



ELSEVIER

Contents lists available at ScienceDirect

## Engineering

journal homepage: [www.elsevier.com/locate/eng](http://www.elsevier.com/locate/eng)

Research  
Reverse Design of Telescope—Article

## 面向指向精度的奇台射电望远镜轮轨误差逆向设计方法

李娜\*, 段宝岩, 李向阳, 郑彬, 吴江

Key Laboratory of Electronic Equipment Structure Design, Ministry of Education, Xidian University, Xi'an 710061, China

### ARTICLE INFO

#### Article history:

Received 15 November 2020

Revised 31 May 2021

Accepted 21 November 2021

Available online 31 December 2021

#### 关键词

逆向设计

轮轨误差

大型射电望远镜

双尺度模型

指向精度

### 摘要

奇台射电望远镜(QTT)的口径为110 m,计划成为世界上最大的全可动望远镜。理想情况下,望远镜的重复指向精度误差应小于2.5角秒(arcsec);因此,望远镜的结构必须满足超高精度的要求。为此,本文提出了一种轮轨表面的逆向设计方法,用以降低望远镜整体设计与制造的难度。首先,本文使用偏度系数和峰度系数方法验证了轮轨误差测试数据的分布特征。根据这些分布特征,采用了双尺度模型仿真分析了方位轮轨误差。在本文的实验中,长周期、小幅度的误差以大尺度为特征,采用三角函数描述,短周期、大幅度的误差以小尺度为特征,利用分形函数来模拟。本文首先基于双尺度模型,推导了误差对指向精度的影响机理;其次,推导了轮轨误差的均方根(RMS)与望远镜指向精度误差均方根之间的关系;最后,从容许的指向精度误差来推导出轮轨误差容许的RMS值。为了验证所提新方法的有效性,选择了两种典型的射电天文望远镜[绿岸望远镜(GBT)和大型毫米波望远镜(LMT)]作为实验实例。通过对比发现,望远镜指向精度的理论计算值与实测值基本一致,最大误差小于10%。

© 2021 THE AUTHORS. Published by Elsevier LTD on behalf of Chinese Academy of Engineering and Higher Education Press Limited Company. This is an open access article under the CC BY-NC-ND license (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).

## 1 引言

口径为500 m的球面射电望远镜(FAST)于2016年在中国贵州省建成,是世界上最大、最强的单碟射电望远镜。口径110 m全可动的奇台射电望远镜(QTT)现已开始筹建,建设单位为中国科学院新疆天文台。建成后,它将成为世界上最大口径的全可动射电天文望远镜[1–2]。虽然FAST在3 GHz以下的工作频段比QTT要灵敏得多,但它的天空覆盖范围有限;相比之下,QTT将在150 MHz至115 GHz的工作范围内运行,并具有全天空覆盖的功能。

QTT的天空覆盖范围和频率覆盖范围将使其成为一种用途非常广泛的仪器,可以观测许多分子线发射以及银河系中心,并大大提高脉冲星引力波测量的准确性。QTT所需的指向精度为2.5角秒(arcsec),这对于质量为6000 t、高度为100 m、反射表面积为26个篮球场面积的望远镜结构来说是极难实现的[3–4]。以位于墨西哥普埃布拉省Sierra Negra山顶的大型毫米波望远镜(LMT)的指向误差为例[5],在误差补偿之前,LMT的服务环境、机械校准和伺服控制引起的指向误差分别为10.76角秒、5角秒和7.74角秒[6–7]。但是,传统的设计思想对多个误差源一视同仁;因此,望远镜的最终指向精度非常有限[8]。为了满足QTT设计中极高的指向精度要求,测量中应识

\* Corresponding author.

E-mail address: [lina@mail.xidian.edu.cn](mailto:lina@mail.xidian.edu.cn) (N. Li).

别关键误差源；然后，对关键误差源进行优先级控制。

望远镜的结构误差是影响其指向精度的关键因素。误差源主要涉及基座、反射面或轮轨的变形[9]。焊接轮轨是通过焊接制成的，单轨之间采用相对光滑的轮轨接头，可以使整体轮轨经久耐用。以高难度焊接工艺为代价的焊接轮轨适用于高精度和高负载的望远镜[10]。然而，轮轨的加工和焊接过程引入了随机误差，主要包括微观表面误差和宏观轮轨不平度[8,11–12]。这两个尺度上的误差会导致望远镜的方位轴和俯仰角轴出现误差，从而影响指向精度[13]。

在早期轮轨误差对望远镜影响的研究中，研究人员通过测量仪器获得轮轨误差数据。通过几何转换公式，将不平度直接转化为望远镜方位角和俯仰角的误差[14]。此外，Pisanu 等[15]考虑了轮轨误差和温度漂移引起的方向框架变形对指向精度的影响。Kong 等[16]研究了轮轨误差测试数据并进行了实验以确定指向精度。然后根据测试数据分析了轮轨误差与指向精度的关系。此外，研究人员还研究了非线性轮轨误差对望远镜指向性能的影响[17]。先前的研究表明，轮轨误差是望远镜设计、建造和运行阶段必须不断考虑的关键误差源。轮轨的结构误差具有明显的多尺度性，但在误差建模中却没有考虑到这一点。因此，指向误差与轮轨误差之间的准确关系尚未建立。这一不足是本文提出的逆向设计策略的基础。

具有有限元建模（FEM）或时域有限差分（FDTD）的高级迭代计算通常用于表面性能预测。但是，这种传统的设计过程受到人为引导的固有误差的影响。本研究基于双尺度误差模型及该误差对望远镜指向的影响机理，提出一种轮轨表面的逆向设计方法，可有效搜索和优化表面结构的核心参数以达到用户要求的表面特性。该模型是一种有效的大型轮轨表面逆向设计技术，有助于减少传统曲面设计中的计算量和人力资源，避免复杂的专业迭代仿真和参数化扫描研究，可为缺乏机械知识的用户提供服务。

## 2. 轮轨误差对望远镜指向精度的影响

### 2.1. 轮轨误差测试数据来源与特征分析和验证

根据某些大型射电天文望远镜[如 LMT、Robert C. Byrd Green Bank Telescope (GBT)]的大量实验数据分析结果，可以初步假设这些大型望远镜的轮轨误差数据服从高斯分布[18]。在实际工程应用中，这一结论还应通过使用偏度系数法和峰度系数法等测试方法进行验证[19–20]。这两种方法的详细描述如下：

$$S_k = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3 / n}{s^3} \quad (1)$$

$$U_u = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4 / n}{s^4} - 3 \quad (2)$$

式中， $S_k$  是偏度系数； $U_u$  是峰度系数； $x_i$  是轮轨误差测试数据， $i$  是第  $i$  个轮轨误差测试数据； $n$  为测试点数； $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$  和  $s = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$  分别是测试数据的平均值和标准差。

如果不均匀测试数据的偏度和峰度都接近于零，则可以确认数据集整体服从高斯分布。对于一组测试数据样本，如果计算的偏度为正，则与数据集遵循标准高斯分布的情况相比，峰度呈现出向较小值侧的偏差。相反，如果计算的偏度为负，则与数据集遵循标准高斯分布的情况相比，峰度呈现出向较大值侧的偏差。如果峰度计算为正，则该分布相对标准高斯分布更锐利。但是，如果计算峰度为负，则该分布相对标准高斯分布更平坦。如果测试数据服从高斯分布，那么偏度和峰度也相应地服从高斯分布，数学期望值为零。偏度和峰度的均方根（RMS）值可以表示如下：

$$\sigma_s = \sqrt{\frac{6(n-2)}{(n+1)(n+3)}} \quad (3)$$

$$\sigma_u = \sqrt{\frac{24n(n-2)(n-3)}{(n+1)^2(n+3)(n+5)}} \quad (4)$$

式中， $\sigma_s$  和  $\sigma_u$  分别表示偏度和峰度方法的 RMS 值。

假设轮轨误差的测试数据服从高斯分布，则置信度系数  $\alpha$  可以设置为 0.05 ( $\alpha=0.05$ )。当偏度系数  $S_k > 1.96 \sigma_s$  和峰度系数  $U_u > 1.96 \sigma_u$  时，假设无效，测试数据集不服从高斯分布。否则，假设成立；也就是说，测试数据集服从高斯分布。

### 2.2. 轨道误差的双尺度模型

轮轨的结构误差主要包含两个方面：单轨加工产生的随机误差和轮轨使用过程中重力引起的变形。这两种类型的误差具有不同的来源和分布特征[21–22]。加工过程的误差是随机的，呈现高频率和小振幅特征。结果表明，它被确定为小尺度误差，并通过周期函数计算。另一方面，自重变形是系统性的，表现为低频大振幅；因此，它被描述为大尺度误差。基于两种尺度分布的特征，大尺度轮轨误差采用傅里叶级数[23]仿真，小尺度轮轨误差作为拟合残差，采用分形函数[24]建模。最后，建立了轮轨不平度的双尺度误差模型，如式（5）所示。

$$\begin{aligned}
F(x) = & f_1(x) + \sum_{i=1}^g f_2^i(A_i, D_i, L_i, x_0^i, y_0^i) = \\
& a_0 + \sum_{n=1}^q [a_n \cos(n\omega_0 x) + b_n \sin(n\omega_0 x)] + \\
& \sum_{i=1}^g f_2^i(A_i, D_i, L_i, x_0^i, y_0^i) \\
f_2^i(A_i, D_i, L_i, x_0^i, y_0^i) = & A_i^{(D_i-1)} \sum_{j=n_1}^Q \frac{1}{\gamma^{(2-D_i)j}} \cos[2\pi\gamma^j(x+x_0^i)] + y_0^i \\
n_{1i} = & \lg(1/L_i)/\lg(\gamma) \\
M_i = & \lg(N\gamma^{n_{1i}}/2)/\lg(\gamma)
\end{aligned} \tag{5}$$

式中,  $f_1(x)$  是傅里叶级数函数;  $f_2^i(A_i, D_i, L_i, x_0^i, y_0^i)$  是第  $i$  段的 Weierstrass-Mandelbrot (W-M) 分形函数;  $a_0$  是常数系数;  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$  是不同的幅度分量;  $m$  是傅里叶级数的展开阶;  $\omega_0$  是  $f_1(x)$  的角频率;  $A_i$  是 W-M 分形函数  $f_2(x)$  的幅度系数;  $L_i$  是  $f_2(x)$  的采样长度;  $N$  为采样点数;  $D_i$  为  $f_2(x)$  的分形维数;  $\gamma$  是轮轨表面谐波的频率;  $y_0^i$  和  $x_0^i$  分别表示  $f_2(x)$  的纵向和横向位移。

如式 (5) 所示, 轮轨误差的拟合精度由  $f_1(x)$  和  $f_2(x)$  共同决定。更高的展开级数 ( $m$ ) 对应更短的采样长度 ( $L$ ) 和更高的函数拟合精度。因此, 确定  $m$  和  $L$  的取值是建立双尺度误差模型的关键。优化模型可以表示如下, 其中  $T$  是转置符号。

$$F(\mathbf{y}) = \sqrt{\left[ \sum_{j=1}^N (f_2^i(x_j, \mathbf{y}) - \mathbf{y}(x_j))^2 \right] / N} \tag{6}$$

$$f_2^i(x) = A_i^{(D_i-1)} \sum_{n=n_1}^Q \frac{1}{\gamma^{(2-D_i)n}} \cos[2\pi\gamma^n(x + \Delta x)] + \Delta y \tag{7}$$

$$\text{find } \mathbf{y} = (A_i, D_i, L_i, x_0^i, y_0^i)^T$$

$$\begin{aligned}
\min F(\mathbf{y}) = & \sqrt{\left[ \sum_{j=1}^N (f_2^i(x_j, \mathbf{y}) - \mathbf{y}(x_j))^2 \right] / N} \\
\text{s.t. } & 0 < x_0^i < x_{\max} \\
& L_{\min} < L_i < L_{\max} \\
& y_{\min} < y_0^i < y_{\max} \\
& A_{\min} < A_i < A_{\max} \\
& D_{\min} < D_i < D_{\max}
\end{aligned} \tag{8}$$

### 3. 基于指向误差的轮轨误差允许值

#### 3.1. 轮轨误差对指向精度误差的影响

为研究轮轨误差对望远镜整体结构和指向精度的影响, 本实验建立了 4 个坐标系, 如图 1 所示。

(1) 大地坐标系 ( $OXYZ$ )。该系统的原点位于望远镜方位角轮轨的正中心。Z 轴垂直于地球, Y 轴正方向指向

南方。

(2) 方位轴坐标系 ( $O_aX_aY_aZ_a$ )。它的原点位于轮轨的中心, 而它的 Z 轴与方位轴重合, 并随着方位轴的旋转而偏转。当望远镜沿方位轴无误差且方位角为零时,  $O_aX_aY_aZ_a$  等于  $OXYZ$ 。

(3) 俯仰轴坐标系 ( $O_eX_eY_eZ_e$ )。它的原点位于方位轴的中心, 而它的 Z 轴与俯仰角轴重合, 并随着俯仰角轴的旋转而偏转。当望远镜无轴误差时, 俯仰角等于  $90^\circ$ , 方位角等于  $0^\circ$  时, 坐标与大地坐标在 Z 方向只有  $h$  的高差。

(4) 反射体坐标系 ( $O_rX_rY_rZ_r$ )。如果俯仰角等于  $90^\circ$ , 则它与 Z 方向俯仰角坐标系的高度差为  $h_1$ 。

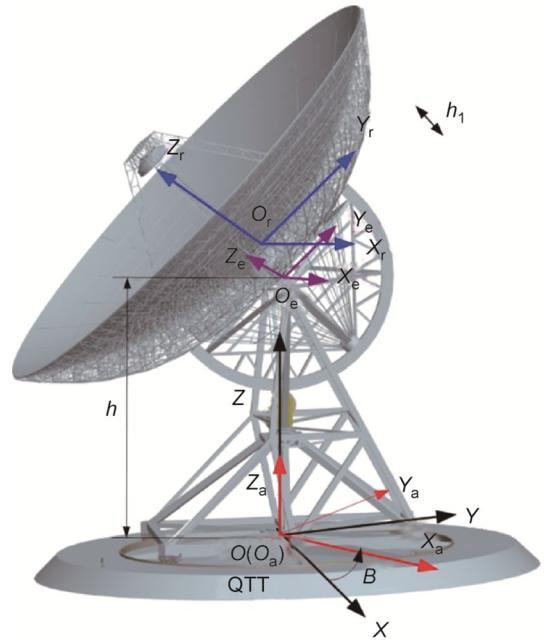


图1. 望远镜坐标系示意图。B: 反射体的方位角。

如图 2 所示, 黑线为方位坐标系中方位框架的初始位置。点 1、2、3 和 4 代表 4 个滚轮, 它们的高度值为  $Z(B + \frac{\pi}{4})$ 、 $Z(B - \frac{\pi}{4})$ 、 $Z(B - \frac{3\pi}{4})$  和  $Z(B + \frac{3\pi}{4})$ , 其中,  $Z(x)$  是轮轨描述函数,  $B$  是反射体的方位角。红线代表变形的方位框架。 $\Delta x_1$  和  $\Delta y_1$  分别是方位轴沿 X 轴和 Y 轴的旋转, 这是由滚轮 1 和 3 之间的高度差引起的。类似地,  $\Delta x_2$  和  $\Delta y_2$  是由滚轮 2 和 4 之间的高度差引起的旋转。

$$\begin{aligned}
\Delta x_1 = & \left[ \frac{Z(B + \frac{\pi}{4}) - Z(B - \frac{3\pi}{4})}{2r} \right] \cos(\pi/4) \\
\Delta x_2 = & \left[ \frac{Z(B + \frac{3\pi}{4}) - Z(B - \frac{\pi}{4})}{2r} \right] \cos(\pi/4)
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\Delta y_1 = \left[ \frac{Z(B - \frac{3\pi}{4}) - Z(B + \frac{\pi}{4})}{2r} \right] \cos(\pi/4)$$

$$\Delta y_2 = \left[ \frac{Z(B + \frac{3\pi}{4}) - Z(B - \frac{\pi}{4})}{2r} \right] \cos(\pi/4) \quad (10)$$

式中,  $r$  是轮轨的半径。

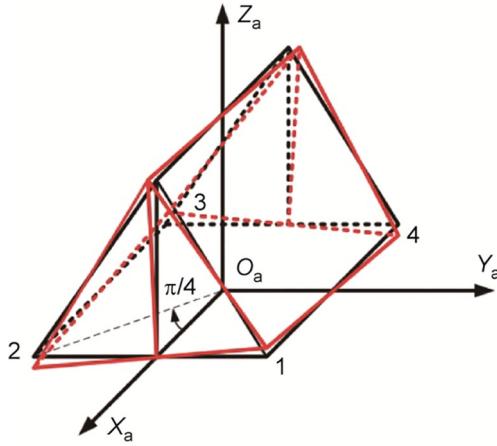


图2. 轮轨误差引起的方向坐标系倾斜变形。

此外, 轮轨误差导致方位架的变形; 这会导致方位架本身的扭转, 使俯仰角轴围绕Z轴旋转, 如图3所示。由滚轮1和2之间的高度差引起的俯仰轴平移为 $\delta_{12}$ , 由滚轮3和4引起的位移表示为 $\delta_{34}$ 。

$$\delta_{12} = h_e \left[ \frac{-Z(B + \frac{\pi}{4}) + Z(B - \frac{\pi}{4})}{2r \cos(\pi/4)} \right]$$

$$\delta_{34} = h_e \left[ \frac{Z(A - \frac{3\pi}{4}) - Z(A + \frac{3\pi}{4})}{2r \cos(\pi/4)} \right] \quad (11)$$

式中,  $h_e$  是俯仰轴的长度。

轮轨不平度引起的方向坐标系摄动矩阵表示如下:

$$\mathbf{R}_t = \begin{bmatrix} 1 & \phi_{tz} & -\phi_{ty} \\ -\phi_{tz} & 1 & \phi_{tx} \\ \phi_{ty} & -\phi_{tx} & 1 \end{bmatrix}$$

式中,  $\phi_{tx}$ 、 $\phi_{ty}$  和  $\phi_{tz}$  是坐标系中方位坐标系的误差, 可以根据双尺度模型计算得到。

轮轨整体倾斜会导致方位轴倾斜, 安装方位轴时初始偏移为零。考虑到轨道误差, 坐标变换可表示为:

$$\begin{bmatrix} x'_r \\ y'_r \\ z'_r \end{bmatrix} = \mathbf{R}_e^r \mathbf{R}_a^s \mathbf{R}_t^a \mathbf{R}_b^a \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\phi_{tz} \cos E - \phi_{ty} \sin E \\ \phi_{tx} \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\phi_{tz} \cos E - \phi_{ty} \sin E \\ \phi_{tx} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

式中,  $\mathbf{R}_e^r$ 、 $\mathbf{R}_a^s$  和  $\mathbf{R}_b^a$  分别是俯仰轴坐标系到反射体坐标系、方位轴坐标系到俯仰轴坐标系、大地坐标系到方位轴坐标系的坐标转换矩阵;  $E$  是反射器的俯仰角。

由轮轨误差引起的指向误差可以描述如下:

$$\Delta_t = \begin{bmatrix} x'_r \\ y'_r \\ z'_r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\phi_{tz} \cos E - \phi_{ty} \sin E \\ \phi_{tx} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

然后, 可以将反射体坐标系中的指向误差转换为大地坐标系中的方位角和俯仰角误差。方位角误差为 $\eta = \Delta\theta_r / \cos E$ , 俯仰角误差为 $\beta = \Delta\phi_r$ ,  $\theta_r$  和  $\phi_r$  是反射体坐标系中的方向角和俯仰角,  $\Delta\theta_r$  和  $\Delta\phi_r$  是反射体坐标系中指向误差的方向和俯仰角的分量。

$$\begin{bmatrix} \eta \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\phi_{tz} + \phi_{ex} + \phi_{ez}) - (\phi_{ty} + \phi_{ey}) \tan E - \phi_{ay} \cos B \tan E + \\ \phi_{ax} \sin B \tan E - \phi_{oy} \sec E \\ -\phi_{tx} - \phi_{ax} \cos B - \phi_{ay} \sin B - \phi_{ex} - \phi_{ox} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \phi_{tx} \\ \phi_{ty} \\ \phi_{tz} \\ \phi_{ax} \\ \phi_{ay} \\ \phi_{az} \\ \phi_{ex} \\ \phi_{ey} \\ \phi_{ez} \\ \phi_{ox} \\ \phi_{oy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \tan E & -1 & \sin B \tan E & -\cos B \tan E & -1 & 0 & \tan E & -1 & 0 & -\sec E \\ -1 & 0 & 0 & -\cos B & -\sin B & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

式中,  $\phi_{ax}$ 、 $\phi_{ay}$  和  $\phi_{az}$  是方位轴坐标系的误差, 由轮轨整体倾角和方位轴安装误差引起;  $\phi_{ex}$ 、 $\phi_{ey}$  和  $\phi_{ez}$  是俯仰轴坐标系的误差, 主要是由方位架变形和俯仰轴安装误差引起;  $\phi_{ox}$  和  $\phi_{oy}$  是轴的误差, 主要是由副面、馈源和正面的位置偏差引起。

如果只考虑轮轨误差对指向精度的影响, 则  $\phi_{ax} = \phi_{ay} = \phi_{az} = 0$ 、 $\phi_{ex} = \phi_{ey} = 0$ 、 $\phi_{ez} = \phi_{ox} = \phi_{oy} = 0$ 。通过将这些参数的取值代入式(14), 可以得到指向精度如下:

$$\begin{bmatrix} \eta \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \tan E & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}r} & -\frac{1}{2\sqrt{2}r} & -\frac{1}{2\sqrt{2}r} & \frac{1}{2\sqrt{2}r} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}r} & -\frac{1}{2\sqrt{2}r} & \frac{1}{2\sqrt{2}r} & \frac{1}{2\sqrt{2}r} \\ -\frac{h}{2r^2} & \frac{h}{2r^2} & -\frac{h}{2r^2} & \frac{h}{2r^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z(B + \frac{\pi}{4}) \\ Z(B - \frac{\pi}{4}) \\ Z(B - \frac{3\pi}{4}) \\ Z(B + \frac{3\pi}{4}) \end{bmatrix} \quad (15)$$

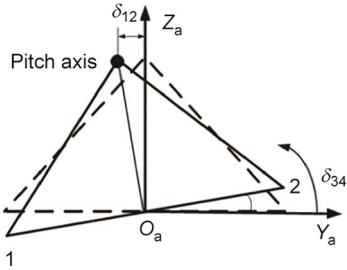


图3. 轮轨误差引起的方位架畸变。

### 3.2. 轮轨误差容许值的逆向求导

目前，望远镜指向精度的误差分布是一个复杂的工程问题，在设计阶段需要综合考虑多个因素[25]。通过结合工程经验、有限元结构分析、控制模型仿真、实测数据、工程估算等多种技术手段，可以确定各种误差源引起的分布式指向误差[26]。由于每个误差源都会影响望远镜的指向精度，因此可以假设由这些误差源引起的指向误差记为  $\Delta_1, \dots, \Delta_i, \dots, \Delta_n$ 。此外，由于分布指向误差是标量和 RMS 值，天线的整体指向误差  $\Delta_{PE}$  可以表示如下[27]：

$$\Delta_{PE} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \Delta_i^2} \quad (16)$$

根据第2节的验证结果，如果轮轨误差的测试数据服从高斯分布，则可以从概率统计的角度进一步推导出轮轨误差与指向精度的关系模型。相应地，在确定了轮轨误差 ( $\sigma$ ) 的RMS后，就可以计算出由其引起的天线方位角和俯仰角的指向误差的RMS值。随后，可以基于获得的误差分布推导出允许的跟踪误差值。望远镜的简化如图4所示。

如图5所示，用4个点来支撑望远镜的方位架和轮轨，分别记为点1、2、3、4。方位架的底部结构是由这4个点组成的正方形。如果只考虑轮轨误差，则指向误差可描述如下：

$$\begin{bmatrix} \eta \\ \beta \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 0 & \tan E & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}r} & -\frac{1}{2\sqrt{2}r} & -\frac{1}{2\sqrt{2}r} & \frac{1}{2\sqrt{2}r} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}r} & -\frac{1}{2\sqrt{2}r} & \frac{1}{2\sqrt{2}r} & \frac{1}{2\sqrt{2}r} \\ -\frac{h_2}{2r^2} & \frac{h_2}{2r^2} & -\frac{h_2}{2r^2} & \frac{h_2}{2r^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z(B + \frac{\pi}{4}) \\ Z(B - \frac{\pi}{4}) \\ Z(B - \frac{3\pi}{4}) \\ Z(B + \frac{3\pi}{4}) \end{bmatrix} \quad (17)$$

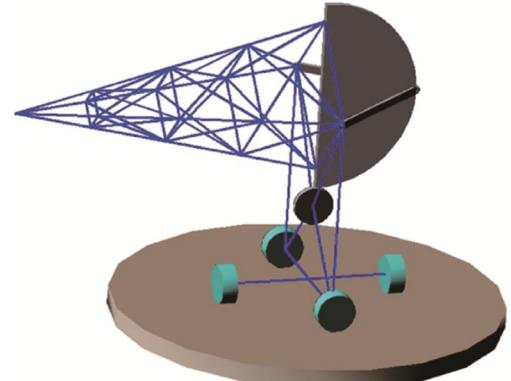


图4. 望远镜的简化示意图。

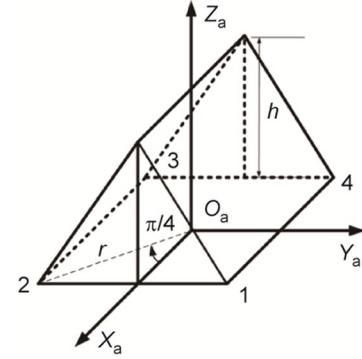


图5. 望远镜方位架和轮轨支撑点的位置。

式中， $k$ 是转换系数 ( $k = \frac{180}{\pi} \times \frac{3600}{1000} = 206.2648$ )； $h_2$ 是俯仰轴和轮轨之间的距离； $Z\left(B + \frac{\pi}{4}\right)$ 、 $Z\left(B - \frac{\pi}{4}\right)$ 、 $Z\left(B - \frac{3\pi}{4}\right)$ 和 $Z\left(B + \frac{3\pi}{4}\right)$ 分别是4个支撑点的高度，单位为mm。

$$\begin{aligned} l_1 &= \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}r} \tan E + \frac{h}{2r^2}\right), l_2 = \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}r} \tan E - \frac{h}{2r^2}\right), \\ l_3 &= \left(\frac{1}{2\sqrt{2}r} \tan E + \frac{h}{2r^2}\right), l_4 = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}r} \tan E - \frac{h}{2r^2}\right) \\ h_1 &= -\frac{1}{2\sqrt{2}r}, h_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}r}, h_3 = \frac{1}{2\sqrt{2}r}, h_4 = -\frac{1}{2\sqrt{2}r} \end{aligned}$$

式(17)可简化为以下表达式：

$$\begin{bmatrix} \eta \\ \beta \end{bmatrix} = k \cdot \begin{bmatrix} l_1 Z_1 + l_2 Z_2 + l_3 Z_3 + l_4 Z_4 \\ h_1 Z_1 + h_2 Z_2 + h_3 Z_3 + h_4 Z_4 \end{bmatrix} \quad (18)$$

假设  $Z_1$  和  $Z_2$  是两个独立的随机变量， $Z_1$  服从正态分布  $N(0, a^2)$ ， $Z_2$  服从  $N(0, b^2)$ ， $W = k_1 Z_1 + k_2 Z_2$ ， $k_1 Z_1$  服从正态分布  $N(0, k_1^2 a^2)$ ， $k_2 Z_2$  服从  $N(0, k_2^2 b^2)$ 。令随机变量  $M = kZ$  和  $Z$  服从正态分布  $N(0, \sigma^2)$ ，则  $z = m/k$ ， $z(m) = 1/k$ 。 $M$  的概率密度为：

$$f_M(m) = f_z(m) |z(m)| = \left| \frac{1}{k} \right| \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\frac{m}{k})^2}{2\sigma^2}} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi k^2}\sigma} e^{\frac{-m^2}{2k^2\sigma^2}}, \quad -\infty < m < \infty \quad (19)$$

因此， $M=kZ$ 服从 $N(0, k^2 b^2)$ 。令 $X=k_1 Z_1$ ,  $Y=k_2 Z_2$ 。则 $W=X+Y$ 。

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} k_1 \sigma} e^{\frac{-x^2}{2k_1^2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} k_2 \sigma} e^{\frac{-y^2}{2k_2^2\sigma^2}}, \quad -\infty < y < \infty \quad (20)$$

使用卷积定理，可以得到式 (21)：

$$f_W(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(w-x) dx$$

$$f_W(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(y) f_Y(w-y) dy \quad (21)$$

式 (21) 具体表示为：

$$f_W(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(w-x) dx =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} k_1 a} e^{\frac{-x^2}{2k_1^2 a^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi} k_2 b} e^{\frac{-(w-x)^2}{2k_2^2 b^2}} dx =$$

$$\frac{1}{2\pi k_1 a k_2 b} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-x^2}{2k_1^2 a^2} + \frac{-(w-x)^2}{2k_2^2 b^2}} dx =$$

$$\frac{1}{2\pi k_1 a k_2 b} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2(k_2^2 b^2 + k_1^2 a^2) - 2k_1^2 a^2 w x + w^2 k_1^2 a^2}{2k_1^2 a^2 k_2^2 b^2}} dx$$

$$\xrightarrow{\text{formulating}} = \frac{1}{2\pi k_1 a k_2 b} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{k_2^2 a^2 w^2}{k_2^2 b^2 + k_1^2 a^2} x + \frac{w^2 k_1^2 a^2}{k_2^2 b^2 + k_1^2 a^2}} dx =$$

$$\frac{1}{2\pi k_1 a k_2 b} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{k_2^2 b^2 + k_1^2 a^2}{2k_1^2 a^2 k_2^2 b^2} \left[ \left( x - \frac{k_1^2 a^2 w}{(k_2^2 b^2 + k_1^2 a^2)} \right)^2 + \frac{w^2 k_1^2 a^2}{(k_2^2 b^2 + k_1^2 a^2)} - \left( \frac{k_1^2 a^2 w}{(k_2^2 b^2 + k_1^2 a^2)} \right)^2 \right]} dx \quad (22)$$

$$\text{令 } g_1 = \frac{1}{2\pi k_1 a k_2 b}, \quad g_2 = \frac{(k_2^2 b^2 + k_1^2 a^2)}{2k_1^2 a^2 k_2^2 b^2}, \quad g_3 = \frac{w^2 k_1^2 a^2}{k_2^2 b^2 + k_1^2 a^2} - \left( \frac{k_1^2 a^2 w}{k_2^2 b^2 + k_1^2 a^2} \right)^2$$

则式 (22) 可进一步表示为：

$$f_W(w) = g_1 e^{-g_3} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-g_2 \left( x - \frac{k_1^2 a^2 w}{k_2^2 b^2 + k_1^2 a^2} \right)^2} dx \xrightarrow{\text{let } t = x - \frac{k_1^2 a^2 w}{(k_2^2 b^2 + k_1^2 a^2)}} =$$

$$g_1 e^{-g_3} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-g_2 t^2} dt \quad (-\infty < t < +\infty) =$$

$$g_1 e^{-g_3} \sqrt{\frac{\pi}{g_2}} \quad (23)$$

我们将 $g_1$ 、 $g_2$ 和 $g_3$ 代入式 (19) 得到以下等式：

$$f_W(w) = \frac{1}{2\pi k_1 \sigma k_2 \sigma} \cdot e^{-\frac{w^2}{2(k_2^2 b^2 + k_1^2 a^2)}} \cdot \sqrt{\pi \frac{2k_1^2 a^2 k_2^2 b^2}{(k_2^2 b^2 + k_1^2 a^2)}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi(k_2^2 b^2 + k_1^2 a^2)}} \cdot e^{-\frac{w^2}{2(k_2^2 b^2 + k_1^2 a^2)}} \quad (24)$$

我们假设 $Z_1$ 、 $Z_2$ 、 $Z_3$ 和 $Z_4$ 是相互依赖的，并且服从高斯分布 $N(0, \sigma^2)$ 。此外，概率密度函数可以写成

$$f_{Z_i}(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{\frac{-z^2}{2\sigma^2}}。 \text{ 则 } X = l_1 Z_1 + l_2 Z_2 + l_3 Z_3 + l_4 Z_4 \text{ 和 } Y = h_1 Z_1 + h_2 Z_2 + h_3 Z_3 + h_4 Z_4 \text{ 的概率密度可写为：}$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + l_4^2)\sigma^2}} e^{\frac{-x^2}{2(l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + l_4^2)\sigma^2}} \quad (25)$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 + h_4^2)\sigma^2}} e^{\frac{-y^2}{2(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 + h_4^2)\sigma^2}} \quad (26)$$

因此， $X$ 和 $Y$ 也遵循方差分别为 $(l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + l_4^2)\sigma^2$ 和 $(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 + h_4^2)\sigma^2$ 的高斯分布。根据这些推导，具有高斯分布特征的轮轨误差数据的 RMS 与望远镜指向误差的 RMS 值之间的关系可表示为：

$$\sigma_A = k \sqrt{\left( \frac{1}{2r^2} (\tan E)^2 + \frac{1}{r^4} \right)} \sigma$$

$$\sigma_E = \frac{k}{\sqrt{2} r} \sigma$$

$$\sigma_{PE} = \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_E^2} \quad (27)$$

式中， $\sigma_A$ 、 $\sigma_E$ 和 $\sigma_{PE}$ 分别是轮轨误差的 RMS 等于角秒 $\sigma$ 时的方位角误差、俯仰角误差和天线指向角误差的 RMS。

我们将望远镜总指向误差中由轮轨误差引起的部分表示为 $\theta$  (RMS)。然后，轮轨处理和安装的不平度要求可以使用式 (28) 反向推导，这是轮轨误差与指向误差之间的概率统计模型。详细推导过程如下：

$$\sigma_{PE} = \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_E^2} < \theta = k \sigma \sqrt{\frac{(\tan E)^2 + 1}{2r^2} + \frac{1}{r^4}} < \theta \quad (28)$$

因此，

$$\sigma < \frac{\theta r^2}{k} \sqrt{\frac{2}{(r \tan E)^2} + \frac{2}{r^2} + 1} \quad (29)$$

## 4. 实验验证

### 4.1. GBT的实验验证

GBT是位于美国西弗吉尼亚州格林班克的国家射电天文台 (NRAO) 的射电望远镜，同时也是世界上几个最大

的拥有单碟反射器的望远镜之一。目前，该望远镜由绿岸天文台运营。它高 146 m，重 7700 t。碟形天线尺寸为 100 m×110 m；精度补偿后，最高指向精度为 2 角秒。GBT 是典型的偏置射电望远镜，工作频率范围为 0.1~116 GHz。GBT 的轮轨由 48 条轮轨组成，直径为 64 m，全长 201 m。轮轨误差的 RMS 为 0.0568 mm。

轮轨误差的测试方案描述如下[28~29]。一块已知厚度和硬度的木板被放置在轮轨上以校准倾角仪。随后，旋转测距仪以测量轮轨。具体测量过程如下。首先将倾角仪安装在测距仪底部的 4 个滚轮装置上，并在滚轮下方放置一个钢盘。当轮子经过时，倾角仪会倾斜。如果方位架以恒定速度旋转，则通过放大或缩小钢盘厚度与倾角仪读数的比例来获得倾角仪读数与轨迹误差之间的关系。因此，该方法对轮轨的整体轮廓都进行了研究。采用这种基于数据分布特征的验证方案，本实验绘制了 GBT 轮轨误差测试数据的分布直方图，如图 6 所示。

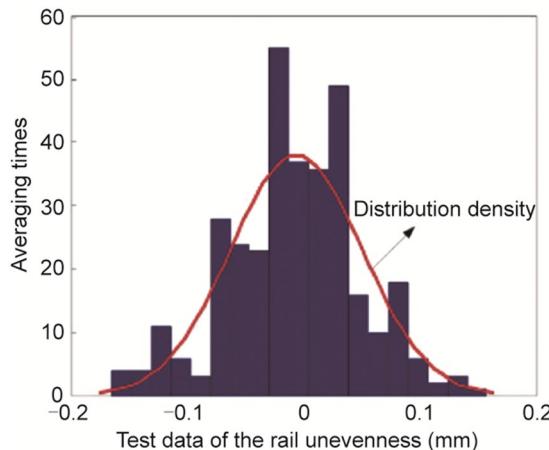


图 6. GBT 轮轨误差测试数据分布直方图。

通过相关系数检验法分析，GBT 无标度区间范围为 [0.116, 0.901]，分形维数采用基于小波变换的分形维数法求解，GBT 的分形维数为  $D_{GBT} = 1.602$ ，轮轨不平度函数用于建模， $\varepsilon_1 = 2\%$ ， $\varepsilon_2 = 25\%$ ， $\varepsilon_3 = 20\%$ ，GBT 天线轮轨不平度的局部描述如图 7 所示。

为了测量指向精度，本实验首先确定了一个无线电源列表；然后，用望远镜进行了交叉扫描观察。在观测过程中，本实验记录了望远镜在相关时间内的指向精度和辐射功率。对射电点源在俯仰角或方位方向进行扫描观测后，得到了功率在俯仰角或方位方向的变化曲线。指向精度误差的存在导致功率最大值和无线电点源的位置偏差。因此，望远镜在俯仰角方向的指向精度误差是通过在俯仰角方向扫描射电点源得到的，通过在方位方向上扫描得到该

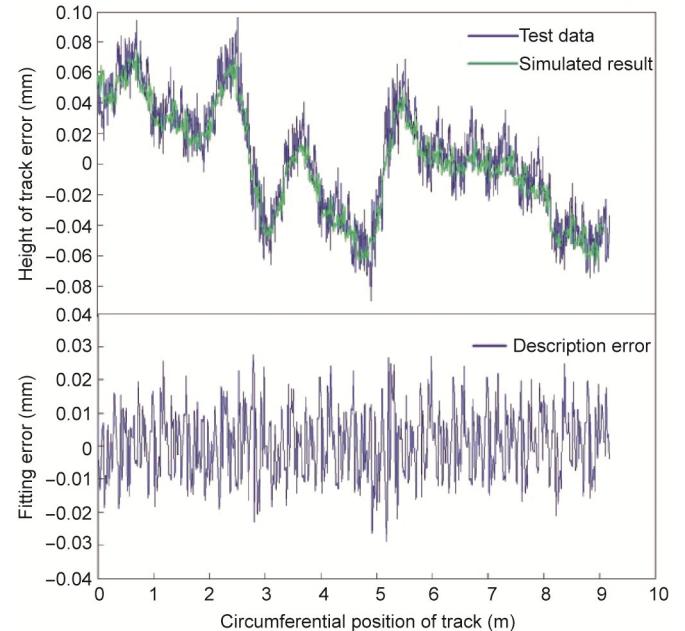


图 7. GBT 轮轨误差对比研究。

方向上的误差。

以 GBT 为例，本实验根据测试数据和式（17）构建了指向误差模型。然后，对应的轮轨误差允许值由指向误差的 RMS 值反向推导，根据式（27）给定轨迹误差的允许值，重新计算指向误差并与测量值进行比较 ( $E = 45^\circ$ )，具体如表 1 所示。

表 1 计算的指向误差与 GBT 的测量值之间的比较。GBT 的口径为 64 m，轮轨的 RMS 为 0.0568 m ( $E = 45^\circ$ )

RMS	Pointing error		
	Calculated values (arcsec)	Measured values (arcsec)	Relative errors (%)
$\sigma_A$	0.2591	0.2382	8.77
$\sigma_E$	0.2589	0.2407	7.56
$\sigma_{PE}$	0.3663	0.3386	8.18

#### 4.2. LMT 的实验验证

LMT 的口径为 50 m，副反射面直径为 2.5 m。它位于墨西哥普埃布拉州，是世界上最大的毫米波射电望远镜 [30~31]。其观测波段为 0.85~4 mm (75~350 GHz)，表面精度为 0.07 mm，指向精度为 1 角秒。轮轨直径为 39.6 m，由 20 条轮轨组成。轮轨误差的 RMS 为 0.1697 mm。用于 LMT 的测试方案与用于 GBT 的相同。本实验使用基于数据分布特征的验证方案，还绘制了 LMT 轮轨误差的测试数据分布直方图，如图 8 和图 9 所示。

表 2 给出了 LMT 的计算指向误差与测量值的比较，最大误差为 6.5%。

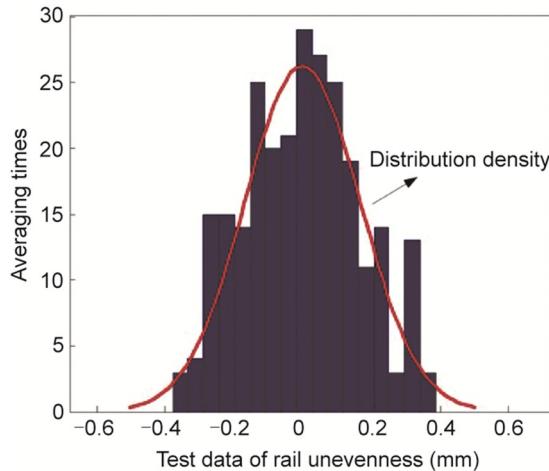


图8. LMT轮轨误差测试数据分布直方图。

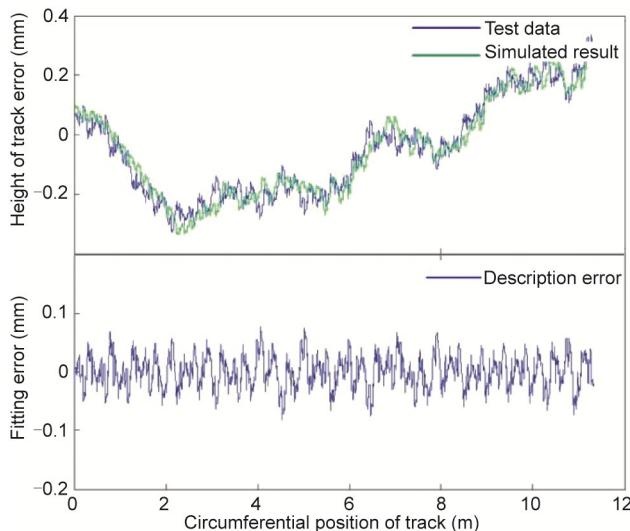


图9. LMT轮轨误差对比研究。

表2 LMT的计算指向误差与测量值的比较。LMT的口径为39.6 m, 轮轨的RMS为0.1679 m ( $E=45^\circ$ )

RMS	Pointing error		
	Calculated values (arcsec)	Measured values (arcsec)	Relative errors (%)
$\sigma_A$	1.2399	1.3022	4.78
$\sigma_E$	1.2368	1.3228	6.50
$\sigma_{PE}$	1.7513	1.8562	5.65

#### 4.3. 密云实验验证

北京密云50 m望远镜口径为32.5 m, 由21条轨迹组成, 全长102.1 m, RMS误差为0.3136 mm。根据相关系数检验方法, 确定密云望远镜的无标度区间为[0.263, 1.156], 利用基于小波变换的分形维数法计算出50 m天线的分形维数为 $D = 1.1521$ , 使用轨迹不平度函数进行建模,  $\varepsilon_1=2\%$ ,  $\varepsilon_2=25\%$ ,  $\varepsilon_3=20\%$ , 密云天线轨迹不平度的局部描述如图10所示。

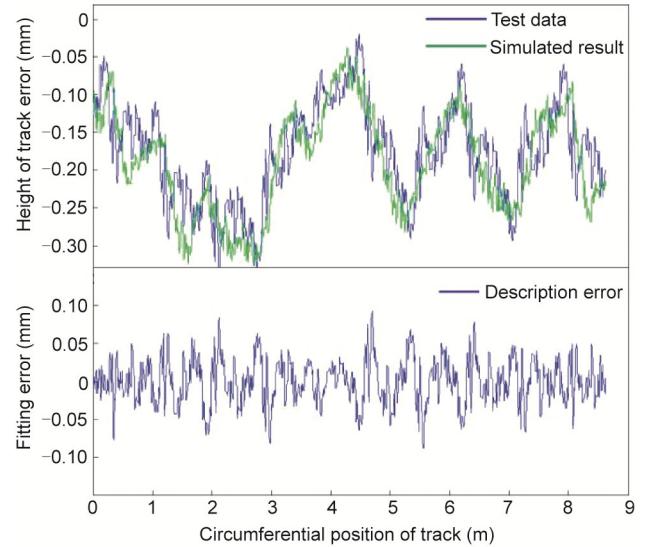


图10. 密云望远镜轮轨误差对比研究。

## 5. 结论

传统的设计方案无法充分满足QTT等大比例望远镜极高的指向精度要求。为了降低QTT设计与制造的难度, 本研究提出了一种轮轨表面的逆向设计方法。基于轮轨表面的误差特性, 首先提出了双尺度模型来描述轮轨误差。然后, 推导了轮轨误差对指向精度的影响机理。最后, 使用这种策略, 本研究从轮轨误差引起的指向误差中反向推导出轮轨误差的容许值。在GBT和LMT等望远镜工程上对所提的设计方法进行了实验验证。将所提出的方法与实测数据进行对比分析, 结果表明本文所提出的设计方法是高效可行的。

## 致谢

感谢国家自然科学基金(51775402和U1931139)的资助。

## Compliance with ethics guidelines

Na Li, Baoyan Duan, Xiangyang Li, Bin Zheng, and Jiang Wu declare that they have no conflicts of interest or financial conflicts to disclose.

## References

- [1] Kärcher HJ. Experience with the design and construction of huge telescope pedestals. In: Proceedings of Second Backaslog Workshop on

- Extremely Large Telescopes; 2003 Sep 9–11; Backaskog, Sweden. SPIE; 2003. p. 233–44.
- [2] Chu TS, Turrin R. Depolarization properties of offset reflector antennas. *IEEE Trans Antennas Propaga* 1973;21(3):339–45.
- [3] Bolli P, Orlati A, Stringhetti L, Orfei A, Righini S, Ambrosini R, et al. Sardinia radio telescope: general description, technical commissioning and first light. *J Astron Instru* 2015;4(3–4):1550008.
- [4] Antebi J, Kan FW. Precision continuous high-strength azimuth track for large telescopes. In: AngelJRP, GilmozziR, editors. *Proceedings of Future Giant Telescopes*; 2002 Aug 26–28; Waikoloa, New Zealand. SPIE; 2002. p. 612–23.
- [5] Schloerb FP. The large millimeter telescope. In: *Proceedings of Ground-Based and Airborne Telescopes II*; 2008 Jun 23–28; Marseille, France. SPIE; 2008 p.626701.
- [6] Kaercher HJ, Baars JWM. Design of the large millimeter telescope/gran telescopio millimétrico (LMT/GTM). In: Butcher HR, editor. *Proceedings of Astronomical Telescopes and Instrumentation*; 2000 Mar 27 – Apr 1; Munich, Germany. SPIE; 2000. p. 155–68.
- [7] Zhang XZ, Zhu XY, Kong DQ, Zheng L, Yao C, Zhang HB, et al. Measurements of electronic properties of the Miyun 50 m radio telescope. *Res Astron Astrophys* 2009;9(3):367–76.
- [8] Guiar CN, Lansing FL, Riggs R. Antenna pointing systematic error model derivations. *Telecommun Acquis Prog Rep* 1986;42(88):36–46.
- [9] Keitzer S, Kimbrell JE, Greenwald D. Deterministic errors in pointing and tracking system I: identification and correction of static errors. In: *Proceedings of Acquisition, Tracking, and Pointing V*; 1991 Aug 1; Orlando, FL, USA. SPIE; 1991. p. 406–14.
- [10] Juneja G, Kan FW, Antebi J. Update on slip and wear in multi-layer azimuth track systems. In: *Proceedings of Optomechanical Technologies for Astronomy*; 2006 May 26–31; Orlando, FL, USA. SPIE; 2006. p. 6273.
- [11] Deng D, Kiyoshima S. Numerical simulation of welding temperature field, residual stress and deformation induced by electro slag welding. *Comp Mater Sci* 2012;62(5):23–34.
- [12] Zong Y, Hu N, Duan B, Yang G, Cao H, Xu W. Manufacturing error sensitivity analysis and optimal design method of cable-network antenna structures. *Acta Astronaut* 2016;120:182–91.
- [13] Antebi J, Kan FW. Precision continuous high-strength azimuth track for large telescopes. In: *Proceedings of Future Giant Telescopes*; 2002 Aug 22–28; Waikoloa, HI, USA. SPIE; 2002. p. 612–23.
- [14] Gawronski W, Baher F, Quintero O. Azimuth-track level compensation to reduce blind-pointing errors of the Deep Space Network antennas. *IEEE Antenn Propag Mag* 2000;42(2):28–38.
- [15] Pisani T, Buffa F, Morsiani M, Pernechele C, Poppi S. Thermal behavior of the Medicina 32-meter radio telescope. In: *Proceedings of Modern Technologies in Space- and Ground-based Telescopes and Instrumentation*; 2010 Jun 27–Jul 2; San Diego, CA, USA. SPIE; 2010. p. 35–44.
- [16] Kong DQ, Wang SG, Wang JQ, Wang M, Zhang HB. A new calibration model for pointing a radio telescope that considers nonlinear errors in the azimuth axis. *Res Astron Astrophys* 2014;14(6):733–40.
- [17] Belov Y, Naumov A, Chernikova S, Popertenko B, Sapozhnikov B. The application of correlation analysis in the process of pointing calibration of 64-m Bear Lakes radio telescope. *IEEE Antennas Propag Soc Int Symp* 1997;1(I):568–71.
- [18] Alvarez ML, Torres CT, Rios EH, Santos DC, Cuevas LC, Leon-Huerta A, et al. Metrology and surface adjustment of primary reflector panels on the LMT. In: *Proceedings of Advances in Optical and Mechanical Technologies for Telescopes and Instrumentation*; 2014 Jun 22 – 27; Montréal, QC, Canada. SPIE; 2014. p. 3–11.
- [19] Doane DP, Seward LE. Measuring skewness: a forgotten statistic? *J Stat Educ* 2011;19(2):1–18.
- [20] Joanes DN, Gill CA. Comparing measures of sample skewness and kurtosis. *J Roy Stat Soc* 1998;47(1):183–9.
- [21] Deng D, Murakawa H. Prediction of welding distortion and residual stress in a thin plate butt-welded joint. *Comp Mater Sci* 2008;43(2):353–65.
- [22] Majumdar A, Bhushan B. Role of fractal geometry in roughness characterization and contact mechanics of surfaces. *J Tribol* 1990;112(2):205–16.
- [23] Hu YZ, Tonder K. Simulation of 3-D random rough surface by 2-D digital filter and Fourier analysis. *Int J Mach Tools Manufact* 1992;32(1–2):83–90.
- [24] Qiao B, Liu S. Error assessment in modeling with fractal Brownian motions. *Fract* 2013;21(3–4):1–8.
- [25] Wielebinski R, Junkes N, Grahl BH. The effelsberg 100-m radio telescope: construction and forty years of radio astronomy. *J Astron Hist Herit* 2011;14(1):3–21.
- [26] Gawronski W, Baher F, Quintero O. Azimuth-track level compensation to reduce blind-pointing errors of the deep space network antennas. *IEEE Antennas Propag Mag* 2000;42(2):28–38.
- [27] Matsuzawa A, Saito M, Iguchi S, Nakanishi K, Saito H. Development of highaccuracy pointing verification for ALMA antenna. In: *Proceedings of Groundbased and Airborne Telescopes V*; 2014 Jun 22–27; Montréal, QC, Canada. SPIE; 2014. p. 1–7.
- [28] Prestage RM, Constantines KT, Hunter TR, King LJ, Lacasse RJ, Lockman FJ, et al. The green bank telescope. *Proc IEEE* 2009;97(8):1382–90.
- [29] Symmes A, Anderson R, Egan D. Improving the service life of the 100-meter green bank telescope azimuth track. In: *Proceedings of Ground-Based and Airborne Telescope II*; 2008 Jun 23–28; Marseille, France. SPIE; 2008. p.1–12.
- [30] Hughes DH, Correa JJ, Schloerb FP, Erickson N, Romero JG, Heyer M, et al. The large millimeter telescope. In: *Proceedings of Ground-Based and Airborne Telescopes III*; 2010 Jun 27 – Jul 2; San Diego, CA, USA. SPIE; 2010.p. 1–13.
- [31] Okubo H, Kawai E, Kondo T, Osaki H, Nakajima J, Ishizuka K. Inclinometer measurement of Kashima 34 m antenna. *Technol Dev Cent News* 2001;11(19):13–4.