



Research
Green Chemical Engineering—Article

通过一个等价雷诺数揭示层流到湍流的转捩区域

陈晓东

School of Chemical and Environmental Engineering, Soochow University, Suzhou 215123, China

ARTICLE INFO

Article history:

Received 3 August 2018

Revised 20 September 2018

Accepted 27 September 2018

Available online 23 March 2019

关键词

局部等价雷诺数

转捩

壁面律

管道流动

平板流动

建模

摘要

流动从层流到湍流的转捩现象或其逆过程是工程科学中的最重要研究课题之一。为了研究流动现象中瞬时流动结构的形成和演化，即使流动现象仅仅发生在简单的圆管内，都需要相对复杂的设备或直接数值模拟方法（DNS）。本文提出了一个局部雷诺数的等效无量纲数 γ 。首先其物理意义在普适壁面律上得到了很好的验证。类似于雷诺系数，其定义为局部惯性作用和黏性作用之比， $\gamma = 1$ 表示两种作用相当。这与 $\gamma^+ = 1$ 一致（其中 γ^+ 是普适壁面律中定义的无量纲壁面距离）。研究发现， γ 对局部速度的局部导数随速度增加而变化的特性可以用来确定湍流的转捩。对于管道流动，转捩时 $\gamma \approx 25$ ；对于平板流动，转捩时 $\gamma \approx 151.5$ 。结果表明， γ 和速度（非线性）的某种组合可以确定湍流的产生（即产生湍流能量）。同样，对先前研究的重新评估显示，湍流的产生源是在一个较狭窄区域，流场的其余部分可能大部分为湍流的输送和耗散过程。这些理解将有助于未来的大规模湍流计算。

© 2019 THE AUTHORS. Published by Elsevier LTD on behalf of Chinese Academy of Engineering and Higher Education Press Limited Company This is an open access article under the CC BY-NC-ND license (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).

1. 引言

目前，为了研究流动现象中详细的瞬时流动结构及其演化过程，即使预测简单管道流动中的湍流转捩点或区域，也需要复杂的仪器装备加上直接数值模拟（DNS）[1–4]。所有这些现代研究都围绕着经典的临界雷诺数（ Re_c ）进行，角标 c 代表临界（critical）。Osborne Reynolds（1842—1912）在深入研究牛顿流体的流动行为[5,6]时，最引人注目的发现是流体具有两种流动模式：层流和湍流[5–7]。Reynolds提出的用于研究流体从一种流动模式转变到另一种流动模式的实验方法和理论很多年来激励了许多科研人员。其定义的无量纲数能用来识别流动状态从层流到湍流的转变：

$$Re = \frac{\rho U d}{\mu} \quad (1)$$

式中， ρ 表示流体密度（ $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ）； μ 表示流体黏度（ $\text{Pa} \cdot \text{s}$ ）； U 表示特征速度（ $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ）； d 表示与之对应的物体的特征长度（ m ）。对于圆管来讲， d 为其内直径；但是，如果流体对圆管做绕流， d 则为圆管的外直径。 Re 通常被认为是惯性力作用和黏性力作用之比。 Re 作为最重要的无量纲数，和其他与流动现象相关的无量纲数一起为摩擦、传质和传热等现象提供了分析基础。这在设计 and 优化过程装备时非常有用[7]。在惊叹Reynolds实验研究的同时，应该注意到实验用管的直径是有限的。因此，主要通过改变流体的黏度或速度来获得更大的 Re 。此外，实验中的示踪墨汁从管道中心线注入，只

E-mail address: xdchen@mail.suda.edu.cn

2095-8099/© 2019 THE AUTHORS. Published by Elsevier LTD on behalf of Chinese Academy of Engineering and Higher Education Press Limited Company This is an open access article under the CC BY-NC-ND license (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).

英文原文: Engineering 2019, 5(3): 576–579

引用本文: Xiao Dong Chen. Laminar-to-Turbulence Transition Revealed Through a Reynolds Number Equivalence. Engineering, <https://doi.org/10.1016/j.eng.2018.09.013>

有管道中心区域的流场率先被可视化了。所以，可视化实验反映的是沿管壁的湍流产生、传递和耗散3种现象的累积效应。由于这3种现象在可视化实验中交织在一起，因此雷诺数应该被视为一个全局参数。1952年，在管壁附近进行的测量显示出非常重要的结果，即用摩擦速度 u_τ 、运动黏度和摩擦速度的乘积 νu_τ ，分别缩放速度和距离，从而获取沿壁面向上的无量纲速度分布。测量结果表明，当 $y^+ \approx 11.5$ 时[其中 y^+ 是普适壁面律（ULW）[8]中定义的无量纲壁面距离]，湍流产生率最大。从理性的角度来看，此产生率最大处应为宽峰，应定义为 $y^+ \approx 11.5 \pm 5$ 。对于完全发展的壁面湍流，层流底层和缓冲层之间的公认分界为 $y^+ = 5$ [8,9]。

直到最近才有文献[1,2]研究管道流动里流体从局部扰动到充分发展的湍流过程中的微观瞬态细节。得益于强大的计算能力和现代实验技术，实验进行了沿管道流动方向上的局部区域的数据采集。在著名的管道临界雷诺数 $Re_c = 2300$ 附近进行了一系列的实验。

在实验室环境的小管径管道中，低 Re 下的湍流是瞬时的，但在特定的 Re_c 之后湍流却可以持续进行；然而，这是在局部观察到的现象（与Reynolds最初所做的“整体”观察不同）[1,2]。当局部现象流体的扰动的增值超过它的耗散时，就是瞬时湍流转向持续性湍流的临界点。在实验中，可以人为精确地控制扰动的产生以触发湍流。实验捕获了扰动的耗散和扩散过程的两个时间尺度（部分通过DNS建立）。直到第二次扰动成核并且湍流成分增加（随着 Re 增加而下降）时，同时直到湍流衰减并且流动再层流化（随 Re 的增大而增大）时，绘制出 Re 和平均时间的依赖关系，发现在 $Re_c = 2040 \pm 10$ 处产生了平均时间的非常明显的交叉，这标志着管道流动中层流开始转变为持续性湍流[1]。

为了解释从层流到湍流的转捩现象，对湍流前沿进行了非线性传递（对流项）的双稳定性分析[2]。使用同样的实验和DNS方法，随后的研究[3,4]调查了管道流动中湍流失稳这种有趣的现象。

值得注意的是，在湍流研究领域，包括飞行器设计等大多数实际问题都是用基于湍流动能和雷诺应力的半经验湍流模型来模拟的。这些模型能极大提高设计计算效率。虽然DNS方法被认为是直接获取湍流流型的终极方法，但我们对湍流的理解仍基于一定的直觉，无论是演讲报告的，还是课堂上讲授的。

本文从 Re 的概念出发，直观地推导出一个用于局部流体流动的无量纲数。这个无量纲数同样是惯性效应与

黏性效应的比值。基于它的定义，我们可以用与之前不同的方法对湍流的产生进行分析。本文用流体力学中的3个经典案例说明了该方法的有效性，分别是ULW、光滑圆管中的流动和光滑平板上的平行流动[9]。这些案例有广泛认可的解析解[9-13]，并允许进行一定的数学解析，以推导来精确地证明所要论证的论点。这种思想与Churchill[11]在美国化学工程师学会发表的著名报告一致，即在没有计算流体力学的环境下阐明运输现象的基本理论。

新的无量纲数除了能捕获湍流转捩点外，最重要的是发现湍流（如湍动能）可能起源于一些非常狭小的区域（由 γ 和速度来定义），而在其他区域主要进行传递和耗散。这一观点为湍流控制和未来大型湍流模拟的改进工作提供了一个思路。

2. 理论分析

2.1. 定义局部惯性效应和黏性效应之比

为了简洁地定义新的无量纲数，以光滑平板为边界定义一个半无限的笛卡儿坐标系。 u 表示平行于平板的 x 方向的速度分量，主要的速度梯度在 y 方向，因此，主要的剪应力可以表示为 $\tau = -\mu \partial u / \partial y$ 。由于平板壁面是无滑移边界，因此可近似写成 $\tau \approx -\mu(u_{ch}-0)/\Delta_{ch}$ 。式中， Δ_{ch} 是表征速度变化的特征距离； u_{ch} 表示特征速度。下标 ch 表示系统的特征值。使用上面定义的公式表示黏性效应，则一个新的无量纲数可以定义为 $\gamma = \rho \mu^2 / (\mu u_{ch} / \Delta_{ch})$ 。在 Δ_{ch} 趋于0时，该无量纲数可以写成局部形式：

$$\gamma = \frac{\rho u^2}{\mu |\partial u / \partial y|} \quad (2)$$

式（2）中用了速度梯度的绝对值以避免混淆。基于上述的推导，可以看出该无量纲数和 Re 是相似的。但在解释有限点 (x, y) 处的流体行为时，该无量纲数具有非常重要的物理意义。在 γ 很大时，可以忽略该点的黏性效应，该点的流体就能保持它的流动路径不变。在流动是湍流时，按惯例可将式（2）中的瞬时速度 u 替换为平均速度 \bar{u} 。一方面，为了产生涡旋， γ 必须达到某一个数量值；另一方面，为了维持湍流状态，流体就必须具有足够的能量（如其初始速度 u 要足够大）。当黏性效应和惯性效应相当时， $\gamma \approx 1$ 。此外， γ 具有方向依赖性，并且实际上与 Re 并不相同。因为 Re 超过临界值时，流动必将转变为湍流。而即便是在层流状态下， γ 的取值

都可能在0到无穷大间变化。

2.2. 确定 γ 符合 ULW

首先, 结果表明 γ 符合经典的ULW的要求, 说明其具有重要的物理意义。在 Re 较大的情况下, 无量纲速度分布表现出普适性。大量的实验数据[7–9]证明了此壁面律具有普适性, 因此大型湍流计算常用其构建壁面函数, 以避免直接解析壁面附近的流动, 从而减少计算消耗。ULW将流体边界层划分为3个区域: 黏性底层 (viscous layer, 也称壁面层)、缓冲层 (buffer layer) 和交叉层 (overlap layer) [9]。在黏性底层中, $0 \leq y^+ < 5$ 且 $u^+ = y^+$, 其中 $y^+ = y/\delta_v$ 。 $y^+ = 1$ 时, 壁面层的厚度为 $\delta_v = \nu/u_\tau$ 。摩擦速度定义为 $u_\tau = \sqrt{\bar{\tau}_w/\rho}$, 其中 $\bar{\tau}_w$ 表示壁面上的时均剪应力 ($\text{N}\cdot\text{m}^{-2}$)。 u^+ 定义为 $u^+ = \bar{u}/u_\tau$ 。

由上述定义可推导出:

$$\gamma = \left(\frac{y}{\delta_v}\right)^2 = (y^+)^2 \quad (3)$$

式 (3) 从本质上给出了一个重要发现, 即当 $y = \delta_v$ 时, $\gamma = 1$, 此时惯性力与剪应力相当。同样值得注意的是, $y^+ = 5$ 通常用来划分黏性底层和缓冲层, 此时 $\gamma = 25$ 。 $y^+ = 11.5$ 可能也是一个重要的值, 因为有研究报道此时ULW内湍流的产生达到了峰值。因此, 在假定局部的流体有足够的能量 (或足够快的速度) 的情况下, 我们可以从直觉上认为存在一个满足上述范围的临界的 γ , 它能够表征流动从层流到湍流的转捩过程。如上所述, 无论是在层流还是湍流中, γ 都能在0到无穷大的区间里变化。因此, 单个的 γ 值显然不能作为湍流产生的标志。

2.3. 管道流动

随后, 我们的策略是寻找 γ 和速度变化之间的关系。如Appendix A所示, 首先 γ 可以表示为不同的 Re 情况下 r/R 的函数, 其中使用平均速度 u_m 定义 Re ; r 表示径向坐标; R 表示管道半径。然后, 利用 u 和 r 的关系可以将 γ 整理成 u/u_m 的函数。在层流和湍流条件下同时将该函数对 u/u_m 微分, 可以得到 γ 随速度的变化, 这是一个非常有用的特征。层流的速度分布是抛物线形的, 而湍流的速度分布满足1/7律。结果表明, 在 $\gamma_{xx} \approx 25$ 时 (此时 $y^+ = 5$, 其中, 角标 xx 表示 x 方向的惯性效应与 x 方向的黏性效应的相互作用), 在层流和湍流对 u/u_m 的导数的交叉点处, $Re \approx 2083$ 。此时, $u/u_m \approx 0.597$ (见Supplementary data

中的图S1)。当使用湍流通用的1/ N 律来表示时均速度分布时, 得到临界 $Re \approx 2005.75$ (见Appendix A中的补充说明), 其中 N 表示湍流区时均速度分布经典近似的幂, 典型的取值为11。因此, 在 $\gamma_{xx} = 25$ 时, $\bar{u}/u_m = 0.650$ (见Supplementary data中的图S2)。这些分析表明, 当 $\gamma_{xx} = 25$ 时, 如果流体在局部有足够的能量就会产生湍流。

2.4. 平板流动

与管道流动不同, 平板上的流动至少是一个二维流动现象。通过相似的步骤[9]可以获取平板流动边界层内层流速度分布的解析解。即 $\bar{u}/U_\infty = f(\eta)$, 其中 η 表示无量纲的转换变量, $\eta = y/\sqrt{\rho U_\infty/2\mu x}$; U_∞ 表示远离边界的流体的速度。层流的速度分布同样也能表示为抛物线形的格式, 如果使用边界层厚度作为缩放标准 (见Appendix B的Supplementary data), 湍流的速度分布也能被近似表示为1/7律格式。同样, 可以再次对两种流动分别计算 $d\gamma_{xx}/d(\bar{u}/u_\infty)$ 。利用两者的交叉点得出的 $Re_{x,c} = 5.5 \times 10^5$, 这正是常被提及的平板流动的 Re_c 。如Appendix B中的Supplementary data所示, $\gamma_{xx} = 154.6$ 时, $y^+ = 12.4$ 。此时 $\bar{u}/U_\infty = 0.441$ 。Supplementary data的图S3展示了临界点的获取过程。事实上, 文献倾向于使用 $10^5 \sim 10^6$ 这个范围来表示平板流动的转捩区间。在 $Re_{x,c} = 10^5$ 时, $\gamma_{xx} = 89.24$, $y^+ = 9.45$, $\bar{u}/U_\infty = 0.487$ 。这一结果实际上与管道流动的临界条件比较接近的。

2.5. 从湍流回归到层流

在流率不变, 改变速度分布的情况下, 研究光滑直管内的 Re_c 是否变化是非常有趣的。固定 γ 为25不变, 然后看 Re_c 是否会受到速度分布的影响。结果表明, 将1/7律替换为1/20律时, 速度分布变得更平坦, Re_c 从2083变化到2485。也就是说, 在 $Re = 2485 \sim 2083$ 这个区间上, 如果速度分布在某种程度上被强制抹平, 湍流流动是有可能回归到层流状态的。一般来说, 如果 N 大于7, Re_c 也会增加。此结果和最近的研究[3]相吻合。

3. 进一步说明

本文通过引入 γ (定义为惯性效应和黏性效应之比), 成功地解释了湍流的产生。基于公认的速度分布, 通过 γ 对速度变化的导数和速度的关系来评估 Re_c 。现有的分析表明流动转变敏感区域是狭小的 (Supplementary data中图S1至图S3)。在交叉点之后, γ 对速度的局部导数

(以及 γ 本身)会随着速度的增加而快速增加,且在之后再无交点。增长的 γ 会破坏已经产生的湍流,很可能只有非常薄或狭小的区域(如线和薄壳体)才能持续产生湍流。进一步分析先前的研究[1],其结果展示了人工扰动从壁面产生到耗散或分离之前的平均时间和 Re 的函数关系。在该研究中虽然没有直接阐明,但是结果表明发生了非常急剧的临界现象。在小于或大于 Re_c 的 Re 下,产生持续的随机性的概率要低得多(见图1)。先前的工作[2](见文献[2]中的图3)也表明,一旦超过 Re_c ,速度波动所反映的湍流等级实际上不再随 Re 的增加而增加。因此,湍流的源很可能位于较狭窄的区域,如果的确如此,那么流场的其余部分将主要发生湍流能量的传递和耗散。此观点将可能对湍流的建模产生比较有意义的影响。

在未来的研究中,在相同的流动条件下和相同的装置中做流场可视化和比较层流与湍流中 γ 的分布是非常有价值的。最后需要强调的是,尽管管道流动和平板流动中的 Re_c 差异巨大,但是在临界条件下,本文定义的无量纲参数并没有太大不同。

致谢

本文作者在此由衷地对父亲陈乃兴教授(1933—2018)表达感激。是他近35年前引导了作者进入这个流体力学领域。在他得病去世前几周还和作者对这篇文章的想法有过初步的讨论。作者也感激能在1985—1987年间有机会在清华大学周力行教授的团队所做的突扩多相流的模拟工作。最后,作者的工作受到了之

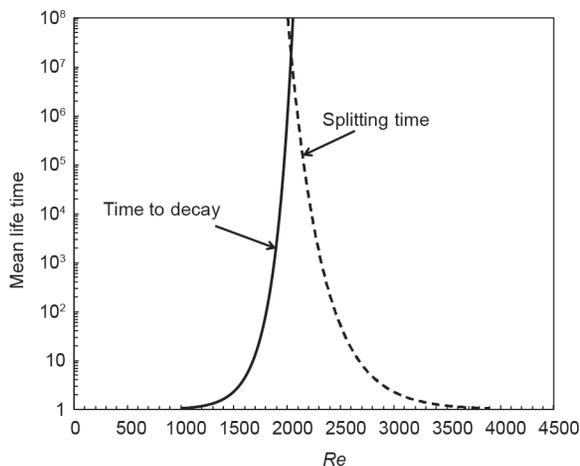


图1. 人工扰动从壁面产生到耗散(实线)或分离(虚线)之前的平均时间和 Re 的函数关系[1]。

前Canterburg大学和Fonterra公司的Tuoc Trinh博士在1980—1990年的湍流工作的影响。Tuoc在2000年初发表的博士论文里有一些让人难忘的关于边界层湍流的原创性想法。

缩写词

d	物体的特征长度 (m)
Re	雷诺数 (无量纲)
U	特征速度 ($\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$)
u, \bar{u}	局部速度和局部时均速度 ($\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$)
U_∞	平板流动中远离平板的流体的速度 ($\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$)
u_m	平均速度 ($\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$)
u_τ	ULW中定义的摩擦速度 ($\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$)
ν	运动黏度 ($\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$)
r	径向坐标 (m)
R	管道的半径 (m)
N	湍流区时均速度分布经典近似方程的幂数 (无量纲)
u_{ch}	特征速度 ($\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$)
x	笛卡儿坐标系的 x 坐标
y	笛卡儿坐标系的 y 坐标
y^+	ULW中定义的无量纲壁面距离
δ_ν	层流附面层厚度 (m) [8, 13]
Δ_c	表征速度变化的特征距离 (m)
γ	局部惯性效应和黏性效应之比 (无量纲)
η	经典平板流动相似解中的无量纲转换变量
μ	流体黏度 ($\text{Pa}\cdot\text{s}$)
ρ	流体密度 ($\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$)
$\tau, \bar{\tau}$	剪应力和时均剪应力 (Pa)

Appendices A and B. Supplementary data

Supplementary data to this article can be found online at <https://doi.org/10.1016/j.eng.2018.09.013>.

References

- [1] Avila K, Moxey D, de Lozar A, Avila M, Barkley D, Hof B. The onset of turbulence in pipe flow. *Science* 2011;333(6039):192–6.
- [2] Barkley D, Song B, Mukund V, Lemoult G, Avila M, Hof B. The rise of fully turbulent flow. *Nature* 2015;526(7574):550–3.
- [3] Hof B, de Lozar A, Avila M, Tu X, Schneider TM. Eliminating turbulence in

- spatially intermittent flows. *Science* 2010;327(5972):1491–4.
- [4] Kühnen J, Song B, Scarselli D, Budanur NB, Ried M, Willis AP, et al. Destabilizing turbulence in pipe flow. *Nat Phys* 2018;14(4):386–90.
- [5] Reynolds O. An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels. *Philos Trans R Soc Lond* 1883;174: 935–82.
- [6] Tokaty GA. A history and philosophy of fluid mechanics. New York: Dover; 1971.
- [7] Bird RB, Stewart WE, Lightfoot EN. Transport phenomena. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons; 2002.
- [8] Laufer J. The structure of turbulence in fully developed pipe flow. NACA technical report. United States: National Bureau of Standards; 1953 Jun. Report No.: NACA-TN-2954.
- [9] Schlichting H, Gersten K. Boundary-layer theory. 8th ed. Berlin: Springer; 2003.
- [10] Churchill SW. Progress in the thermal sciences: AIChE Institute Lecture. *AIChE J* 2000;46(9):1704–22.
- [11] Nikuradse J. Gesetzmäßigkeiten der turbulenten stromung in glatten rohren. Berlin: VDI Verlag; 1932. German.
- [12] Pai SI. On turbulent flow in circular pipe. *J Franklin Inst* 1953;256(4): 337–52.
- [13] Çengel YA, Cimbala JM. Fluid mechanics—fundamentals and applications. 2nd ed. New York: McGraw-Hill Higher Education; 2006.