

多阶段系统多目标优化的模糊优选 动态规划方法及应用

熊德琪, 殷佩海

(大连海事大学海洋环境工程学院, 辽宁大连 116026)

[摘要] 在模糊权距离和隶属度概念的基础上, 根据多阶段系统前后阶段联系特点, 将模糊优选理论与动态规划原理有机地结合起来, 提出能够有效地寻求多阶段多目标优化问题的最优均衡策略的模糊优选动态规划技术, 为求解多目标多阶段系统的优化决策问题提供了新路。最后例举一个多级反应器系统最优控制的应用算例。

[关键词] 多阶段; 多目标优化; 模糊优选; 动态规划; 隶属度

1 引言

在工程技术领域的许多优化问题, 有的本身就是多阶段问题, 有的在优化时为便于求解而将其分解为若干阶段, 也可归为多阶段问题。多阶段系统的特点是前一阶段的末状态是下一阶段的初始状态, 前一阶段的输出为后一阶段的输入, 各阶段的决策既决定自己的状态又影响下一阶段的决策, 从而影响整个过程的优化。多阶段系统的优化目的是要寻求使整个过程的目标或指标达到最优化时各阶段决策组成的策略。动态规划法在求解多阶段系统优化问题中得到广泛的运用^[1], 但大都只用于解决单目标系统的最优控制, 将其有效地应用于多目标(指标)多阶段系统的优化问题已逐渐受到重视。本文在模糊权距离和隶属度概念的基础上, 根据多阶段系统的前后阶段联系特点, 将模糊优选理论与动态规划原理有机地结合起来, 提出多目标多级串联系统优化的模糊优选动态规划技术。目的在于探索求解多阶段串联系统多目标优化和决策问题的新途径。

2 多目标多阶段系统模糊优选动态规划技术

设多阶段系统共包含 K 个阶段和 m 项目标,

考虑到有些优化目标前后阶段这种影响关系可能具有相乘的关系, 现采用前向动态规划方法求解。前向动态规划方法的特点是从第 1 阶段开始, 向后顺序递推, 对于多目标优化问题, 其递推公式可表示为

$$F_k(S_k^i) = \text{opt} \{ H_k(S_k, d_k) \oplus F_{k-1}(S_{k-1}^i) \} \quad (1)$$

状态转移方程

$$S_k = \varphi_k(S_{k-1}, d_k) \quad k = 1, 2, \dots, K$$

其中: $F_k(S_k^i) = [f_k^{(1)}(S_k^i), \dots, f_k^{(m)}(S_k^i)]^T$, $F_{k-1}(S_{k-1}^i) = [f_{k-1}^{(1)}(S_{k-1}^i), \dots, f_{k-1}^{(m)}(S_{k-1}^i)]^T$, 分别表示阶段 $k, k-1$ 局部暂定最优状态为 S_k^i, S_{k-1}^i 时 m 项目标合成值组成的向量; $H_k(S_k, d_k) = [h_k^{(1)}(S_k, d_k), \dots, h_k^{(m)}(S_k, d_k)]^T$, 表示阶段 k 状态为 S_k 时决策 d_k 的 m 项目标值组成的向量。上标 i 代表暂定最优, \oplus 为目标合成算子, 可根据目标性质取加减乘除等复合运算。

前向递推时, 设由已知初始状态 S_0 至阶段 1, 有 L 个可行决策。由于一个决策对应唯一状态, 显然在此特殊情况下第 1 阶段不需优选, 任一决策 d_1 所对应的状态 S_1^i 为阶段 1 的暂定最优状态, 即

$$F_1(S_1^i) = \{ H_1(S_1, d_1) \oplus F_0(S_0) \} \quad (2)$$

若顺序递推至阶段 k ($k \geq 2$), 已知阶段 $k-1$ 的暂定最优状态 S_{k-1}^i 至阶段 k 有 n 个可行决策 d_k ,

[收稿日期] 2000-01-06; 修回日期 2000-05-10

[基金项目] 国家留学基金留学回国人员科研资助和辽宁省教委高校科研项目(994521806)

[作者简介] 熊德琪(1967-), 男, 辽宁大连市人, 大连海事大学海洋环境工程学院副教授, 博士

即对应 n 个策略, 各策略的优劣由 m 项目标的合成值加以评判。如做出任一决策 d_j 即采取策略 $v_j(S_k)$, 可得到阶段 k 相应状态 S_k 时策略 $v_j(S_k)$ 目标合成值向量

$$\mathbf{V}_j(S_k) = [v_{1j}(S_k), \dots, v_{mj}(S_k)]^T \quad (3)$$

其中 $v_{ij}(S_k) = h_k^{(i)}(S_k, d_j) \oplus f_{k-1}^{(i)}(S_{k-1})$ 。则 n 个策略可构成阶段 k 状态为 S_k 时的目标合成值矩阵

$$\mathbf{V}_k(S_k) = \begin{bmatrix} v_{11}(S_k) & \dots & v_{1n}(S_k) \\ v_{21}(S_k) & \dots & v_{2n}(S_k) \\ \vdots & & \vdots \\ v_{m1}(S_k) & \dots & v_{mn}(S_k) \end{bmatrix} \quad (4)$$

将目标合成值矩阵 $\mathbf{V}_k(S_k)$ 规格化为相应的优属度矩阵, 可采用公式

$$r_{ij}(S_k) = \begin{cases} \frac{v_{ij}(S_k)}{\max_j v_{ij}(S_k)} & \text{越大越优型目标} \\ 1 - \frac{v_{ij}(S_k)}{\max_j v_{ij}(S_k)} & \text{越小越优型目标} \end{cases} \quad (5)$$

分别将目标合成值规格化。 $r_{ij}(S_k)$ 表达了策略 $v_j(S_k)$ 的第 i 项目标合成值对于优的隶属度, 简称目标隶属度。 $\max_j v_{ij}(S_k)$ 为取 n 个策略中第 i 项目的最大合成值。则有目标隶属度矩阵

$$\tilde{\mathbf{R}}_k(S_k) = \begin{bmatrix} r_{11}(S_k) & \dots & r_{1n}(S_k) \\ r_{21}(S_k) & \dots & r_{2n}(S_k) \\ \vdots & & \vdots \\ r_{m1}(S_k) & \dots & r_{mn}(S_k) \end{bmatrix} \quad (6)$$

根据递推公式 (1), 要从 n 个可行决策中优选出局部暂定最优决策 d_k^j 和局部暂定最优状态 S_k^j , 首先应依据目标隶属度矩阵 $\tilde{\mathbf{R}}_k(S_k)$ 确定阶段 k 状态为 S_k 时的相对优等策略 $\mathbf{g}(S_k)$ 和相对劣等策略 $\mathbf{b}(S_k)$, 它们的目标隶属度向量应分别为

$$\mathbf{g}(S_k) = (g_1(S_k), \dots, g_m(S_k)) = (\bigvee_j r_{1j}(S_k), \dots, \bigvee_j r_{mj}(S_k)) \quad (7)$$

$$\mathbf{b}(S_k) = (b_1(S_k), \dots, b_m(S_k)) = (\bigwedge_j r_{1j}(S_k), \dots, \bigwedge_j r_{mj}(S_k)) \quad (8)$$

式中: $\bigvee_j r_{ij}(S_k) = r_{i1}(S_k) \vee r_{i2}(S_k) \vee \dots \vee r_{in}(S_k)$; $\bigwedge_j r_{ij}(S_k) = r_{i1}(S_k) \wedge r_{i2}(S_k) \wedge \dots \wedge r_{in}(S_k)$

优化时 m 项目标的重要性不一定相同, 设 m 项优化目标的重要性权向量为

$$\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_m), \sum_{i=1}^m w_i = 1 \quad (9)$$

已知策略 $v_j(S_k)$ 的目标隶属度向量为

$$\mathbf{r}_j(S_k) = (r_{1j}(S_k), \dots, r_{mj}(S_k)) \quad (10)$$

则策略 $v_j(S_k)$ 与相对优等策略 $\mathbf{g}(S_k)$ 和相对劣等策略 $\mathbf{b}(S_k)$ 之间的差异可由广义权距离分别表示为^[2]

$$\|\mathbf{w}[\mathbf{g}(S_k) - \mathbf{r}_j(S_k)]\| = \sum_{i=1}^m \{w_i |g_i(S_k) - r_{ij}(S_k)|\} \quad (11)$$

$$\|\mathbf{w}[\mathbf{r}_j(S_k) - \mathbf{b}(S_k)]\| = \sum_{i=1}^m \{w_i |r_{ij}(S_k) - b_i(S_k)|\} \quad (12)$$

设策略 $v_j(S_k)$ 以优属度 $u_j(S_k)$ 隶属于模糊子集“优”, 以劣属度 $u_j^c(S_k)$ 隶属于模糊子集“劣”, 根据模糊集的余集定义有

$$u_j^c(S_k) = 1 - u_j(S_k) \quad (13)$$

由于隶属度可看作权重^[3], 则权距优距离 $u_j(S_k)$ $\|\mathbf{w}[\mathbf{g}(S_k) - \mathbf{r}_j(S_k)]\|$ 和权距劣距离 $u_j^c(S_k)$ $\|\mathbf{w}[\mathbf{r}_j(S_k) - \mathbf{b}(S_k)]\|$ 更完善地表达了策略 $v_j(S_k)$ 与相对优等策略 $\mathbf{g}(S_k)$ 和相对劣等策略 $\mathbf{b}(S_k)$ 之间的差异。为确定策略 $v_j(S_k)$ 的优属度 $u_j(S_k)$, 将经典的最小二乘法加以拓展, 建立目标函数使阶段 k 状态 S_k 的所有 n 个可行策略与相对优等策略和相对劣等策略的权距离之平方和最小, 即

$$\min \{ \Psi[u_j(S_k)] = \sum_{j=1}^n (\{u_j(S_k) \cdot \|\mathbf{w}[\mathbf{g}(S_k) - \mathbf{r}_j(S_k)]\|\}^2 + \{u_j^c(S_k) \cdot \|\mathbf{w}[\mathbf{r}_j(S_k) - \mathbf{b}(S_k)]\|\}^2) \quad (14)$$

为求解此目标函数, 令

$$\frac{d\Psi[u_j(S_k)]}{du_j(S_k)} = 0$$

经推导可得阶段 k 状态为 S_k 时各可行策略对于优的隶属度的计算模型为

$$u_j(S_k) = \left\{ 1 + \frac{[\sum_{i=1}^m (w_i |g_i(S_k) - r_{ij}(S_k)|)]^2}{[\sum_{i=1}^m [w_i |r_{ij}(S_k) - b_i(S_k)|]^2]} \right\}^{-1} \quad (15)$$

根据最优原理, 由 $\max\{u_j(S_k)\}$ 所对应的策略可得阶段 k 状态 S_k 的暂定最优决策 d_k^j , 与之相对应的状态为暂定最优状态 S_k^j , 同时得到暂定最优目标合成向量:

$$\mathbf{F}_k(S_k^j) = [f_k^{(1)}(S_k^j), \dots, f_k^{(m)}(S_k^j)]^T \quad (16)$$

由于从阶段 1 暂定最优状态 S_1^* 按上述多目标模糊优选动态规划技术进行递推时，在各个阶段包括最终阶段 K 均可得到相应的暂定最优状态 S_k^* 和目标合成值向量 $F(S_k^*)$ 。已知阶段 1 共有 L 个暂定最优状态，则相应地在最终阶段 K 有 L 个暂定最优状态和目标合成值向量，可组成最终阶段 K 的目标合成值矩阵

$$F_K(S_K) = \begin{bmatrix} f_K^{(1)}(S_K^1) & \cdots & f_K^{(1)}(S_K^L) \\ f_K^{(2)}(S_K^1) & \cdots & f_K^{(2)}(S_K^L) \\ \vdots & & \vdots \\ f_K^{(m)}(S_K^1) & \cdots & f_K^{(m)}(S_K^L) \end{bmatrix} \quad (17)$$

依据矩阵 (17) 从最终阶段 K 的 L 个暂定最优状态中优选真实最优状态 S_k^* 是比前述由状态 S_{k-1}^* 开始，从 n 个决策中优选局部暂定最优决策和局部暂定最优状态 S_k^* 高一层次的多目标模糊优选问题，但求解的思想与方法相似。相当于令 $f_K^{(i)}(S_k^*) = v_{ii}(S_k)$ ，运用上述方法与模型式 (15) 求出阶段 K 的各暂定最优状态所对应的隶属度，则 $\max\{u_i(S_k^*)\}$ 所对应的状态就是全局真实最优状态 S_k^* 。同时得到相应地全局真实最优目标合成值向量

$$F_K(S_k^*) = [f_K^{(1)}(S_k^*), \dots, f_K^{(m)}(S_k^*)]^T \quad (18)$$

和整个系统的最优策略即各阶段的最优决策集合 $d_1^*, d_2^*, \dots, d_k^*$ 。

当目标权向量 w 确定时，运用上述多目标多级过程优化的模糊优选动态规划技术就可以得到一最优解即多目标优化问题的一个非劣解。如果根据目标的相对重要性不同而改变目标权向量 w ，相应地可得到系统多目标优化的非劣解集，供决策者根据情况选择比较满意的非劣解即系统优化的最优均衡策略。

特殊地，当多目标变成单目标情形即 $m = 1$ 时，模糊优选模型式 (15) 则转化为

$$u_j(S_k) = \left[1 + \frac{|g_1(S_k) - r_{1j}(S_k)|^2}{|r_{1j}(S_k) - b_1(S_k)|^2} \right]^{-1} \quad (19)$$

由于 $\max\{u_j(S_k)\} = 1$ ，即不论是越大越优型目标还是越小越优型目标，阶段 k 状态为 S_k 时的最优策略的优属度

$$r_{1j}(S_k^i) = g_1(S_k) = r_{11}(S_k) \vee r_{12}(S_k) \vee \dots \vee r_{1n}(S_k) \quad (20)$$

实质上相当于单目标动态规划的前向递推形式：

$$f_k(S_k^i) = \text{opt}\{h_k(S_k, d_k) \oplus f_{k-1}(S_{k-1}^i)\} \quad (21)$$

以上分析可见，当多目标优化问题变成单目标优化问题时，多目标模糊优选动态规划技术与经典的单目标动态规划求解方法是一致的。

3 应用算例

设某处理系统由 3 个完全相同的反应器串联起来组成，如图 1 所示。各级反应器的出口污染物浓度 C_k 以及消耗的电能 e_k 与反应器中的搅拌速率 P_k 和温度 T_k 有关^[4]，且设其关系式为：

$$\begin{cases} C_k = C_{k-1} / [0.1 \sqrt{P_k} + 0.2^{0.1(T_k - 40)}] & k = 1, 2, 3 \\ e_k = 0.2P_k + T_k & k = 1, 2, 3 \end{cases}$$

此多级反应器系统的优化问题是，选择各级反应器的操作条件（即搅拌速率和温度），在污染物的初始浓度给定的前提下，($C_0 = 0.3 \text{ mol}$) 使反应系统的总能耗以及最后一级反应器流出的污染物浓度最小。这是一典型的多级过程多目标优化问题，现运用以上提出的多目标模糊优选动态规划技术求解其最优策略。

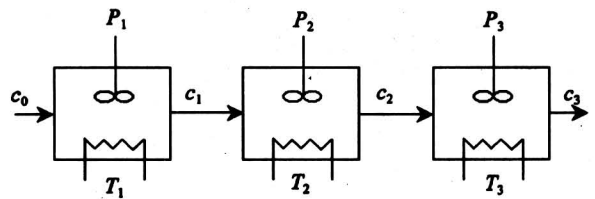


图 1 多级反应器系统

Fig.1 Multiple reactor system

为简化求解过程，设反应的搅拌速率分为 100 r/min 和 400 r/min 2 档，反应温度分为 40℃，50℃ 和 80℃ 3 档。则操作条件可组合为 6 种方式（见表 1）。

从表 1 看出，在方式 D2、D3 操作条件下，反应程度虽相同，但方式 D2 能耗比方式 D3 高；在方式 D4 操作条件下，反应程度不如方式 D5，而能耗又高。因此，方式 D2、D4 操作条件分别比方式 D3、D5 差，为简化起见，对方式 D2、D4 可不加考虑。则每 1 级反应器均有方式 D1、D3、D5 和 D6 4 种操作条件供选择。

这是一个 3 阶段的决策系统，现按顺序即前向递推来求解，优化流程如图 2 所示。取各反应器即各阶段的出口产品 α ， $\alpha - \beta$ ， $\alpha - \beta - \gamma$ 为状态变量 S_k ，污水初始进料为状态 0，各操作条件为决策

变量 d_k 。系统的总能耗为优化目标 1，按其性质，递推公式 (1) 中此目标的合成算子 \oplus 取相加；污染物最终出口浓度为优化目标 2，按其性质目标合成算子 \oplus 应取相乘。两种目标均为越小越优型。设两种目标同样重要，即目标权向量 $w = (0.5, 0.5)^T$ 。

表 1 操作条件组合方式

Table 1 The combinations of operating conditions

操作方式	$T_k/^\circ\text{C}$	$P_k/r \cdot \text{min}^{-1}$	C_k/C_{k-1}	e_k/kW
D1	40	100	1/2	60
D2	40	400	1/3	120
D3	50	100	1/3	70
D4	50	400	1/4	130
D5	60	100	1/5	80
D6	60	400	1/6	140

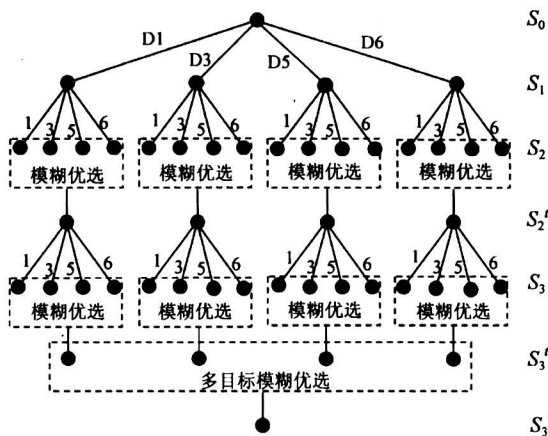


图 2 多级反应器系统优化流程

Fig.2 The optimization process of the multiple reactor system

1) 阶段 $k=1$ ，第 1 级反应器。阶段 1 的 4 个决策 D1、D3、D5 和 D6 分别对应着 4 种状态，即 $S_1 = \alpha = 1, 2, 3, 4$ ，均为阶段 1 的暂定最优状态，其相应的暂定最优目标合成值向量分别为

$$F_1(1) = (60, 0.50)^T \oplus (0, 30\%)^T = (60, 15\%)^T$$

$$F_1(2) = (70, 0.333)^T \oplus (0, 30\%)^T = (70, 10\%)^T$$

$$F_1(3) = (80, 0.20)^T \oplus (0, 30\%)^T = (80, 6\%)^T$$

$$F_1(4) = (140, 0.167)^T \oplus (0, 30\%)^T = (140, 5\%)^T$$

2) 阶段 $k=2$ ，至第 2 级反应器。阶段 1 的 4 种暂定最优状态 $\alpha = 1, 2, 3, 4$ 至阶段 2 均有 4 个

决策。现以阶段 1 暂定最优决策 $S_1^1 = \alpha = 1$ 为例递推。至阶段 2，有 4 个决策 D1、D3、D5 和 D6 可供选择，则状态 $S_2 = 1 - \beta$ 的目标合成值矩阵为

$$F_2(S_2) = \begin{bmatrix} 60 & 70 & 80 & 140 \\ 0.50 & 0.333 & 0.20 & 0.167 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 60 & 60 & 60 & 60 \\ 15\% & 15\% & 15\% & 15\% \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 & 130 & 140 & 200 \\ 7.5\% & 5\% & 3\% & 2.5\% \end{bmatrix}$$

运用规格化公式 (5) (越小越优型) 将目标合成值矩阵 $F_2(S_2)$ 转换为目标优属度矩阵

$$\tilde{R}_2(S_2) = \begin{bmatrix} 0.40 & 0.35 & 0.30 & 0.00 \\ 0.00 & 0.33 & 0.60 & 0.67 \end{bmatrix}$$

由模糊优选模型式 (15) 解得 4 个决策和状态的隶属度

$$u(S_2) = (0.26, 0.66, 0.97, 0.74)$$

由 $\max \{u_j(S_2)\} = 0.97$ 得阶段 2 暂定最优状态 $S_2^1 = 1 - 3$ ，则暂定最优决策为 $d_2^1 = D5$ ，相应的暂定最优目标合成值向量

$$F_2(S_2^1) = (140, 3\%)^T$$

3) 阶段 $k=K=3$ ，至最后一级反应器。与阶段 2 的求解过程相似，可解得阶段 3 暂定最优状态 $S_3^1 = 1 - 3 - 3$ ，暂定最优决策 $d_3^1 = D5$ ，和相应的暂定最优目标合成值向量

$$F_3(S_3^1) = (220, 0.6\%)^T$$

4) 同样地，在阶段 $k=1$ 时从暂定最优状态 $S_2^1=2$ ， $S_3^1=3$ 和 $S_4^1=4$ 开始进行递推，在最后阶段分别可解得相应的暂定最优状态和决策。则 4 个全局暂定最优目标合成值向量 $F_3(S_3^i)$ 可组成最后阶段的暂定最优目标合成值矩阵

$$F_3(S_3) = \begin{bmatrix} 220 & 230 & 240 & 300 \\ 0.6\% & 0.4\% & 0.24\% & 0.2\% \end{bmatrix}$$

5) 依据矩阵 $F_3(S_3)$ 最终优选全局真实最优状态 S_3^* 。应用上述方法与模糊优选模型式 (15) 得最终阶段 4 种暂定最优状态和目标合成值的隶属度

$$u(S_3^i) = (0.14, 0.58, 0.98, 0.86)$$

则与优属度最大值 0.98 相对应的状态 $S_3^3 = 3-3-3$ 为全局真实最优状态，相应的全局真实最优目标合成值向量

$$F_3(S_3^*) = (240, 0.24\%)^T$$

即此多级反应器系统在能耗与反应程度重要性相同时，其最优反应结果为总能耗 240 kW，最终污染

物出口浓度 0.24%。相应的最优策略为 D5-D5-D5，即 3 个串联反应器均采用操作条件 D5：搅拌速率 100 r/min，反应温度 60℃。

如果调整目标权向量，可得多级反应器多目标优化的非劣解集，列于表 2。

表 2 多级反应器系统优化结果

Table 2 The optimization results of the multiple reactor system

目标权重		最优策略	总能耗	原料出口浓度
w_1	w_2	$d_1^* - d_2^* - d_3^*$	E_K^*/kW	$C_K^*/\%$
0	1.0	D6-D6-D6	420	0.14
0.2	0.8	D5-D6-D6	360	0.17
0.5	0.5	D5-D5-D5	240	0.24
0.8	0.2	D5-D3-D5	230	0.40
0.9	0.1	D3-D3-D3	210	1.11
1.0	0	D1-D1-D1	180	3.75

由表 2 多目标优化结果可以看出，当目标权重取不同值时，会得到不同的最优策略，随着总能耗目标权重的增加，所采取的最优策略使总能耗逐渐降低；相应地污染物出口浓度逐渐增加。决策者可根据实际需要选择最优均衡策略，对多级反应器系统实行最优控制。

4 结语

多级过程具有自身的特点，前一级末的状态是

后一级的初始状态，也就是说后一级的输入受前一级输出的直接影响。而且对于某些优化目标这种影响关系可能具有相乘的性质。因此根据多级过程的前后联系特点，采用与反应物流向一致的递推求解方向即前向动态规划递推形式比较直观和简便。

动态规划是求解多阶段优化与决策问题的有效优化技术，但目前只成功地解决了单目标优化问题，而对于多目标优化决策问题，经典的动态规划以及在动态规划的递推过程中应用经典的多目标规划方法求出最优均衡解有一定难度。根据动态规划的求解特点是逐阶段地从有限离散的决策中进行优选，在此基础上组成整个过程的最优策略，本文将模糊优选理论与动态规划原理相结合，提出能有效求解多级过程多目标优化问题的模糊优选动态规划技术。并进行了实例应用研究，结果符合实际，为求解多阶段多目标的优化决策问题提供了新途径。

参考文献

- [1] 侯克复. 环境系统工程[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 1992. 78~87
- [2] 熊德琪. 城市大气污染物浓度预测模糊识别模式[J]. 环境科学学报, 1993, (4): 482~490
- [3] 楼世博, 孙章, 陈化成. 模糊数学[M]. 北京: 科学出版社, 1983. 120~124
- [4] 陈守煜. 水文水资源系统模糊识别理论[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 1990. 65~70

Fuzzy Optimum Selection Dynamic Programming Methodology for Multi-objective Optimization of Multi-stage Systems

Xiong Deqi, Yin Peihai

(College of Environmental Engineering, Dalian Maritime University, Dalian, Liaoning 116026, China)

[Abstract] Based on the concepts of the fuzzy weighted distance and membership degree, the fuzzy optimum selection dynamic programming technique that can be used for the optimization of multi-objective and multi-stage systems are developed by means of the combination of fuzzy optimum selection theory with dynamic programming technique. This is a new methodology for solving the multi-objective optimization problems of multi-stage systems. Finally, an application to the optimization of a multiple reactor system is given as an example.

[Key words] multi-stage; multi-objective optimization; fuzzy optimum selection; dynamic programming; membership degree