

# 复杂并流多效蒸发系统的数学模型与矩阵解法

阮奇, 陈文波, 黄诗煌, 叶长荣

(福州大学化学工程系, 福州 350002)

**[摘要]** 建立了有冷凝水闪蒸和额外蒸汽引出的复杂并流多效蒸发系统的数学模型, 常规并流多效蒸发模型只是该模型的一个特例。提出一种新算法——迭代法结合矩阵法求解模型并给出算法框图。算例表明新算法比常用的牛顿迭代法和 Broyden 法效率更高, 具有对初值要求不高、收敛稳定性好、收敛速度快等优点。对三效并流蒸发蔗糖水溶液系统, 采用冷凝水闪蒸和引出额外蒸汽将原料液从 26.7℃ 预热至 90℃, 约可节省 16% 的加热生蒸汽, 节能效果显著。

**[关键词]** 冷凝水闪蒸; 额外蒸汽引出; 并流流程; 多效蒸发; 数学模型; 矩阵解法

多效蒸发在化工、轻工、食品工业及海水淡化等行业中得到了广泛应用。许多研究者对常规并流多效蒸发系统模拟计算进行了研究, 大多数求解是采用试差法<sup>[1]</sup>、牛顿迭代法<sup>[2]</sup>和 Broyden 法<sup>[3]</sup>。众所周知, 蒸发大量水分时, 要消耗大量的加热蒸汽。为了减少加热蒸汽消耗, 提高生蒸汽的经济程度, 除采用多效蒸发以外, 还可采用冷凝水闪蒸、引出额外蒸汽预热原料液等措施。然而, 带有冷凝水闪蒸和引出额外蒸汽的复杂并流多效蒸发系统的数学模型及其求解方法未见报道。笔者首次建立了复杂并流多效蒸发系统的数学模型, 提出一种新算法——迭代法结合矩阵法求解模型并给出算法框图, 用 Visual Basic 5.0 语言编制了该算法的计算程序。

## 1 数学模型

### 1.1 工艺流程

有冷凝水闪蒸和额外蒸汽引出的复杂并流多效蒸发系统的流程如图 1 所示。为了进一步利用冷凝水的热能, 图 1 的流程中将从前一效冷凝水闪蒸器流出的温度较高的冷凝水引到后一效温度较低的冷凝水闪蒸器中继续闪蒸。另外, 设除末效外, 各效

均有冷凝水闪蒸和引出额外蒸汽。系统总效数为  $n$ , 图 1 中只示意画到第  $i$  效。

### 1.2 系统物料衡算

假定溶质不挥发, 对任一效(第  $i$  效)的溶质进行衡算, 有

$$F_0 w_0 = F_i w_i = (F_0 - W_1 - \dots - W_i) w_i \quad (1)$$

系统总蒸发水分量  $W$  为各效水分蒸发量之和, 即

$$W = \sum_{i=1}^n W_i = F_0 (1 - w_0/w_n) \quad (2)$$

### 1.3 系统热量衡算

考虑热损失及浓缩热, 对图 1 所示的复杂并流多效蒸发系统第  $i$  效先按无冷凝水闪蒸和额外蒸汽引出的情况进行热量衡算可得<sup>[1]</sup>

$$W_i = \{ \alpha_i D_i + [F_0 c_0 - c^* (W_1 + \dots + W_{i-1})] \beta_i \} \eta_i \quad (3)$$

式中:  $\eta_i$  为第  $i$  效的热利用系数, 对于一般溶液的蒸发, 可取  $\eta_i = 0.96 \sim 0.98$ , 对于浓缩热较大的物料, 可取  $\eta_i = 0.98 - 0.700 (w_i - w_{i-1})$ <sup>[1]</sup>;  $\alpha_i$ 、 $\beta_i$  分别为第  $i$  效的蒸发系数和自蒸发系数, 其定义式如下

$$\alpha_i = (H_{i-1} - c^* t'_{i-1}) / (H_i - c^* t_i)$$
$$\beta_i = (t_{i-1} - t_i) / (H_i - c^* t_i)$$

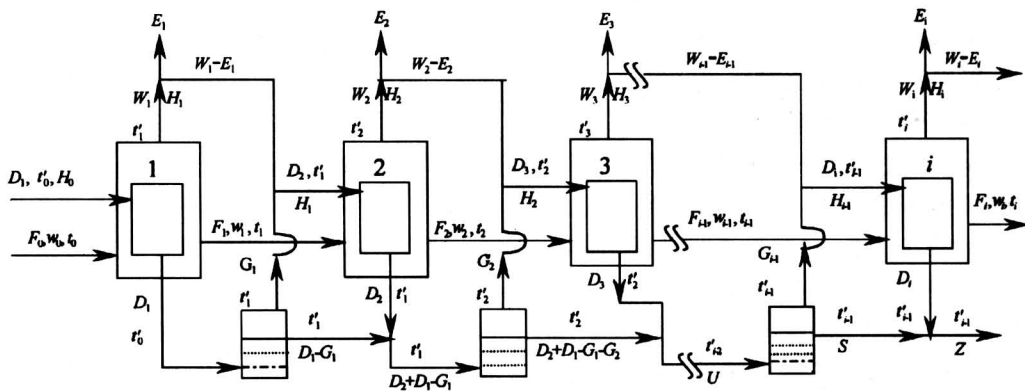


图1 复杂并流多效蒸发系统流程示意图

Fig.1 The flow chart of complex cocurrent multi-effect evaporation

$$\text{in Fig.1: } U = \sum_{i=1}^{i-1} D_i - \sum_{i=1}^{i-2} G_i, S = \sum_{i=1}^{i-1} (D_i - G_i), Z = \sum_{i=1}^i D_i - \sum_{i=1}^{i-1} G_i$$

现在对图1所示的复杂并流流程，考虑有冷凝水闪蒸与额外蒸汽引出，有

$$\left. \begin{aligned} i = 1 \text{ 时, } D_i &= D_1 \\ i \geq 2 \text{ 时, } D_i &= W_{i-1} - E_{i-1} + G_{i-1} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

当  $i \geq 3$  时，对第  $i-1$  效冷凝水闪蒸器进行热量衡算，可得

$$\left( \sum_{i=1}^{i-1} D_i - \sum_{i=1}^{i-2} G_i \right) c^* t'_{i-2} = G_{i-1} H_{i-1} + \left[ \sum_{i=1}^{i-1} (D_i - G_i) \right] c^* t'_{i-1} =$$

$$G_{i-1} (H_{i-1} - c^* t'_{i-1}) + \left( \sum_{i=1}^{i-1} D_i - \sum_{i=1}^{i-2} G_i \right) c^* t'_{i-1}$$

将上式移项整理并改写成

$$\left. \begin{aligned} G_{i-1} &= \left( \sum_{i=1}^{i-1} D_i - \sum_{i=1}^{i-2} G_i \right) c^* \omega_{i-1} = \\ & \left( D_1 + \sum_{i=2}^{i-1} D_i - \sum_{i=1}^{i-2} G_i \right) c^* \omega_{i-1} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中： $\omega_{i-1}$ 为第  $i-1$  效冷凝水闪蒸器的闪蒸系数，其定义式如下

$$\omega_{i-1} = (t'_{i-2} - t'_{i-1}) / (H_{i-1} + c^* t'_{i-1})$$

利用式(4)的结果 ( $D_i - G_{i-1} = W_{i-1} - E_{i-1}$ ) 则式(5)可写成

$$\left. \begin{aligned} G_{i-1} &= (D_1 + W_1 + \dots + W_{i-2} \\ & - E_1 - \dots - E_{i-2}) c^* \omega_{i-1} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

同理，当  $i=2$  时，对第1效冷凝水闪蒸器进行热量衡算，有

$$\left. \begin{aligned} G_1 &= D_1 c^* (t'_0 - t'_1) / (H_1 - c^* t'_1) \\ &= D_1 c^* \omega_1 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

### 1.4 各效传热面积的计算

根据传热速率方程可得各效蒸发器传热面积的计算式为

$$A_i = Q_i / (K_i \Delta t_i) = D_i r_i / (K_i \Delta t_i) \quad (8)$$

式中： $r_i$ 为第  $i$  效加热蒸汽（即  $i-1$  效二次饱和蒸汽）的汽化潜热，对第1效而言即为生蒸汽汽化潜热； $\Delta t_i$ 为第  $i$  效有效传热温差，当  $i=1$  时， $\Delta t_1 = t'_0 - t_1$ ，当  $i \geq 2$  时， $\Delta t_i$  应扣去  $\Delta''_i$  即  $\Delta t_i = t'_{i-1} - \Delta''_i - t_i$ ， $\Delta''_i$  值根据经验可取  $1^\circ\text{C}$  [1]； $D_i$  根据式(4)中定义处理； $\Delta t_i$  按等面积原则 [1] 进行分配

$$\left. \begin{aligned} \Delta t_i &= \Delta t (D_i r_i / K_i) / \left( \sum_{i=1}^n D_i r_i / K_i \right) \\ \Delta t &= \sum_{i=1}^n \Delta t_i = t'_0 - t'_K - \sum_{i=1}^n (\Delta'_i + \Delta''_i + \Delta'''_i) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

计算  $\alpha_i$ 、 $\beta_i$ 、 $\Delta t_i$  时均需各效溶液的沸点  $t_i$ ，其值可按相平衡方程 [1]（汽液温度关系式）计算

$$t_i = t'_i + \Delta'_i + \Delta''_i$$

式中： $\Delta'_i$  用杜林方程 [1] 或专用的关联式 [4] 计算； $\Delta''_i$  与各效蒸发压力  $P_i$  及溶液液面高度有关 [1]， $P_i$  可通过安托因方程与  $t'_i$  关联后计算。

$\alpha_i$ 、 $\beta_i$  和  $\omega_{i-1}$  的定义式均与饱和蒸汽的焓值  $H_i$  有关。为编程计算方便，将文献 [1] 饱和水蒸汽表中的汽化潜热和焓与温度的关系回归成如下：

$$\left. \begin{aligned} H_i &= 2474771.0 + 2410.2 t'_i - 3.8 t'^2_i \\ r_i &= 2466904.9 - 1584.3 t'_{i-1} - 4.9 t'^2_{i-1} \end{aligned} \right\}$$

## 2 模型求解

多效蒸发计算就是联立求解各效物料衡算式、



$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ c^* \omega_2 E_1 \\ \vdots \\ c^* \omega_{n-1} (E_1 + E_2 + \dots + E_{n-2}) \end{bmatrix}$$

各分块矩阵的阶数分别是： $A_1$  为  $n + 1$  阶方阵， $A_2$  为  $(n - 1) \times (n + 1)$  阶矩阵， $A_3$  为  $(n + 1) \times (n - 1)$  阶矩阵， $A_4$  为  $(n - 1)$  阶方阵； $B_1$  和  $C_1$  均为  $(n + 1) \times 1$  阶矩阵； $B_2$  和  $C_2$  均为  $(n - 1) \times 1$  阶矩阵。

### 2.2 新算法简介

解矩阵方程需给系数矩阵 ( $A_1$ 、 $A_2$  和  $A_3$ ) 中的元素和列向量 ( $C_1$  和  $C_2$ ) 中的元素赋初值，

这些元素与  $\alpha_i$ 、 $\beta_i$ 、 $\omega_i$ 、 $\eta_i$  等量有关，这些量又与  $t'_i$ 、 $t_i$ 、 $H_i$ 、 $w_i$  等未知量有关，因而矩阵方程实质是非线性方程组。若给定  $\alpha_i$ 、 $\beta_i$ 、 $\omega_i$ 、 $\eta_i$  ( $\eta_i$  与  $w_i$  有关时给定  $w_i$ ) 等变量的值，则方程组转化为线性方程组。本文提出一种新算法——迭代法结合解线性方程组的矩阵法求解模型，即先凭经验确定有关变量的初值，将问题视为线性方程组；用高斯-约旦消去法<sup>[5]</sup>解线性方程组得出  $D_1$ 、 $W_i$ 、 $G_i$ ；再按等面积原则得出  $\Delta t_i$  [由式 (9) 可知计算  $\Delta t_i$  也必须给  $r_i$  和  $\Delta t$  赋初值]；最后用传热速率方程计算  $A_i$ ，并判断是否符合精度要求，若不符合则用修正后的有关变量值进行下一轮迭代计算直至收敛。新算法的计算框图如图 2 所示。

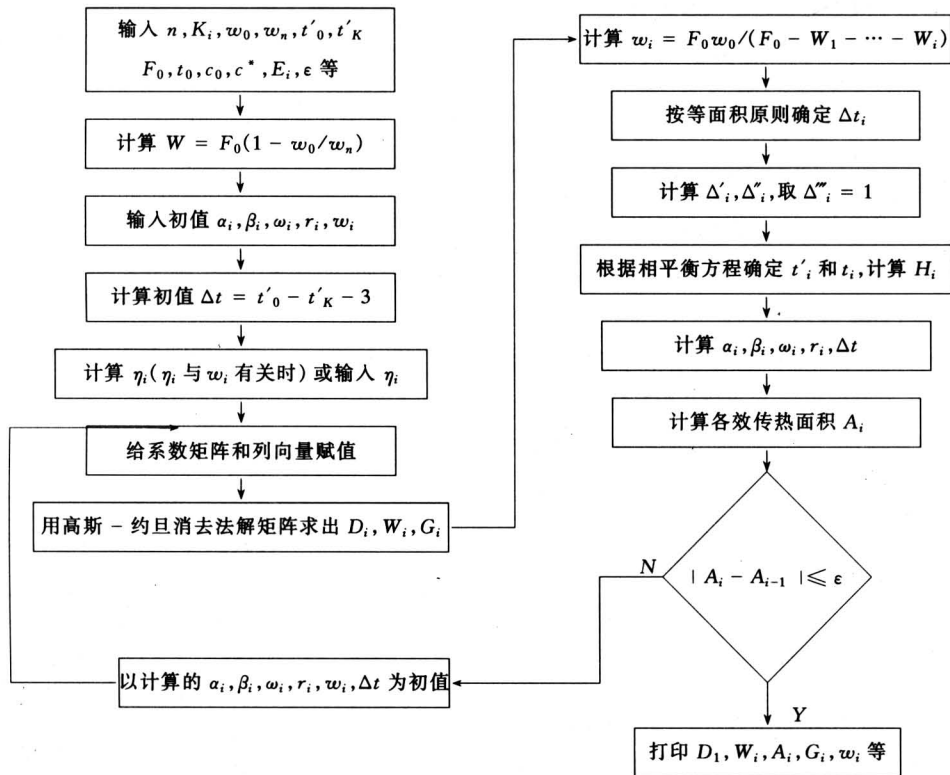


图 2 新算法程序框图

Fig.2 The new algorithm flow chart

据上述分析，用迭代法结合矩阵法求解必须解决  $\alpha_i$ 、 $\beta_i$ 、 $\omega_i$ 、 $w_i$ 、 $r_i$ 、 $\Delta t$  的初值如何确定。根据文献 [1] 的介绍， $\alpha_i$  近似为 1， $\beta_i$  的范围一般为 0.0025~0.025 (第 1 效为沸点进料则  $\beta_1 = 0$ )，因而  $\alpha_i$ 、 $\beta_i$  的初值不难确定； $\omega_i$  的初值可参照  $\beta_i$  的范围取； $r_i$  的初值可取  $2250 \times 10^3$ ； $w_i$  的初值可按等蒸发量原则<sup>[1]</sup>由式 (1) 和式 (2) 确定；

$\Delta t$  的初值可取为  $t'_0 - t'_K - 3$ 。综上所述，新算法所需的初值很容易确定。

### 2.3 新算法的收敛性

迄今为止，有关复杂并流多效蒸发系统的数学模型及求解方法未见报道，为了检验新算法的优越性，令块矩阵  $C_1$  中的  $E_i$  为零，并将块矩阵  $A_2$ 、 $A_3$ 、 $A_4$ 、 $B_2$  和  $C_2$  令为零矩阵，则矩阵方程简化

为没有冷凝水闪蒸和额外蒸汽引出的常规并流多效蒸发的矩阵。用新算法解文献 [3] 报道的常规三效并流蒸发系统, 经过 8 次迭代即收敛, 而文献 [3] 采用 Broyden 法求解需要赋 12 个变量的初值 (前已述及, 该法有些初值是难以确定的, 因而会影响迭代的稳定性和收敛性), 经过 19 次迭代才收敛。由此可见, 新算法与目前常用的 Broyden 法相比具有对初值要求不高、收敛稳定性好、收敛速度快等优点。特别是当效数多、数学模型为大型方程组以及在多效蒸发系统的优化设计时, 新算法的优越性将更为明显。

### 3 计算实例

兹有一并流加料的三效蒸发系统, 将含蔗糖  $w = 10\%$  的水溶液浓缩到 50%, 沸点升高用下式  $\Delta'_i = 1.78w_i + 6.22w_i^2$  ( $^\circ\text{C}$ ) 估算。加热用的饱和蒸汽压力为 205 kPa ( $t'_0$  为 121.1  $^\circ\text{C}$ ), 冷凝器的压力为 13.7 kPa ( $t'_K$  为 51.3  $^\circ\text{C}$ )。进料速率为  $6.3 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$ , 温度为 26.7  $^\circ\text{C}$ , 溶液比热容为  $c_0 = 4190 - 2350w_0 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ 。估算出的传热系数分别为:  $K_1 = 3123 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{C}^{-1}$ ,  $K_2 = 1987 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{C}^{-1}$ ,  $K_3 = 1136 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{C}^{-1}$ 。上述设计参数取自文献 [4], 文献 [4] 的算例不考虑  $\Delta'_i$  的

影响并取  $\eta_i = 1$ , 本文按蒸发器内溶液液面高度为 1.5 m 计算  $\Delta'_i$ , 并取  $\eta_i = 0.98$ 。假设各效的传热面积相等, 分别计算下列操作条件下的传热面积、生蒸汽的消耗量: 1) 没有冷凝水闪蒸; 2) 有冷凝水闪蒸; 3) 假设用换热器将物料从 26.7  $^\circ\text{C}$  预热到 90  $^\circ\text{C}$  预热所需的热量为 1577.2 kW, 若完全用生蒸汽加热要消耗加热蒸汽  $D_0 = 0.7159 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$ , 此部分热量由以下几个途径获得: ①直接用生蒸汽作为加热源; ②取第一效的额外蒸汽作为加热源; ③取等量的一效和二效的额外蒸汽作为加热源。①、②、③三种情况蒸发系统均有冷凝水闪蒸。

用迭代法结合矩阵法求解, 将已知设计参数输入程序并运行得到模拟计算结果如表 1 所示。

从表 1 可知: 对本例三效并流蒸发系统, 采用冷凝水闪蒸 (序号 2) 比无冷凝水闪蒸 (序号 1) 可节省加热蒸汽消耗量 3.41%, 而传热面积仅增加 1.44%。由于多效蒸发系统中加热蒸汽费用占年总费用的主要部分 (对于蒸发器材质为不锈钢或碳钢时约占 88%~96%<sup>[6]</sup>), 故采用冷凝水闪蒸是节省年费用的有效措施; 若同时采用冷凝水闪蒸和引出额外蒸汽预热原料液, 则节能效果更为显著, 以序号 3 中的③情况为例, 可节省加热蒸汽消耗量 16.62%, 而各效传热面积还减小 11.29%。

表 1 算例模拟计算结果

Table 1 Calculation results of cocurrent three effect evaporation

No.	$A_i$ ( $A_1 = A_2 = A_3$ ) / $\text{m}^2$	$D_0$ / $\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$	$D_1$ / $\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$	$D_0 + D_1$ / $\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$	$E_i$ / $\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$	Save fresh vapor /%
1	140.79	0	2.581	2.581	0	-
2	142.82	0	2.493	2.493	0	3.41
①	131.50	0.716	1.824	2.540	0	1.59
3 ②	125.26	0	2.276	2.276	$E_1 = 0.706$	11.82
③	124.89	0	2.152	2.152	$E_1 = E_2 = 0.349$	16.62

### 4 结论

1) 建立了冷凝水闪蒸和额外蒸汽引出的复杂并流多效蒸发系统的数学模型, 常规并流多效蒸发系统只是该模型的一个特例。

2) 迭代法结合矩阵法是求解多效蒸发系统问题的一种新的有效方法, 与目前常用的 Broyden 法相比, 具有对初值要求不高、收敛稳定性好、收敛

速度快等优点。

3) 本文的模型能够定量计算冷凝水闪蒸和额外蒸汽引出对多效蒸发加热蒸汽消耗量的影响。算例表明在三效并流蒸发时采用冷凝水闪蒸和额外蒸汽引出预热原料液可节省加热蒸汽消耗量 16% 左右, 因而在并流多效蒸发系统中, 除末效以外的各效均应考虑冷凝水闪蒸和引出额外蒸汽预热原料液。

## 符号说明

$A_i$	第 $i$ 效传热面积, $m^2$	$t'_i$	第 $i$ 效二次蒸汽饱和温度, $^{\circ}C$
$\Delta t$	总的有效传热温度差, $^{\circ}C$	$t'_K$	冷凝器中二次蒸汽饱和温度, $^{\circ}C$
$c_0$	料液比热, $J \cdot kg^{-1} \cdot ^{\circ}C^{-1}$	$t_0$	料液温度, $^{\circ}C$
$c^*$	水的比热, $J \cdot kg^{-1} \cdot ^{\circ}C^{-1}$	$t_i$	第 $i$ 效溶液沸点, $^{\circ}C$
$D_1$	加热生蒸汽流率, $kg \cdot s^{-1}$	$\Delta t_i$	第 $i$ 效有效传热温度差, $^{\circ}C$
$D_0$	预热原料液的生蒸汽流率, $kg \cdot s^{-1}$	$W$	总蒸发水分量, $kg \cdot s^{-1}$
$D_i$	第 $i$ 效加热蒸汽流率, $kg \cdot s^{-1}$	$W_i$	第 $i$ 效蒸发水分量, $kg \cdot s^{-1}$
$E_i$	第 $i$ 效引出额外蒸汽流率, $kg \cdot s^{-1}$	$w_0$	料液浓度, 质量分率
$F_0$	进料流率, $kg \cdot s^{-1}$	$w_i$	第 $i$ 效完成液浓度, 质量分率
$F_i$	第 $i$ 效完成液流率, $kg \cdot s^{-1}$	$\alpha_i$	第 $i$ 效蒸发系数
$G_i$	第 $i$ 效冷凝水闪蒸汽流率, $kg \cdot s^{-1}$	$\beta_i$	第 $i$ 效自蒸发系数
$H_0$	加热生蒸汽的焓, $J \cdot kg^{-1}$	$\Delta'_i$	第 $i$ 效蒸汽压下降引起的温差损失, $^{\circ}C$
$H_i$	第 $i$ 效二次饱和蒸汽的焓, $J \cdot kg^{-1}$	$\Delta''_i$	第 $i$ 效液柱静压头引起的温差损失, $^{\circ}C$
$K_i$	第 $i$ 效蒸发器总传热系数, $W \cdot m^{-2} \cdot ^{\circ}C^{-1}$	$\Delta'''_i$	第 $i$ 效蒸汽在效间流动造成的温差损失, $^{\circ}C$
$Q_i$	第 $i$ 效传热速率, $W$	$\omega_{i-1}$	第 $i-1$ 效冷凝水闪蒸系数
$r_i$	第 $i$ 效加热蒸汽的汽化潜热, $J \cdot kg^{-1}$	下角标	
$t'_0$	加热生蒸汽的饱和温度, $^{\circ}C$	$i$	某效数
		$n$	末效

## 参考文献

- [1] 上海化工学院, 成都科技大学, 大连工学院. 化工原理(上册)[M]. 北京: 化学工业出版社, 1980. 316~352
- [2] Holland C D. Fundamentals and modeling of separation processes[M]. Englewood Cliffs, N J: Prentice-Hall, 1975. 5~42
- [3] 刘玉军, 徐尧润, 魏钟. 多效蒸发过程模拟的 Broyden 解法[J]. 化学工程, 1991, 19(3): 56~61
- [4] 谭天恩, 麦本熙, 丁惠华. 化工原理(上册)[M]. 北京: 化学工业出版社, 1992. 302
- [5] 周爱月. 化工数学[M]. 北京: 化学工业出版社, 1995. 114~121
- [6] 梁虎, 王黎, 朱平. 多效蒸发系统优化设计研究[J]. 化学工程, 1997, 25(6): 48~51

## The Mathematics Model and Matrix Method of Complex Cocurrent Multi-Effect Evaporation

Ruan Qi, Chen Wenbo, Huang Shihuang, Ye Changshen

(Department of Chemical Engineering, Fuzhou University, Fuzhou 350002, China)

[Abstract] The model of complex cocurrent multi-effect evaporation with condensed water flash and extra vapor elicitation is established. The conventional model of cocurrent multi-effect evaporation is a simplified example of the model. A new algorithm (iteration method combining with matrix method) is presented. The results show that the new algorithm is which increases the convergent speed and stability, more efficient than the Newton method and Broyden method. With condensed water flash and preheating cane sugar solution from 26.7 to 90  $^{\circ}C$  by elicitation extra vapor, the fresh vapor expenditure of cocurrent three-effect evaporation is decreased by about 16%.

[Key words] condensed water flash; extra vapor elicitation; cocurrent; multi-effect evaporation; mathematics model; matrix method