

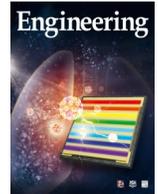


ELSEVIER

Contents lists available at ScienceDirect

Engineering

journal homepage: [www.elsevier.com/locate/eng](http://www.elsevier.com/locate/eng)



Research  
Metamaterials—Article

## 基于刚性与非刚性 Square-Twist 胞元混合排布的折纸超材料设计与性能编程研究

马家耀<sup>a,b,#</sup>, 臧世玺<sup>a,b,#</sup>, 陈焱<sup>a,b,\*</sup>, 由衷<sup>c,\*</sup>

<sup>a</sup> Key Laboratory of Mechanism Theory and Equipment Design of the Ministry of Education, Tianjin University, Tianjin 300350, China

<sup>b</sup> School of Mechanical Engineering, Tianjin University, Tianjin 300350, China

<sup>c</sup> Department of Engineering Science, University of Oxford, Oxford OX1 3PJ, UK

### ARTICLE INFO

#### Article history:

Received 28 September 2021

Revised 28 January 2022

Accepted 17 February 2022

Available online 8 June 2022

#### 关键词

折纸超材料

超材料

square-twist 折纸

非周期性排布

可编程性

### 摘要

相比由完全相同的胞元组成的超材料,由类型和性能均不同的胞元形成的超材料能够实现更大的力学性能调控范围。然而,目前关于此种超材料的几何设计和性能编程方法鲜有报道。本文通过将一系列不同类型的 square-twist 折纸胞元进行空间排布,设计了一种新型折纸超材料。首先建立了超材料胞元的空间排布规则,保证了相邻胞元山-谷线折痕的几何匹配。进而进行了双轴拉伸实验,实验结果表明该新型超材料的变形能、最大刚度和初始峰值力均可由组成胞元的对应特性叠加得到,并且通过改变胞元类型、数量、几何参数、材料参数可以实现对超材料力学性能的大范围编程调控。此外,对具有固定胞元数量的超材料,通过改变山-谷线折痕的排布可以得到胞元类型与数量不同的一系列超材料,从而实现根据具体需求的力学性能重编程。本工作为可编程折纸超材料的设计提供了新的思路,在机械等工程领域具有广阔的应用前景。

© 2022 THE AUTHORS. Published by Elsevier LTD on behalf of Chinese Academy of Engineering and Higher Education Press Limited Company. This is an open access article under the CC BY-NC-ND license (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).

## 1. 引言

机械超材料是指一类具有天然材料罕见物理性能的新型人造材料,其奇特性源于微结构(胞元)和基本材料,因此易实现可编程和可调控的力学性能[1–3]。起初,一些学者通过特殊的胞元设计,使机械超材料实现了负泊松比效应[4–7]。近几年,随着设计方法和增材制造技术的进步,出现了多种非常规力学性能的超材料,如双稳态和多稳态[8–11]、可调热膨胀系数[12–13]、五模式[14]、高比刚度[15–16]、刚度可编程[17–18]和刚度可调控[19]超材料。

折纸是一种将二维平面按照特定山线折痕和谷线折痕折叠从而形成三维艺术品的艺术活动。由于优越的形状可转换性、丰富的折叠模态、灵活可变的设计参数和易于制造的特点,使折纸成为一种用于高效构建超材料微结构的方法之一。根据变形特征,折纸可分为刚性和非刚性两大类。其中,刚性折纸的折纸面在围绕折痕转动的折叠过程中其内部不产生任何变形,其力学响应完全由折痕决定。如 Miura 和基于 Miura 设计的折纸胞元,是目前超材料设计和研究中最普遍的刚性折纸[20–23]。刚性折纸构造简单,但仅通过折痕旋转产生的低应变能,使整体结构具有刚度较低的固有缺陷。在胞元中引入缺陷[17,24]或几何梯

\* Corresponding authors.

E-mail addresses: yan\_chen@tju.edu.cn (Y. Chen), zhong.you@eng.ox.ac.uk (Z. You).

# These authors contributed equally to this work.

2095-8099/© 2022 THE AUTHORS. Published by Elsevier LTD on behalf of Chinese Academy of Engineering and Higher Education Press Limited Company. This is an open access article under the CC BY-NC-ND license (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).

英文原文: *Engineering* 2022, 17(10): 82–92

引用本文: Jiayao Ma, Shixi Zang, Yan Chen, Zhong You. The Tessellation Rule and Properties Programming of Origami Metasheets Built with a Mixture of Rigid and Non-Rigid Square-Twist Patterns. *Engineering*, <https://doi.org/10.1016/j.eng.2022.02.015>

度[23,25]等设计,一定程度上可改善这种缺陷。然而,改善后刚性折纸胞元失去了原有的普适性折叠模式、严格的运动学理论模型和可编程的性能。与刚性折纸相反,非刚性折纸在折痕旋转时,折纸面与折痕处同时变形。Kresling [18,26]和 Resch [27–28]胞元是两种典型的非刚性折纸,其中折纸面的变形往往会较大程度地提高结构的整体刚度,扩大应变能分布,从而增强超材料的力学性能。目前对于刚性折纸和非刚性折纸的研究已有许多,而已报道的折纸超材料通常由单一类型的刚性或非刚性折纸胞元周期性排布而成,无法实现刚性和非刚性结合的宽范围力学性能调控。

针对这一问题,本文结合刚性和非刚性折纸胞元设计超材料微结构,提出了一种超材料排布设计方法。通过改变不同胞元类型在超材料中的排布比例,对所设计的超材料的力学性能在传统非刚性和刚性超材料作为上下区间的范围内进行调控。而不同种类的折纸胞元通常有不同的折痕数量和山-谷线排布,当构成超材料时,相邻胞元之间可能出现不匹配的情况。因此,目前的折纸超材料大都采用完全相同的折纸胞元,或者由折痕排布相同但几何参数不同的胞元排布而成[23,29]。作为目前研究较少的折纸类型之一, square-twist 折纸胞元[30–32]不仅折痕位置分布相同,而且具有多种折痕山-谷线分布类型。相同折痕位置的分布为不同胞元的阵列排布提供了可能性,同时保证了超材料在平面和折叠状态的几何匹配性。通过改变相邻胞元的折痕山-谷线排布类型,可以调整折叠模式,还可实现不同的刚度[33–35]。因此,由不同刚度基本胞元组成的混合折纸胞元有利于实现折纸超材料力学性能的可编程性。

利用 square-twist 折纸胞元这种特性,本文提出了一种新的超材料[30–32]。已有研究[36]表明, square-twist 折纸胞元有4种山-谷线折痕排布形式(图1),其中包含两种非刚性(type-1、type-2)和两种刚性(type-3、type-4)胞元。每一种胞元都具有不同的变形模式和力学性能[37–38]。相关研究表明,由图1中type-3胞元排布设计的超材料实现了可调控的负泊松比效应[39]。本文将刚性和非刚性 square-twist 基本胞元结合,提出了一种新型混合排布的胞元,通过改变基本胞元的组合类型和排布比例,实现了折纸超材料一定范围内力学性能(如变形能、承载力、刚度)的可编程性。

本文的章节内容分布如下:第二部分介绍了不同几何参数的刚性和非刚性 square-twist 胞元构成超材料的排布规则;第三部分设计并制备了一系列超材料,开展了准静态拉伸实验,得到了不同试样的变形模态和荷载位移动应;第四部分详细分析了实验结果,讨论了超材料的整体

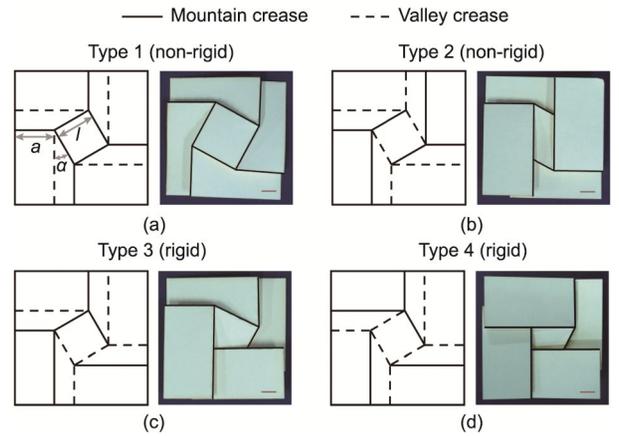


图1. square-twist 胞元的山-谷线折痕分布和折叠构型。(a) type-1; (b) type-2; (c) type-3; (d) type-4 (比例尺: 5 mm)。其中,山、谷线折痕分别用实线和虚线表示。

力学性能、胞元变形和性能编程策略之间的关系;最后,第五部分总结了本研究的主要结论。

## 2. 空间排布规则

为了得到 square-twist 超材料的空间排布规则,首先研究了相同胞元排布的设计,基本参数如图1(a)所示,包括方面板边长 $l$ 、长方形边长 $a$ 、角度 $\alpha$ 。这里仅考虑了图1(a)~(c)中非刚性的type-1和type-2,及刚性的type-3三种胞元设计,图1(d)中刚性的type-4与type-3具有相似的力学响应,因此没有考虑在内。上述的三种胞元本身及其翻转胞元(即山-谷线折痕反向排布)都可以作为排布超材料的基本胞元。值得注意的是,type-2和type-3胞元的翻转胞元分别与type-2、type-3本身旋转 $90^\circ$ 和 $180^\circ$ 后形成的胞元相同,而type-1胞元不具备这种特点。因此,type-1胞元的翻转胞元在本文超材料排布设计中作为一个单独的胞元构型,采用type 1R表示。4种胞元如图2所示,根据胞元构型的旋转对称性,图2(a)上部框中的4个胞元定义为左手性胞元,下部框中的定义为右手性胞元。此外,同一个胞元构型的左(右)手性胞元并不相同,不能通过右(左)手性胞元旋转或翻转得到。综上,由三种 square-twist 构型可得到图2所示的8种胞元:分别表示为type-1、type-2和type-3胞元的左手性和右手性构型 $L_i$ 、 $R_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ),及type-1翻转胞元的左手性和右手性构型 $L'_1$ 、 $R'_1$ 。

根据8种胞元的折痕构造,建立了平面状态下相邻胞元排布的匹配性条件。由图2可知,每个胞元的边线都与一条长折痕和短折痕垂直相交。因此,当两个相邻胞元由一条共边线排布时,与共边线垂直相交的两条长折痕和短

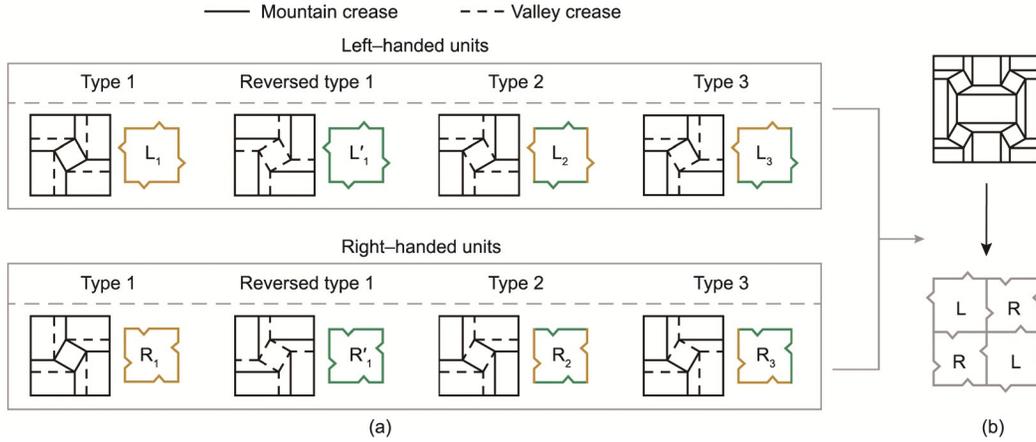


图2. 相同几何参数 square-twist 胞元的空间排布规则。(a) 4种基本胞元的左手性和右手性构型的山-谷线折痕分布和空间排布简图；(b) 左手性和右手性胞元排布的 $2 \times 2$ 超材料。

折痕必须共线且具有相同的山-谷线排布，以构成连续的折痕。为了便于超材料的排布设计，本文首次采用了不同颜色和锯齿边线构成的拼图胞元（图2），研究四阶顶点胞元的折纸超材料[29]。每个拼图胞元的边线都由对应的彩色锯齿边线表示。其中，凸形和凹形三角分别表示左手性胞元和右手性胞元的长短折痕位置排布。当短（长）折痕分别为山（谷）线折痕时，拼图胞元边线用黄色表示，反之用绿色表示。采用上述空间排布规则有利于快速判断相邻胞元的可连接性（拼图边缘颜色一致且凹凸互补时即可拼接）。

超材料可通过8个基本拼图胞元的空间排布规则设计，由图2（b）中 $2 \times 2$ 的正方形超材料可知，4个基本胞元并不一定是完全相同的，但左手性拼图胞元周围一定为右手性胞元。在 $2 \times 2$ 超材料排布中，有4条相邻重合边，可分别选择黄色或绿色边，形成 $16$ （ $2^4$ ）种可能的组合。此外，在每一个基本胞元中，都有左手性和右手性胞元两种类型可选择，从而再产生 $16$ （ $2^4$ ）种可能的排布方式。因此，所有可能的拼图形成的 $2 \times 2$ 超材料组合共有 $256$ 种（ $2^4 \times 2^4$ ）。去掉其中能够通过旋转得到的重复组合后，基于 type-1 胞元（ $L_1, R_1, L'_1, R'_1$ ）和 type-2 胞元（ $L_2, R_2$ ），可得到图3所示的136种不同排布组合。值得注意的是，基于 type-3 胞元（ $L_3, R_3$ ）排布的 $2 \times 2$ 超材料数量能够通过数量4减去另外两种类型的胞元数目之和得到。如图2（b）所示，当采用单一胞元拼接时，排布后超材料的相邻胞元间具有镜像对称，且拼接处折痕布局相同的特点，唯一的不同之处在于山-谷线折痕的分布相反。这种现象表明，在任意 $m \times m$ 的超材料设计中（ $m$ 为正整数），采用相同预折痕的胞元即可得到所有超材料设计，甚至仅通过展开和重新折叠就能实现从一种拼接设计到另一种拼接设计的转化。

基于以上 $2 \times 2$ 的排布，更大超材料可通过以下两种

方式建立：第一种是直接法，根据所建立的排布规则依次拼接每一个胞元，或以136种 $2 \times 2$ 的超材料为二阶胞元创建更大的超材料。理论上，排布的超材料数量将随着胞元数量的增加而呈指数级增加， $m \times m$ 个胞元能够拼接出 $2^{m(m+2)}$ 种方形超材料（见附录A中的S1部分）。虽然这种方法能够拼出所有的超材料设计，使排布的超材料数量和种类极具多样性，但设计过程复杂。从力学的角度来看，将一个胞元翻转或镜像，并不会影响其折叠变形，且经过翻转或镜像的不同胞元可以相同，没有必要确定出所有可能的排布设计。在研究超材料力学性能时，可以将8种胞元分为第一组（ $L_1, R_1, L'_1, R'_1$ ）、第二组（ $L_2$ 和 $R_2$ ）和第三组（ $L_3$ 和 $R_3$ ），且只需考虑每一组中的排布数量。因此，大量具有不同胞元组合的排布设计中只有小部分需要进行性能的编程设计。例如，仅设计15个二阶超材料胞元即可排布出9种四阶超材料，其中 type-1 胞元数量比例可从0%变化到100%，间隔为25%（图4）。在图4所有二阶排布的超材料中，尽管折痕位置相同，但可设置不同的山-谷线折痕，即在某特定位置处，一种二阶排布的超材料中是山线折痕，而另一种中可表现为相反的谷线折痕。

采用这种排布规则，不仅可采用相同几何参数的基本胞元，还可引入几何梯度设计。仍以 $2 \times 2$ 超材料排布为例，通常情况下，4个胞元可以具有不同的边长 $l_i$ 和扭转角度 $\alpha_i$ （ $i = 1, 2, 3, 4$ ）。然而，为了确保相邻胞元公共边的匹配条件，图5中所示的胞元几何参数应满足如下方程：

$$\begin{aligned}
 l_1 \cdot \sin \alpha_1 &= l_2 \cdot \sin \alpha_2 = l_3 \cdot \sin \alpha_3 = l_4 \cdot \sin \alpha_4 \\
 a_1^1 &= a_3^1, \quad a_1^3 + l_1 \cdot \cos \alpha_1 = a_3^3 + l_3 \cdot \cos \alpha_3 \\
 a_1^2 &= a_2^2, \quad a_1^4 + l_1 \cdot \cos \alpha_1 = a_2^4 + l_2 \cdot \cos \alpha_2 \\
 a_2^3 &= a_4^3, \quad a_2^1 + l_2 \cdot \cos \alpha_2 = a_4^1 + l_4 \cdot \cos \alpha_4 \\
 a_3^4 &= a_4^4, \quad a_3^2 + l_3 \cdot \cos \alpha_3 = a_4^2 + l_4 \cdot \cos \alpha_4
 \end{aligned} \quad (1)$$

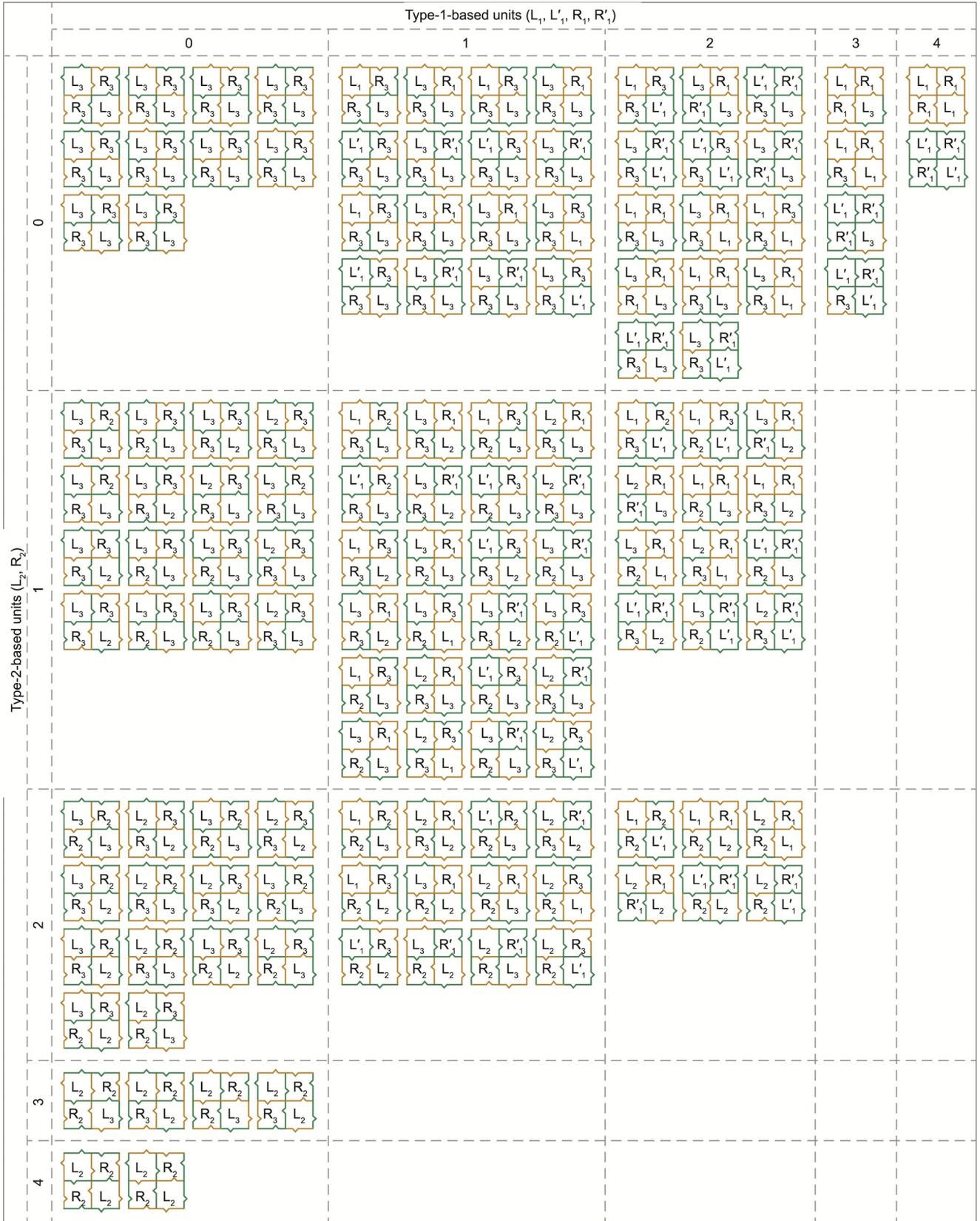


图3. 基于 type-1 和 type-2 胞元排列的 136 种  $2 \times 2$  超材料。

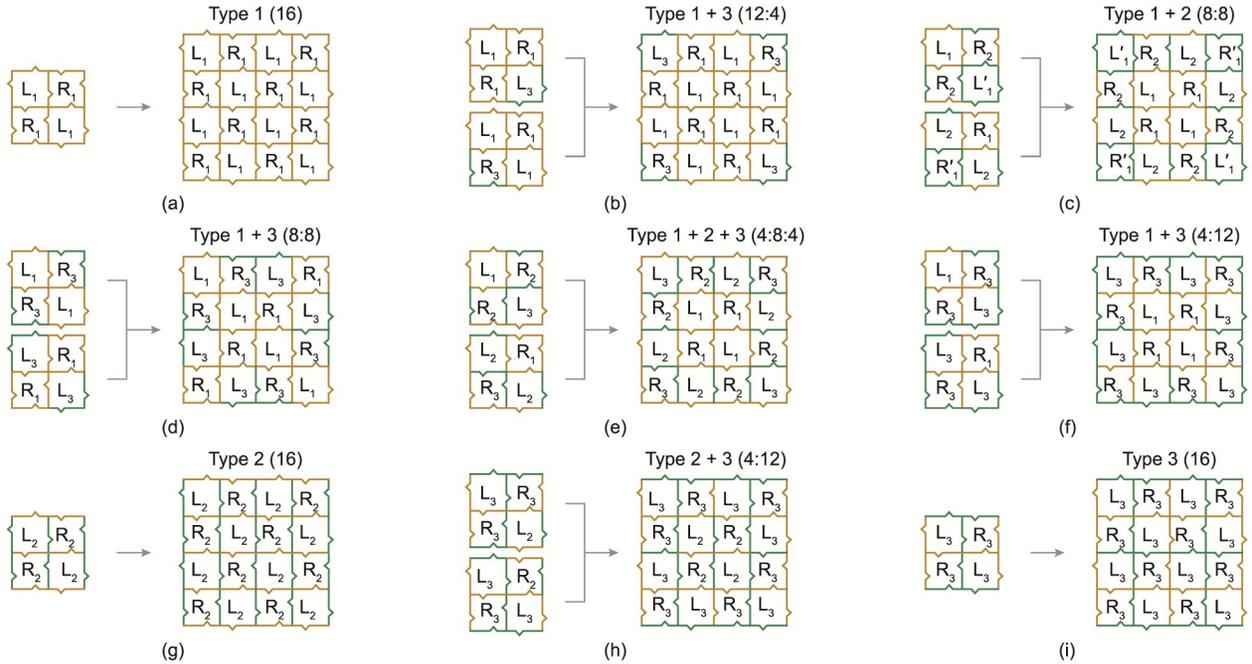


图4. 9组不同type-1胞元数量的 $4 \times 4$ 超材料排布。(a) 16个type-1胞元；(b) 12个type-1和4个type-3胞元；(c) 8个type-1和8个type-2胞元；(d) 8个type-1和8个type-3胞元；(e) 4个type-1、8个type-2和4个type-3胞元；(f) 4个type-1和12个type-3胞元；(g) 16个type-2胞元；(h) 4个type-2和12个type-3胞元；(i) 16个type-3胞元。

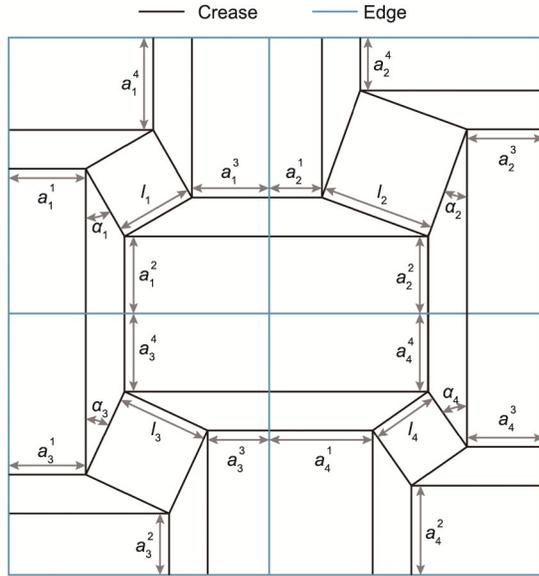


图5. 具有几何梯度的 $2 \times 2$ 的超材料排布。

值得注意的是，当梯度超材料排布时，胞元的4条边长 $a_i^1$ 、 $a_i^2$ 、 $a_i^3$ 、 $a_i^4$ 不相等，需要单独计算。根据相同胞元的超材料排布规则，即能设计更多种类的梯度超材料。

### 3. 制造和实验

为了研究超材料的力学性能，制备并测试了9组不同

排布的 $4 \times 4$ 超材料试件（图4）。胞元的几何参数： $l = a = 16.3 \text{ mm}$ ， $\alpha = 30^\circ$ ；未折叠状态的 $4 \times 4$ 超材料尺寸为 $218.8 \text{ mm} \times 218.8 \text{ mm}$ 。如图6所示，试件采用 $0.4 \text{ mm}$ 厚的PET制备，折痕处采用Trotec Speedy 300激光切割机（Speedy 300, Trotec, Austria）穿孔，间隔为 $1.5 \text{ mm}$ ，孔洞大小为 $0.8 \text{ mm} \times 3.0 \text{ mm}$ 。通过手工折叠，使折痕转变为完全折叠状态，并采用实验室研制的水平准静态拉伸实验机（加载位移为 $800 \text{ mm}$ ，力传感器量程为 $300 \text{ N}$ ）开展拉伸实验。为了使拉伸试样均匀变形，图6（b）设计了由4个线性导轨和8个滑动夹具组成的方形机构，并在方形试件的4个角和边长中心点进行加载。在实验过程中，以 $0.2 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$ 的拉伸速率加载，直至试件对角线长度达到 $306 \text{ mm}$ ，此时超材料完全展开，反力值迅速增加。采用数码相机（Canon 70D, Japan）以25帧每秒记录整个拉伸变形过程，并通过实验机采集力-位移曲线。此外，由力-位移曲线计算了胞元的变形能 $U$ 、初始峰值力 $F_{\max}$ 和最大刚度 $K_{\max}$ 三个关键力学性能指标。其中，变形能为展开过程中拉伸力做的功；最大刚度为力-位移曲线中，初始峰值达到前的最大切线斜率[37]。实验过程中对每个试样类型重复测试三次，以减小实验偶然性误差。

除了对超材料拉伸外，根据文献[37–38]的方法，对type-1、type-2、type-3胞元也开展了实验研究，单个胞元试样与超材料中胞元的几何参数和制备过程相同。其中，胞

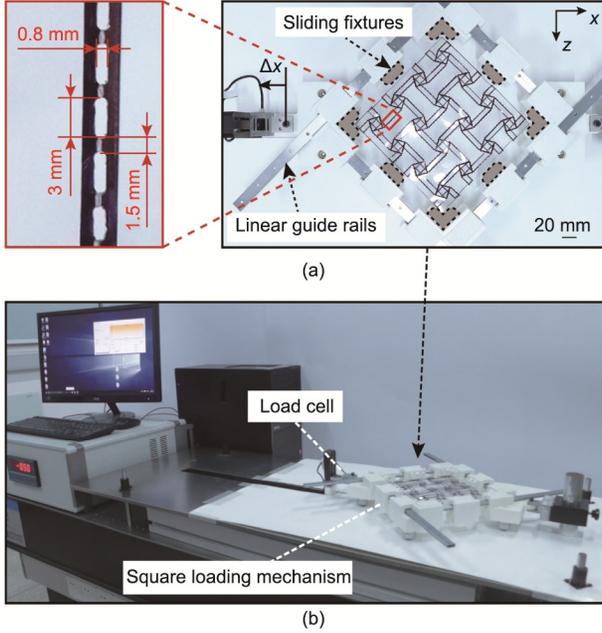


图6. 超材料的拉伸实验。(a) 试件折痕和方形加载机构设计；(b) 实验设置。

元面板的弯曲刚度和折痕的旋转刚度分别为  $k_f = 0.70 \text{ N} \cdot \text{rad}^{-1}$  和  $k_c = 0.44 \text{ N} \cdot \text{rad}^{-1}$ ，屈服旋转角度为  $\Delta\varphi_y = 22.92^\circ$ 。图7 (a) 为三个胞元实验的无量纲化荷载位移曲线，图7 (b) ~ (d) 为三种胞元的无量纲化变形能  $U/(k_f l)$ 、初始峰值荷载  $F_{\max}/k_f$  和最大刚度  $K_{\max}/k_f$ 。不难发现，type-1 胞元的三种力学性能均高于其他两种。此外，采用文献[37-38]的理论公式，分别对 type-1、type-2 和 type-3 胞元的三种性能进行了预测。如图7 (b) ~ (d) 所示，理论预测与实验数据吻合较好，此结果可在超材料的性能编程中使用。

## 4. 结果和讨论

### 4.1. 均匀超材料的力学性能

图8为相同胞元均匀排布构成的三种超材料的无量纲化反力 ( $F/k_f$ ) -位移 ( $\Delta x/\Delta x_{\max}$ ) 曲线和变形过程。其中，图8 (a) 为 type-3 胞元排布的超材料，在拉伸过程中，内部所有胞元逐渐展开，首先使反力值缓慢上升，然后出现较长的平台。同样，图8 (b) 为 type-2 胞元排布的超材料，胞元随拉伸位移的增大同步展开，表现出了光滑的力-位移曲线。

图8 (c) 为 16 个 type-1 胞元排布的超材料实验结果，其力学响应与图7 (a) 单个胞元相似。首先表现出了较高的初始峰值力；随后，由于胞元的突然解锁展开，反力值快速下降；最后，由于折痕逐渐旋转展开，出现了一个短的反力平台。与 type-2 和 type-3 胞元均匀排布的超材料

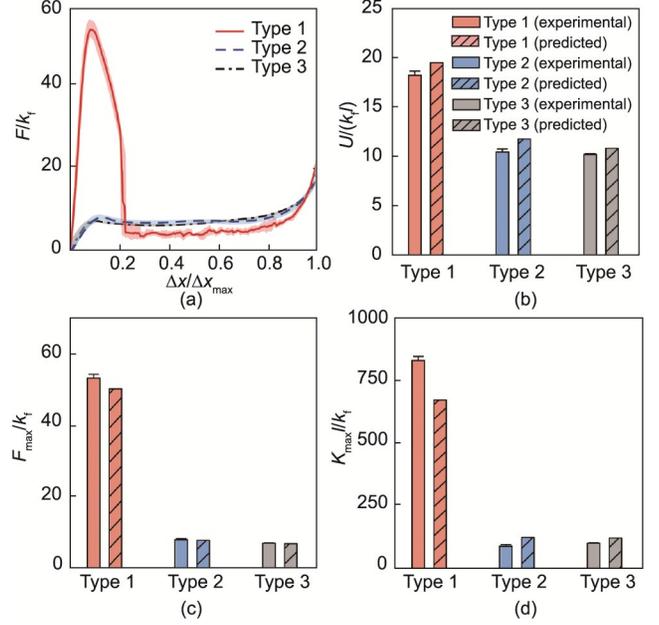


图7. 三种胞元的力学性能。(a) 无量纲化反力 ( $F/k_f$ ) -位移 ( $\Delta x/\Delta x_{\max}$ ) 曲线。在每一条曲线中，实线表示三组实验的平均值，阴影区域表示实验的标准误差；(b) ~ (d) 实验和预测的无量纲化变形能  $U/(k_f l)$ 、初始峰值荷载  $F_{\max}/k_f$ 、最大刚度  $K_{\max}/k_f$ 。通过实验测得，type-1、type-2、type-3 胞元中方形和梯形面的二面角分别为  $19.6^\circ$ 、 $25.2^\circ$ 、 $28.3^\circ$ 。

变形相比，此超材料表现出了明显的依次变形。为了解释这种现象，根据胞元在超材料中的排布位置，将其内部不同类型的胞元划分为以下四部分： $T_{1-i}$  部分位于图8中所示4个角处的紫色框，每个胞元有两条边与周围胞元相连接，另外两条为自由边； $T_{1-ii}$  部分排布在超材料顶部和底部的黄色框中，其中胞元的三条边分别与相邻胞元连接，并位于长方形面的长边处；如图8中超材料左右两侧蓝色框所示， $T_{1-iii}$  部分中的胞元也有三条边线与相邻胞元连接，但这些胞元位于长方形面的短边； $T_{1-iv}$  部分位于正中的红色框内，内部胞元的4条边都与相邻胞元连接。16个 type-1 胞元排布的超材料变形过程可分为5个阶段（图8）。第一个阶段为开始加载到模式I，所有的胞元同时开始受拉至初始反力峰值出现。第二个阶段为模式I到模式III的变形过程，超材料左侧和右侧相邻的  $T_{1-i}$  和  $T_{1-iii}$  胞元形成的长矩形面板开始向内弯曲（模式II和模式III），使反力略微下降，此时所有的胞元依然处于折叠的锁定状态。值得注意的是，右侧的矩形面板弯曲比左侧早，产生的原因是由于制造过程中的几何缺陷导致的。第三个阶段处于模式III和模式IV之间，8个  $T_{1-ii}$  和  $T_{1-iv}$  胞元都开始展开（模式IV），此时反力在产生一个小峰值后急剧降低。第四个阶段处于模式IV和模式V之间，模式V中的8个  $T_{1-i}$  和  $T_{1-iii}$  胞元快速展开，反力进一步减小。最后，第五个阶段（模式V至模式VI）中所有胞元完全展

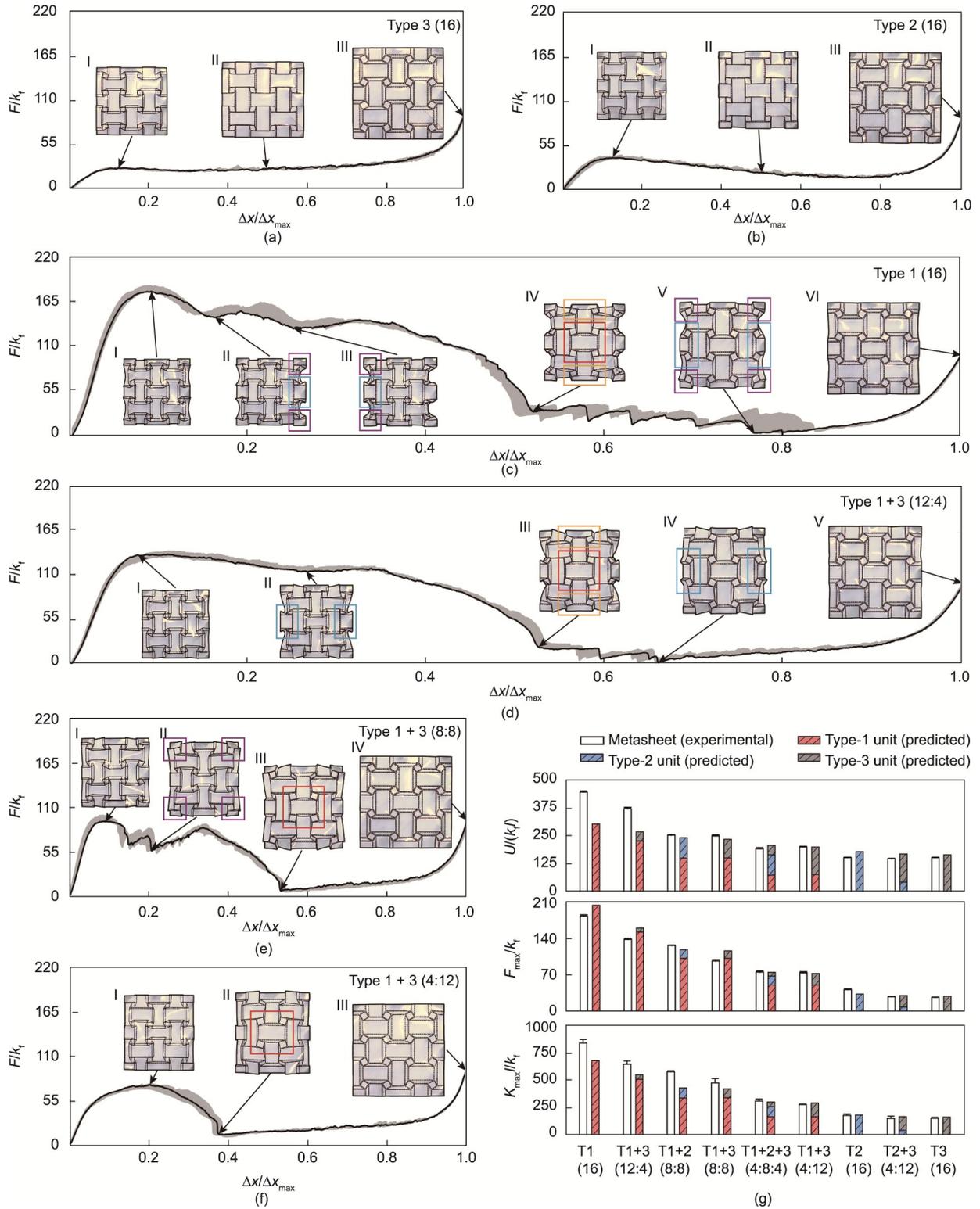


图8. 超材料的变形过程和力学性能。(a) ~ (c) 由 type-3、type-2、type-1 胞元均匀排布的超材料的无量纲化反力-位移曲线和关键模式；(d) ~ (f) 分别由 12 个、8 个、4 个 type-1 胞元和 type-3 胞元构成的超材料的无量纲化反力-位移曲线和关键模式；(g) 实验和理论预测的变形成能、初始峰值力、最大刚度。通过实验测定，理论预测的 type-1、type-2、type-3 胞元中梯形和矩形面的初始二面角分别采用  $19.6^\circ$ 、 $20.5^\circ$ 、 $24.3^\circ$ 。

开，逐渐拉伸为平面，反力再次上升。

为了预测此超材料的变形成能、初始峰值力和最大刚度，以非线性弹簧表示排布的胞元，利用串联和并联的装

配弹簧表示超材料。根据图 7 (b) ~ (d) 中胞元的理论预测，超材料的变形成能可由胞元的简单叠加得到。由于超材料由  $4 \times 4$  胞元排布形成，因此理论预测的超材料初始

峰值力和最大刚度可由各个胞元的峰值力和最大刚度相加,并分别除以4和 $4^2$ 得到。图8(g)对比了相同胞元排布的三个超材料的实验和理论预测,结果表明,实验和理论预测总体上吻合较好。对于由type-1胞元排布的超材料,预测的应变能普遍低于实验,主要原因为实验中左右侧矩形板发生额外弯曲,这在水平方向上是观察不到的。

#### 4.2. 混合超材料的力学性能

上一节讨论了相同胞元均匀排布的超材料的力学性能,本节详细分析了由不同胞元混合排布的超材料。首先,分析了图4(b)中由12个type-1胞元和四角处的4个type-3胞元排布设计的超材料。如图8(d)所示,此混合超材料与type-1胞元均匀排布的超材料有相似的变形过程。在拉伸初期均匀变形,随后左右两侧的矩形面向内弯曲,8个 $T_{1-ii}$ 和 $T_{1-iv}$ 胞元先展开,最后4个 $T_{1-iii}$ 胞元展开。此外,混合超材料中的type-1胞元与均匀超材料type-1胞元变形过程也相似,type-3胞元的展开过程基本连续,表明type-1胞元的变形行为主要由胞元在超材料中的位置决定。由于此混合超材料与对应均匀超材料变形过程相似,因此力学响应曲线形状也基本相同。唯一的不同之处在于,4个type-3胞元的存在降低了混合超材料的反力值。

图4(d)中的混合超材料由8个type-1的胞元和8个type-3的胞元排布而成,其变形过程如图8(e)所示。四角处的 $T_{1-i}$ 胞元具有较小的边缘约束,因此比中间的4个 $T_{1-iv}$ 胞元提前展开,使力-位移曲线中出现两个明显的局部反力峰值。值得注意的是,由于4个 $T_{1-i}$ 胞元不同时展开,使模态I和模态II之间也存在一个反力峰值,且随着加载位移的增大,此混合超材料没有出现上述向内弯曲的长矩形面。对中心由4个type-1胞元、周围12个type-3胞元排布的混合超材料[图4(f)],中心处type-1胞元同时展开,使力-位移曲线与单个type-1胞元相似[图8(f)]。

采用相同的方法,图8(g)对比并计算了6种混合超材料的变形能、初始峰值力和最大刚度。结果表明,实验与理论吻合较好,胞元的预测结果能够准确反映超材料的性能。

#### 4.3. 性能编程

上述研究已表明,超材料的应变能、初始峰值力、最大刚度可通过相应的胞元性能叠加得到。而胞元的性能在理论上是可预测的,因此,设计超材料中不同胞元的比例,可实现超材料性能的初步编程,进一步调整胞元的几何参数和材料参数可对超材料性能进行精细化调控。本文对一系列具有相同几何参数和材料参数、不同type-1和

type-3胞元数量排布的 $4 \times 4$ 超材料进行了验证(见附录A中的S2节)。其中,图9(a)~(c)为type-1胞元数量为0~16的超材料应变能、峰值力和最大刚度的变化。值得注意的是,随着type-1胞元数量的增加,三个力学性能指标呈阶梯式线性增加。此外,由于这种 $4 \times 4$ 的超材料可以采用相同的折痕布局制备(详见第2节),因此采用不同的折叠方式,可对相同的超材料重新编程,实现特定的需求。例如,可以先将超材料折叠为type-3胞元均匀排布的设计,以获得较低的力,然后展开再次折叠为仅含有type-1胞元排布的设计,增大其初始峰值力。与文献[32]类似,这种重构(重编程)策略可应用于设计频率重构的天线,采用此种排布设计,可扩大天线的调控范围和重构类型。

通过调整超材料的几何参数和材料参数,可实现天线在宽频带上的连续微调。图9(d)~(f)为 $4 \times 4$ 排布超材料中胞元边长比例 $a/l$ 、type-1胞元数量与三种关键力学性能指标的变化关系。结果表明,当 $a/l$ 在0.5~4范围内增加时,无论type-1胞元数量如何变化,三种力学性能指标均增大。图9(a)~(c)中的任意值都可通过选择合适的 $a/l$ 参数得到,如图9(a)所示,当type-1胞元数量为8和9时,无量纲化应变能 $U/(k_f l)$ 分别为223.6和234.4。此时,只需设计8个type-1胞元,将 $a/l$ 由1增加为1.06,或者设计9个type-1胞元,将 $a/l$ 由1减少为0.94,可得到二者应变能之间的平均值,即 $U/(k_f l) = 229.0$ 。

图9(g)~(i)为几何参数 $\alpha$ 的影响。与胞元边长比例 $a/l$ 相似,随着 $\alpha$ 从 $20^\circ$ 增加为 $45^\circ$ ,三种性能均增加。然而,仅在 $\alpha$ 大于 $30^\circ$ 时,增加type-1胞元数量才对初始峰值力和最大刚度有较大影响。主要原因为角度较小时,折叠胞元的扭曲变形较少,使type-1胞元的初始峰值力和最大刚度减小。

最后,折痕旋转刚度 $k_c/k_f$ 在0.25~0.75之间变化时,对超材料弯曲刚度的影响如图9(j)~(l)所示。 $k_c/k_f$ 的变化对超材料的总变形能有较大的影响,对初始峰值力和最大刚度的影响较小。通过调整折痕旋转刚度,同样可得到图9(a)~(c)中相邻阶梯力学性能指标变化间的任意值。在本文的讨论中,假设所有超材料中的胞元均具有相同几何形状和刚度,采用不同胞元类型和设计参数的组合,超材料可满足特定的力学性能指标需求。例如,在能量吸收装置设计中,需要低峰值力和高能量吸收,可以减少易产生高峰值力的type-1胞元数量,增大胞元边长比例 $a/l$ 、角度 $\alpha$ 和折痕旋转刚度 $k_c/k_f$ ,使能量吸收最大化。

此外,采用梯度设计可进一步增强超材料的性能。在某种工程应用,如维和行动中的非致命炮弹设计中,梯度

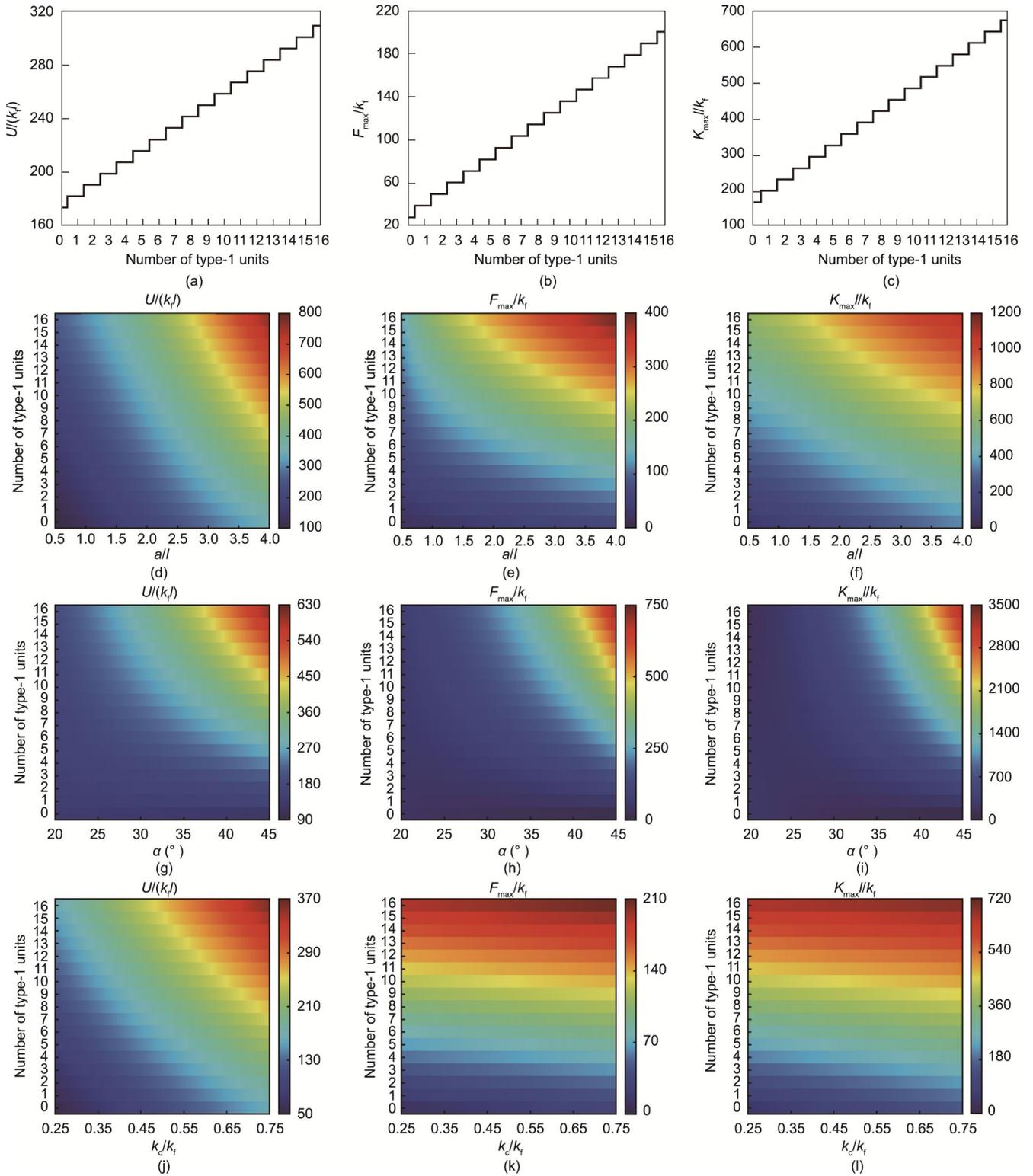


图9.  $4 \times 4$  超材料的力学性能可编程性。(a) ~ (c) 由1~16个type-1胞元排布的超材料的无量纲化应变能、初始峰值力和最大刚度。(d) ~ (l) 具有不同几何参数和材料参数超材料的无量纲化应变能、初始峰值力、最大刚度：(d) ~ (f)  $\alpha = 30^\circ$ 、 $k_c/k_f = 0.63$ 、 $a/l$  为0.5~4；(g) ~ (i)  $a/l = 1$ 、 $k_c/k_f = 0.63$ 、 $\alpha$  为20°~45°；(j) ~ (l)  $a/l = 1$ 、 $\alpha = 30^\circ$ 、 $k_c/k_f$  为0.25~0.75。

刚度能够提高材料和结构的功能性[40]。超材料中引入适当的几何梯度设计，能够实现有序的变形模式和梯度响应。为了研究梯度设计的超材料，根据章节3介绍的方

法，设计、制备并测试了type-1胞元排布的 $4 \times 4$ 梯度超材料。设计参数和拉伸荷载作用下的力学响应如图10所示，超材料左右两侧 $\alpha$ 值较小的8个胞元（紫色框中所

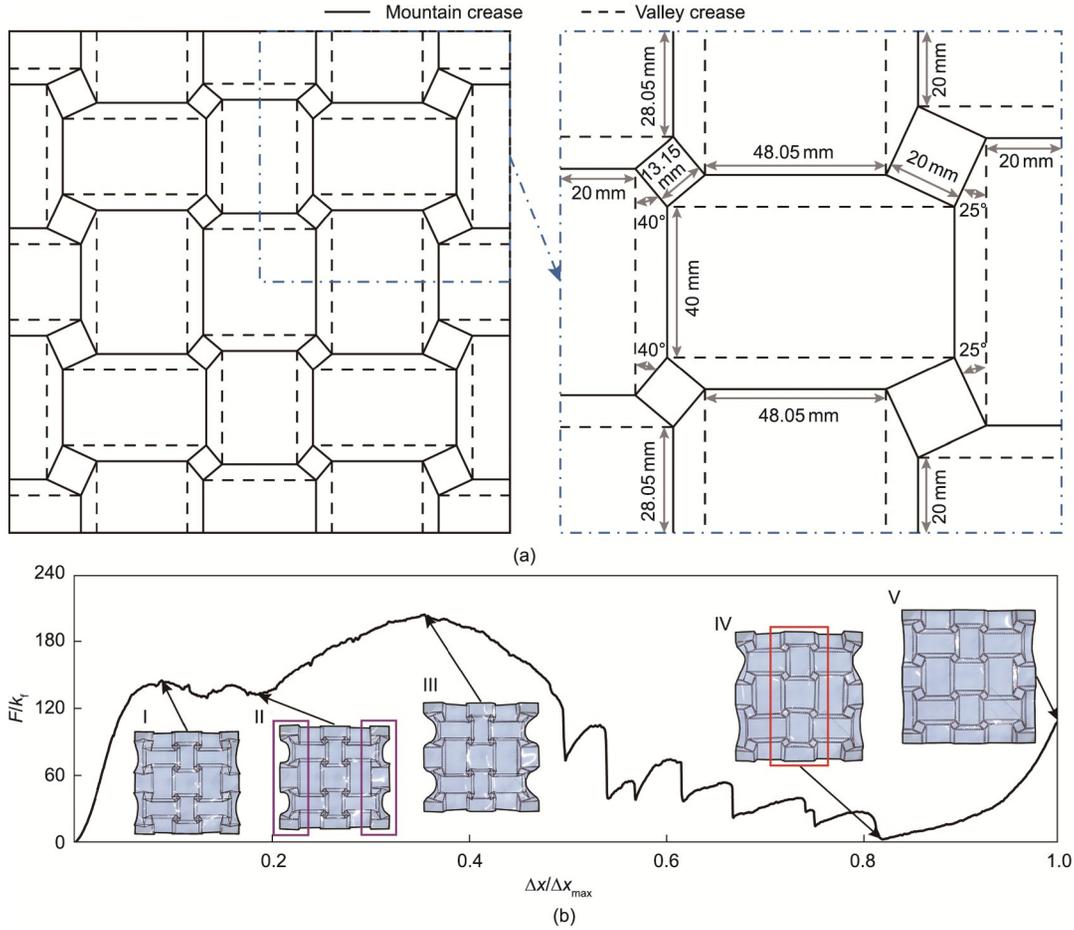


图10. type-1中 $4 \times 4$ 超材料的梯度设计。(a) 模态和几何参数；(b) 无量纲化反力-位移曲线和关键模态。

示) 首先展开, 此时峰值力较小。随后  $\alpha$  值较大的中部 8 个胞元展开, 反力增大, 出现了第二个较高的反力平台, 实现了两个连续局部峰值力的梯度响应。基于胞元性能, 改变胞元的数量可以实现更多局部峰值, 且峰值位置和大小均可编程设计。

## 5. 结论

本文将刚性和非刚性的 square-twist 折纸胞元混合排布设计, 提出了一类新型折纸超材料, 并分析了应变能、承载力和最大刚度。为了满足不同类型、几何参数的相邻排布胞元连接的匹配条件, 建立了此超材料的空间排布规则。经过一系列不同胞元组合的超材料设计、制备和实验, 三种类型胞元混合排布的超材料基本可实现特定的变形模式和力学性能。结果表明, 所设计超材料的变形能、初始峰值力和最大刚度的理论预测与串联和并联装配的非线性弹簧类似, 可通过基本胞元性能的简单叠加得到, 且与实验数据吻合较好。基于上述结果, 调整超材料中不同

类型胞元的数量比例和几何参数, 实现了超材料关键力学性能的大范围、可连续编程设计。此外, 由于排布的胞元具有相同折痕布局, 仅改变山-谷线折痕类型, 超材料即可重编程。本研究针对不同领域的超材料性能设计需求差异, 较大地拓宽了折纸超材料性能编程和重构编程范围, 为开拓更多新的研究方向提供了思路。例如, 可采用机器学习算法自主高效地实现本研究中性能编程设计过程, 快速得到满足特定设计需求的超材料设计参数。

## 致谢

感谢国家自然科学基金项目(52035008、51825503、52192631、51721003)、腾讯基金会(XPLORER-2020-1035)、牛津大学工程科学系对本研究的资助。

## Compliance with ethics guidelines

Jiayao Ma, Shixi Zang, Yan Chen, and Zhong You de-

clare that they have no conflict of interest or financial conflicts to disclose.

## Appendix A. Supplementary data

Supplementary data to this article can be found online at <https://doi.org/10.1016/j.eng.2022.02.015>.

## References

- [1] Bertoldi K, Vitelli V, Christensen J, van Hecke M. Flexible mechanical metamaterials. *Nat Rev Mater* 2017;2(11):17066.
- [2] Kadic M, Milton GW, van Hecke M, Wegener M. 3D metamaterials. *Nat Rev Phys* 2019;1(3):198–210.
- [3] Liu RP, Ji CL, Zhao ZY, Zhou T. Metamaterials: reshape and rethink. *Engineering* 2015;1(2):179–84.
- [4] Zhang Y, Matsumoto EA, Peter A, Lin PC, Kamien RD, Yang S. One-step nanoscale assembly of complex structures via harnessing of an elastic instability. *Nano Lett* 2008;8(4):1192–6.
- [5] Matsumoto EA, Kamien RD. Elastic-instability triggered pattern formation. *Phys Rev E* 2009;80(2):021604.
- [6] Bertoldi K, Reis PM, Willshaw S, Mullin T. Negative Poisson's ratio behavior induced by an elastic instability. *Adv Mater* 2010;22(3):361–6.
- [7] Matsumoto EA, Kamien RD. Patterns on a roll: a method of continuous feed nanoprinting. *Soft Matter* 2012;8(43):11038–41.
- [8] Brunck V, Lechenault F, Reid A, Adda-Bedia M. Elastic theory of origami-based metamaterials. *Phys Rev E* 2016;93(3):033005.
- [9] Kamrava S, Mousanezhad D, Ebrahimi H, Ghosh R, Vaziri A. Origami-based cellular metamaterial with auxetic, bistable, and self-locking properties. *Sci Rep* 2017;7(1):46046.
- [10] Sengupta S, Li S. Harnessing the anisotropic multistability of stacked-origami mechanical metamaterials for effective modulus programming. *J Intell Mater Syst Struct* 2018;29(14):2933–45.
- [11] Waitukaitis S, Menaut R, Chen BG, van Hecke M. Origami multistability: from single vertices to metasheets. *Phys Rev Lett* 2015;114(5):055503.
- [12] Boatti E, Vasios N, Bertoldi K. Origami metamaterials for tunable thermal expansion. *Adv Mater* 2017;29(26):1700360.
- [13] Ni X, Guo X, Li J, Huang Y, Zhang Y, Rogers JA. 2D mechanical metamaterials with widely tunable unusual modes of thermal expansion. *Adv Mater* 2019;31(48):1905405.
- [14] Zhang L, Song B, Liu R, Zhao A, Zhang J, Zhuo L, et al. Effects of structural parameters on the Poisson's ratio and compressive modulus of 2D pentamode structures fabricated by selective laser melting. *Engineering* 2020;6(1):56–67.
- [15] Zheng X, Lee H, Weisgraber TH, Shusteff M, DeOtte J, Duoss EB, et al. Ultralight, ultrastiff mechanical metamaterials. *Science* 2014;344(6190):1373–7.
- [16] Berger JB, Wadley HNG, McMeeking RM. Mechanical metamaterials at the theoretical limit of isotropic elastic stiffness. *Nature* 2017;543(7646):533–7.
- [17] Silverberg JL, Evans AA, McLeod L, Hayward RC, Hull T, Santangelo CD, et al. Using origami design principles to fold reprogrammable mechanical metamaterials. *Science* 2014;345(6197):647–50.
- [18] Zhai Z, Wang Y, Jiang H. Origami-inspired, on-demand deployable and collapsible mechanical metamaterials with tunable stiffness. *Proc Natl Acad Sci USA* 2018;115(9):2032–7.
- [19] Zhai Z, Wang Y, Lin K, Wu L, Jiang H. *In situ* stiffness manipulation using elegant curved origami. *Sci Adv* 2020;6(47):eabe2000.
- [20] Schenk M, Guest SD. Geometry of Miura-folded metamaterials. *Proc Natl Acad Sci USA* 2013;110(9):3276–81.
- [21] Zhou X, Zang S, You Z. Origami mechanical metamaterials based on the Miura-derivative fold patterns. *Proc Math Phys Eng Sci* 2016;472(2191):20160361.
- [22] Eidini M, Paulino GH. Unraveling metamaterial properties in zigzag-base folded sheets. *Sci Adv* 2015;1(8):e1500224.
- [23] Ma J, Song J, Chen Y. An origami-inspired structure with graded stiffness. *Int J Mech Sci* 2018;136:134–42.
- [24] Liu K, Novelino LS, Gardoni P, Paulino GH. Big influence of small random imperfections in origami-based metamaterials. *Proc Math Phys Eng Sci* 2020;476(2241):20200236.
- [25] Yuan L, Dai H, Song J, Ma J, Chen Y. The behavior of a functionally graded origami structure subjected to quasi-static compression. *Mater Des* 2020;189:108494.
- [26] Kidambi N, Wang KW. Dynamics of Kresling origami deployment. *Phys Rev E* 2020;101(6):063003.
- [27] Lv C, Krishnaraju D, Konjevod G, Yu H, Jiang H. Origami based mechanical metamaterials. *Sci Rep* 2014;4(1):5979.
- [28] Chen Z, Wu T, Nian G, Shan Y, Liang X, Jiang H, et al. Ron Resch origami pattern inspired energy absorption structures. *J Appl Mech* 2019;86(1):011005.
- [29] Dieleman P, Vasmel N, Waitukaitis S, van Hecke M. Jigsaw puzzle design of pluripotent origami. *Nat Phys* 2020;16(1):63–8.
- [30] Silverberg JL, Na JH, Evans AA, Liu B, Hull TC, Santangelo CD, et al. Origami structures with a critical transition to bistability arising from hidden degrees of freedom. *Nat Mater* 2015;14(4):389–93. Corrigendum in: *Nat Mater* 2015;14:540.
- [31] Wang LC, Song WL, Fang D. Twistable origami and kirigami: from structure-guided smartness to mechanical energy storage. *ACS Appl Mater Interfaces* 2019;11(3):3450–8.
- [32] Wang LC, Song WL, Zhang YJ, Qu MJ, Zhao Z, Chen M, et al. Active reconfigurable twistable square-twist origami. *Adv Funct Mater* 2020;30(13):1909087.
- [33] Peng R, Ma J, Chen Y. The effect of mountain-valley folds on the rigid foldability of double corrugated pattern. *Mechanism Mach Theory* 2018;128:461–74.
- [34] Chen Y, Fan L, Bai Y, Feng J, Sareh P. Assigning mountain-valley fold lines of flat-foldable origami patterns based on graph theory and mixed-integer linear programming. *Comput Strucy* 2020;239:106328.
- [35] Chen Y, Yan J, Feng J, Sareh P. Particle swarm optimization-based metaheuristic design generation of non-trivial flat-foldable origami tessellations with degree-4 vertices. *J Mech Des* 2021;143(1):011703.
- [36] Feng H, Peng R, Zang S, Ma J, Chen Y. Rigid foldability and mountain-valley crease assignments of square-twist origami pattern. *Mechanism Mach Theory* 2020;152:103947.
- [37] Zang S, Ma J, Chen Y. Deformation characteristics and mechanical properties of a non-rigid square-twist origami structure with rotational symmetry. 2021. arXiv:2109.12488.
- [38] Ma J, Zang S, Feng H, Chen Y, You Z. Theoretical characterization of a non-rigid-foldable square-twist origami for property programmability. *Int J Mech Sci* 2021;189:105981.
- [39] Lyu S, Qin B, Deng H, Ding X. Origami-based cellular mechanical metamaterials with tunable Poisson's ratio: construction and analysis. *Int J Mech Sci* 2021;212:106791.
- [40] Jha DK, Kant T, Singh RK. A critical review of recent research on functionally graded plates. *Compos Struct* 2013;96:833–49.