即应力增量对塑性应变增量的影响。

3) 广义塑性力学中的塑性势面是已知的, 因而它不会产生当前非关联流动法则中任意假定塑性势面引起的误差。

4) 广义塑性力学中要求屈服面与塑性势面对应, 而不要求相等, 避免了采用正交流动法则引起过大剪胀等不合理现象。由于它对屈服面硬化参量的选定有严格的规定, 保证了岩土材料在一定应力路径下求解的唯一性。

5) 广义塑性力学中, 按土性及其状态不同, 体积屈服面可分为压缩型、硬化压缩剪胀型与软化压缩剪胀型三类, 并依据试验首次提出了压缩剪胀型土体的体积屈服面, 可以科学地考虑土体的压缩与剪胀。剪切屈服面分为 q 方向及 θ_0 方向的剪切屈服面, 一般情况下可略去 θ_0 方向的剪切屈服面而只考虑 q 方向的剪切屈服面。

6) 广义塑性力学采用分量塑性势面与分量屈服面, 各屈服面都有各自与塑性势面相应的硬化参量。分量塑性势面被确定, 分量屈服面就唯一确定。给出了广义塑性力学的硬化定律和应力-应变关系。

7) 在应力增量分解的基础上, 建立了考虑应力主轴旋转的广义塑性位势理论, 从而可求出应力主轴旋转产生的塑性变形。

8) 分析屈服面的物理意义表明: 屈服条件是状态参数, 它与应力状态、应力历史及材性等状态量有关; 它也是试验参数, 只能由试验给出。

9) 广义塑性力学不仅可以作为岩土材料的建模理论, 而且还可以应用于诸如极限分析等土力学的诸多领域, 具有广阔的应用前景。

广义塑性力学为岩土塑性力学打下良好的理论基础, 但仍处于起步阶段, 研究范围只限于静力模型与应变硬化阶段, 尚有大量的后续工作要做。

参考文献

[1] 郑颖人, 沈珠江, 龚晓南. 岩土塑性力学原理[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2002

- [2] 郑颖人, 龚晓南. 岩土塑性力学基础[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1989
- [3] 殷宗泽. 一个土体的双屈服面应力-应变关系[J]. 岩土工程学报, 1988, 10(4): 64~71
- [4] 沈珠江. 土的弹塑性应力应变关系的合理形式[J]. 岩土工程学报, 1980, 2(2): 11~19
- [5] Anandarajah A, Sobhan K, Kuganenthira N. Incremental stress-strain behavior of granular soil [J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1995, 121(1): 57~68
- [6] 沈珠江. 理论土力学[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2000
- [7] Poorooshasb H B. Description of flow of sand using state parameters [J]. Computers and Geotechnics, 1989, 7(8): 195~218
- [8] Matsuoka H, Sakakibara K. A constitutive model for sands and clays evaluating principal stress rotation [J]. Soils and Foundations, 1987, 27(14): 73~78
- [9] 陈惠发(美). 极限分析与土体塑性[M]. 北京: 人民交通出版社, 1995
- [10] 郑颖人, 孔亮. 塑性力学的分量理论——广义塑性力学[J]. 岩土工程学报, 2000, 22(3): 269~274
- [11] 郑颖人. 岩土塑性力学的新进展——广义塑性力学[J]. 岩土工程学报, 2003, 25(1): 1~10
- [12] Zheng Yingren, Liu Yuanxue. Development of plastic potential theory and its application in constitutive models [A]. In: Yuan edit. Computer Methods and Advances in Geomechanics [C]. Rotterdam: Balkema, 1997. 941~946
- [13] 郑颖人. 广义塑性力学讲座(1)——广义塑性力学理论[J]. 岩土力学, 2000, 21(2): 188~191
- [14] 郑颖人, 段建立, 陈瑜瑶. 广义塑性力学讲座(2)——广义塑性力学中的屈服面与应力应变关系[J]. 岩土力学, 2000, 21(3): 305~308
- [15] 郑颖人, 陈瑜瑶, 段建立. 广义塑性力学讲座(3)——广义塑性力学的加卸载准则与土的本构模型[J]. 岩土力学, 2000, 21(4): 426~429
- [16] 杨光华. 土的本构模型的数学理论及其应用[D]. 北京: 清华大学水电系, 1998
- [17] 段建立. 砂土的剪胀性及其数值模拟研究[D]. 重庆: 后勤工程学院土木工程系, 2000
- [18] Hoke E, Brown E T. 岩石地下工程[M]. 连志升, 等译. 北京: 冶金工业出版社, 1986
- [19] Lade P V, Duncan J M. Single hardening constitutive model for frictional materials [J]. Computers and Geotechnics, 1988, 6(1): 24~32
- [20] Matsuoka H. Stress strain relationship of sands based on the mobilized plane [J]. Soils and Foundations, 1974, 14(2): 45~61

- [21] Nakai T, Matsuoka H. Constitutive equation for soils based on the extended concept of "Spatial Mobilized Plane" and its application to finite element analysis [J]. *Soils and Foundations*, 1983, 23(4): 87~105
- [22] 李广信. 土的三维本构关系的探讨与验证[D]. 北京: 清华大学水电系, 1985
- [23] 郑颖人, 陈瑜瑶. 岩土屈服条件的确定[A]. 栾茂田主编. 第七届全国岩土力学数值分析与解析方法讨论会论文集[C]. 大连: 大连理工大学出版社, 2001. 1~7
- [24] Sun D A, H Matsuoka. An elasto-plastic model for $c-\phi$ materials under complex loading [A]. In: Yuan edit. *Computer Methods and Advances in Geomechanics* [C]. Rotterdam: Balkema, 1997. 887~892
- [25] 段建立, 郑颖人. 一种基于广义塑性力学的硬化剪胀土模型[J]. *岩土力学*, 2000, 21(4): 360~362
- [26] 刘元雪. 含应力主轴旋转的土体的应力应变关系[D]. 重庆: 后勤工程学院土木工程系, 1997
- [27] 孔亮, 郑颖人, 王燕昌. 一个基于广义塑性力学的土体三屈服面模型[J]. *岩土力学*, 2000, 21(2): 108~112
- [28] Zheng Yingren, Yan Dejun. Mult-yield surface model for soils on the basis of test fitting [J]. *Computer Methods and Advances in Geotechnics*, 1994, (1): 97~104
- [29] 孔亮, 郑颖人, 姚仰平. 基于广义塑性力学的土体的次加载面循环塑性模型(I): 理论与模型[J]. *岩土力学*, 2003, 24(2): 141~145
- [30] 孔亮, 郑颖人, 姚仰平. 基于广义塑性力学的土体的次加载面循环塑性模型(II): 本构方程与验证[J]. *岩土力学*, 2003, 24(3): 317~321
- [31] 郑颖人, 王敬林. 关于岩土材料滑移线理论中速度解的讨论[J]. *水利学报*, 2001, (6): 1~7
- [32] 王敬林, 林丽, 郑颖人. 关于岩土材料极限分析上限法的讨论[J]. *岩石力学与工程学报*, 2001, 20(Supp 1): 886~889

Generalized Plastic Mechanics and Its Application

Zheng Yingren¹, Kong Liang²

(1. *Logistical Engineering University, Chongqing 400041, China*;

2. *Solid Mechanics Institute, Ningxia University, Yinchuan 750021, China*)

[Abstract] The development of geotechnical plasticity is reviewed and some problems of applying the classic plastic mechanics to geomaterials are analyzed, and then its three hypotheses not fit for the deformation mechanism of geomaterials are pointed out. By giving up the three hypotheses, a generalized plastic potential theory can be obtained from solid mechanics directly, and then the traditional plastic mechanics can be changed to a more generalized plastic mechanics, namely generalized plastic mechanics (GPM). The GPM adopts the component theory as theoretical base, so it can reflect the influence of transition of stress path. The unreasonable phenomena such as excessive dilatancy caused by adopting the normality-flow law can be avoided, and the error caused by the arbitrary assumption of plastic potential surfaces cannot be produced. The yield surface theory, hardening laws and stress-strain relations of GPM are given, and a GPM including the rotation of principal stress axes is also established. It is pointed out that the yield condition is a state parameter as well as a test parameter, and it can only be given by test. After the practical application, it is shown that the GPM can not only be applied to the modeling theory of geomaterials but also to other fields of geomechanics, such as limit analysis.

[Key words] geotechnical plastic mechanics; generalized plastic mechanics; plastic potential; yield surface; constitutive model