

# 微分和表观静摩擦系数的表式

王渭源

(中国科学院上海冶金研究所传感技术国家重点实验室, 上海 200050)

**[摘要]** 当前, 工程师和科学家都对微牛和纳牛量级载荷静摩擦系数(以下简称微牛纳牛静摩擦系数)很感兴趣。但文献中至今没有详细讨论过微牛纳牛静摩擦系数与载荷的关系, 而且发表的实验结果都不相互讨论。从微分静摩擦系数的定义出发, 导出几种典型模型下微分静摩擦系数和表观静摩擦系数的表式, 并据此广泛讨论这些文献中的实验结果。

**[关键词]** 微分静摩擦系数; 微牛纳牛静摩擦系数; 表观静摩擦系数; 宏观静摩擦系数

## 1 引言

摩擦是一门经典学科。在宏观物体间, 人们早已总结出 Amontons 定律<sup>[1]</sup>:

$$F = \mu L, \quad (1)$$

其中拖动物体上宏观载荷所需的摩擦力  $F$  与其载荷  $L$  成正比, 其比例系数  $\mu$  称为宏观静摩擦系数, 是常数, 与物体间的载荷和接触面积无关。

但是, 用扫描隧道显微镜、原子力显微镜和摩擦力显微镜等对微牛和纳牛量级载荷的摩擦研究指出, 这种情况下 Amontons 定律往往不能应用, 除载荷外, 摩擦力还与其他多种因素有关, 例如界面情况、气氛条件等。下面列举这些文献中有关载荷对摩擦力影响的论文。

Schwarz 等<sup>[2]</sup>定量测定了碳化合物、 $\text{GeS}_2$  和云母在纳牛量级载荷下的摩擦特性, 结果表明在多数情况下摩擦力与载荷非常符合  $F \sim L^{2/3}$  关系。He 等<sup>[3]</sup>理论模拟了两个紧密接触物体间“第三物体”对静摩擦的影响, 提出了一个简单和普遍说明静摩擦的关系式, 符合实验结果, 包括 Amontons 定律。Beerschwinger 等<sup>[4]</sup>测定了微马达轴承材料的静摩擦和动摩擦, 发现对微小面积和微小载荷时

( $100 \mu\text{m}^2$  和几十微牛量级), 大多数材料摩擦系数不是常数, 而是随载荷增加而减少。Bhushan 等<sup>[5]</sup>测定了多种材料的宏观和微观摩擦系数, 结果表明同一材料的微观摩擦系数总是小于宏观摩擦系数。

已有文献的实验结果, 往往是基于本身实验, 以及与已有理论模型作比较, 当摩擦力与载荷呈线性、摩擦系数为常数时就给出数据, 否则就给出摩擦力与载荷的关系。至今, 还没有详细讨论过静摩擦系数与载荷的关系, 而且本身的实验数据没有与文献结果进行比较和讨论。

本文提出微分静摩擦系数概念, 由此导出微分静摩擦系数和表观静摩擦系数的表式, 并据此广泛讨论上述文献中的实验结果。

## 2 微分静摩擦系数和表观静摩擦系数的表式

一般地说, 载荷与衬底间实际接触面积  $A$  小于表观接触面积, 因为两物体接触的只是表面尖锐处, 接触面积  $A$  随着形变增加而增加, 但总小于表观接触面积。在实际接触面积  $A$  上, 载荷对衬底的正向压力为

[收稿日期] 2001-04-28; 修回日期 2001-06-08

[基金项目] 国家重点基础研究发展规划项目 (G1999033101)

[作者简介] 王渭源 (1930-), 男, 浙江镇海市人, 中国科学院上海冶金研究所研究员, 博士生导师

$$P = \frac{L}{A}, \quad (2)$$

静摩擦的平均切向应力为

$$\tau = \frac{F}{A}, \quad (3)$$

对一个给定的摩擦力—载荷关系，微分静摩擦系数定义为

$$\tilde{\mu} = \frac{dF}{dL}. \quad (4)$$

通常，实验不能给出微分静摩擦系数  $\tilde{\mu}$ ，而仅能给出表观静摩擦系数  $\bar{\mu}$ （一段实验数据的平均值），因为  $dF$  和  $dL$  非常小，实验不能测出。依载荷量级， $\bar{\mu}$  可以是微牛纳牛静摩擦系数（载荷为微牛纳牛量级），也可以是宏观静摩擦系数（载荷为牛量级）。以下就一些感兴趣的模型给出  $\tilde{\mu}$  和  $\bar{\mu}$  的表式，并据此广泛讨论这些文献实验结果。

### 2.1 Amontons 模型

Amontons 提出的适合于理想弹性和塑性形变表面模型<sup>[1]</sup>基于式 (2) 和式 (3) 中  $P$  和  $\tau$  都是常数，或  $dP = 0$  和  $d\tau = 0$ ，于是由式 (4) 微分摩擦系数定义，有

$$\tilde{\mu} = \frac{dF}{dL} = \frac{\tau}{P} = \frac{F}{L} = \bar{\mu} \equiv \text{常数}. \quad (5)$$

式 (5) 表示微分摩擦系数  $\tilde{\mu}$  等于表观摩擦系数  $\bar{\mu}$ ，等于同一个常数。

### 2.2 尖端与平整样品接触模型

尖端与平整表面接触模型（单凸点或 Hertz 模型）<sup>[6]</sup>，原子力显微镜和摩擦力显微镜等摩擦实验符合这种模型。在这种模型下，Schwarz 等<sup>[2]</sup>认为式 (2) 中  $\tau$  是常数，根据 Hertz 理论，实际接触面积  $A$  可表示为<sup>[7]</sup>

$$A = \pi \left( \frac{RL}{K} \right)^{2/3}, \quad (6)$$

其中 尖端半径  $R$  为几或几十纳米量级， $K$  为有效弹性模量

$$K = \frac{4}{3} \left( \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right)^{-1}, \quad (7)$$

其中  $\nu_i$  是泊松比， $E_i$  是杨氏模量， $i = 1$  和  $i = 2$  相当于球状尖端和平整表面。由式 (4)，结合式 (2) 和式 (3) 以及  $\tau$  是常数，可得

$$\tilde{\mu} = \frac{dF}{dL} = \frac{2}{3} \frac{\tau}{P} \equiv \frac{2}{3} \bar{\mu}. \quad (8)$$

由式 (8)，可得

$$F = \frac{2}{3} \tau \int \frac{dL}{P(L)} = \pi \tau \left( \frac{R}{K} \right)^{2/3} L^{2/3}, \quad (9)$$

式 (9) 正是 Schwarz 等<sup>[2]</sup>一文中的式 (9)，其正确性由其实验结果证实。他们还指出  $F$  与  $L$  的关系一般可写成  $F \sim L^{n/m}$ ，据此可求得

$$\tilde{\mu} = \frac{n}{m} \frac{\tau}{P} = \frac{n}{m} \bar{\mu}. \quad (10)$$

其中  $n/m \approx 0.4 \sim 1.2$ ，文献中已发现  $n/m \approx 2/3, 1/2, 1$ <sup>[8~10]</sup>。无论式 (8) 或式 (10) 都说明  $\tilde{\mu} < \bar{\mu}$ ，且两者都与  $P$  成反比（ $\tau$  是常数）。

### 2.3 两个接触物体间有吸附层（“第三物体”）模型

He 等<sup>[2]</sup>在理论模拟中认为，两个平整接触物体间没有吸附层时，摩擦力非常低，但在两个接触物体间有吸附层（“第三物体”）时，几乎所有物体间  $\bar{\mu} \approx 0.1 \sim 0.5$ 。假设式 (3) 的  $\tau$  随式 (2) 的  $P$  呈线性增加，他们导得一个非常简单和普遍的静摩擦系数关系式，分别如下所示

$$\tau = \tau_0 + \alpha P, \quad (11)$$

$$\bar{\mu} = \frac{\tau}{P} = \frac{\tau_0}{P} + \alpha, \quad (12)$$

式中， $\alpha$  是常数。应用式 (4)，当载荷很小时，假设  $\frac{dA}{A} = 0$ （理由见 3 节讨论），结合式 (11)，导得

$$\tilde{\mu} = \frac{dF}{dL} = \frac{d\tau}{dP} = \alpha, \quad (13)$$

$$\bar{\mu} = \frac{\tau}{P} = \frac{\tau_0}{P} + \tilde{\mu}. \quad (14)$$

由此可见，式 (14) 正是 He 等静摩擦系数关系式 (12)，只是  $\tilde{\mu}$  代替了  $\alpha$ 。式 (14) 中  $\tilde{\mu}$  为常数，而  $\bar{\mu}$  与  $P^{-1}$  成直线关系，其斜率  $\tau_0$  为常数，与界面粘着力有关，并说明  $\bar{\mu}$  为常数的条件应是  $\tau_0 \ll P$ ，此时  $\bar{\mu} = \tilde{\mu} = \alpha$  与  $L$  无关。通常  $\tau_0$  为正值，所以  $\bar{\mu}$  比  $\tilde{\mu}$  略大。

### 2.4 接触压力 $P$ 为常数模型

由  $\tilde{\mu}$  的定义和  $P$  为常数的假设，可得

$$\tilde{\mu} = \frac{dF}{dL} = \frac{\tau}{P} \left( 1 + \frac{d \ln \tau}{d \ln A} \right) = \bar{\mu} \frac{d \ln F}{d \ln A}. \quad (15)$$

一旦有了  $F$  或  $\tau$  和  $A$  表式，即可解出  $\tilde{\mu}$  和  $\bar{\mu}$  关系。

## 3 讨论

本文对几种可以简化的模型即式 (2) 和式 (3) 中  $P$  或  $\tau$  为常数（ $F$  或  $L$  不可为常数，对  $A$  在个别情况下可为常数将在以下讨论）时的静摩擦系数与载荷或正向压力的关系都讨论到了。实验不能给出  $\tilde{\mu}$ ，而仅能给出  $\bar{\mu}$ 。在 Amontons 模型下， $\tilde{\mu}$

和  $\bar{\mu}$  总是常数；尖端与平整样品接触（单凸点）模型仅适用于载荷为微牛和纳牛量级（因为接触面积很小，正向压力不一定小）， $\bar{\mu}$  和  $\mu$  不是常数，而是与  $P^{-1}$  成正比；两个接触物体间有吸附层（“第三物体”）模型下， $\bar{\mu}$  是常数，但  $\mu$  不是常数，而是与  $P^{-1}$  成正比，只有当正向压力非常高时， $\bar{\mu} = \mu = \text{常数}$ 。在接触压力  $P$  为常数模型下， $\bar{\mu}$  和  $\mu$  与  $\tau$  或  $F$  以及  $A$  有关。

根据实际载荷大小，表观静摩擦系数  $\bar{\mu}$  可以是宏观静摩擦系数  $\bar{\mu}_h$ ，也可以是微牛纳牛静摩擦系数  $\bar{\mu}_\mu$ 。对同一材料，静摩擦系数  $\bar{\mu}_h$  和  $\bar{\mu}_\mu$  究竟那一种大，还是两者相等，文献中有不同意见<sup>[11]</sup>。对此要考虑实际情况。样品表面状态、气氛、湿度和环境等对微牛纳牛静摩擦系数的影响远较宏观静摩擦系数为大。Niederberger 等<sup>[12]</sup>的结果表明，即使同一材料，测定  $\bar{\mu}_h$  和  $\bar{\mu}_\mu$  的仪器不同，静摩擦系数相差很大。下面讨论正向压力的影响。

Beerschwinger 等<sup>[4]</sup>在测定微轴承的静摩擦系数中提到，即使清洗得非常干净，实验样品的表面仍经常有小颗粒和沾污物。由此我们认为，在他们样品间的确有“第三体”。由式 (14)， $\bar{\mu}$  与  $P^{-1}$  成正比。经将 Beerschwinger 等的实验数据作  $\bar{\mu}$  与  $P^{-1}$  关系图 (lg - lg 坐标)，示于图 1，的确表示  $\bar{\mu}$  与  $P^{-1}$  有良好关系。

Bhushan 等<sup>[5]</sup>的实验结果指出，对 Si (111) 面，微观摩擦系数远小于宏观摩擦系数。对此我们说明如下：他们微观和宏观摩擦实验时的正向压力分别为 2.5~6.1 GPa 和 0.3 GPa。据此，微观摩擦系数与宏观摩擦系数的巨大差别，一部分来自正向压力，前者正向压力大，摩擦系数小，后者正向压力小，摩擦系数大。

Chen 等<sup>[13]</sup>在相同表观面积下测定了  $\bar{\mu}-P$  关系，当  $P$  小于 50 MPa 时， $\bar{\mu}$  随  $P$  增加而减少，当  $P$  大于 50 MPa 时， $\bar{\mu}$  不随  $P$  变化。对此也可以用式 (14) 解释，在低正向压力下， $\bar{\mu}$  正比于  $P^{-1}$ ，在非常高正向压力时， $\bar{\mu}$  是常数，与  $P$  无关。

王效东等<sup>[14]</sup>在非常高正向压力下测定了 DLC 的  $\bar{\mu}$ ，得到宏观摩擦系数为 0.17，结果远小于图 1 数据。对此也可用压力效应进行解释。

现在回到两个接触物体间有吸附层（“第三物体”）模型的讨论。式 (11) 的关系，曾发表在 Carpick 等<sup>[15]</sup>论文中。至于我们导出式 (13) 时曾假设载荷变化并不引起  $A$  变化率的改变，其可能

的原因：设载荷与第三物体的接触面积为  $A_{13}$ ，第三物体与衬底的接触面积为  $A_{23}$ ，当载荷变化时，仅使  $A_{13}$  变化，而  $A_{23}$  则保持不变，后者正是左右摩擦实验测到的摩擦系数。但这一分析有待以后实验证实。

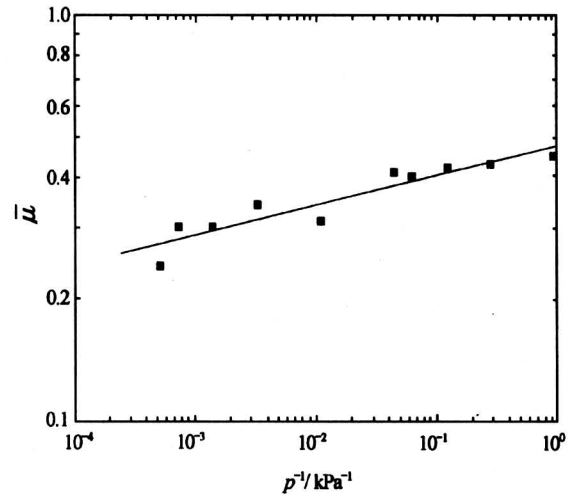


图 1 多晶 Si 在类金刚石碳 (DLC) 上拖动时表观静摩擦系数  $\bar{\mu}$  与载荷正向压力  $P^{-1}$  关系 (根据 Beerschwinger 等<sup>[4]</sup>数据计算)

Fig. 1 Relation between apparent coefficient of static friction and normal pressure of load for poly-Si sliding on DLC, calculated from Beerschwinger et al<sup>[4]</sup>

#### 参考文献

- [1] Dowson D. History of tribology [M]. Longman, London, 1979
- [2] Schwarz U D, Zworner O, Koster P, et al. Quantitative analysis of the frictional properties of solid materials at low loads [J]. Physical Review 1997, B 56, :6987~6997
- [3] He G, Muser M H, Robbins M O. Adsorbed layers and the origin of static friction [J]. Science, 1999, 284: 1650~1652
- [4] Beerschwinger U, Reuben R L, Yang S J. Frictional study of micromotor bearings [J]. Sensors and Actuators, 1997, A 63: 229~241
- [5] Bhushan B, Israelachvili J N, Landman U. Nanotribology, wear and lubrication at the atomic scale [J]. Nature, 1995, 374: 607~616
- [6] Johnson K L. Contact mechanics [M]. Cambridge U-

- niversity Press, Cambridge, 1985
- [7] Hertz H, Reine J. In: Dedkov G V. Nanotribology: experimental facts and theoretical models [J]. Physics-Uspekhi, 2000, 43(6): 541~572
- [8] Hu J, Xiao X D, Ogletnee D F, et al. Atomic scale friction and wear of mica [J]. Surf Sci, 1995, 327: 358~370
- [9] Mate C M. In: Bhushan B. Handbook of micro/nanotribology [M]. CRC Press, Boca Raton, FL, 1995
- [10] Sasada T, Nakabayashi H. Does Hertzian contact area act as an effective zone generating the friction resistance? [J]. IEICE Trans. Electro 1998, E81-C: 326~329
- [11] 王渭源. 影响微电子机械系统成品率和可靠性的粘合力 and 摩擦力 [J]. 中国工程科学, 2000, 2(3): 36~41
- [12] Niederberger S, Gracias D H, Komvopoulos K, et al. Transitions from nanoscale to microscale dynamic friction mechanisms on polyethylene and silicon surface [J]. Journal of Applied Physics 2000, 87: 3143~3150
- [13] Chen Q, Carman G. Microscale tribology (friction) measurement and influence of crystal orientation and fabrication process [A]. Proc of Microscale Systems: Mechanics and Measurements Symposium [C], 2000, 25~29
- [14] Wang X D, Chen Z Y, Liu X H, et al. Friction coefficient and wearing properties of amorphous diamond films deposited on Si, Ni and Cu substrates [A]. Intern Conf Nanotechnologies for the future [C], Houston, TX, USA, 2000
- [15] Carpick R E, Salmeron M. Scratching the surface: fundamental investigations of tribology with atomic force microscopy [J]. Chemical Review 1997, 97: 1163~1194

## Expressions for Differential and Apparent Coefficients of Static Friction

Wang Weiyuan

(*State Key Laboratory of Transducer Technology, Shanghai Institute of Metallurgy, Chinese Academy of Sciences, Shanghai 200050, China*)

[**Abstract**] Recently, scientists and engineers are interested in coefficients of static friction on micro and nano scale. On macro scale, the friction force is proportional to load, the apparent coefficients of static friction are always constant and not related with the load and the contact area between the load and the substrate, which have been described as Amontons' laws. However, a lot of experiments carried out with scanning microscope, atomic force microscope and friction force microscope on micro or nano scale showed that Amontons' laws can not be used successfully. On micro or nano scale, there is no general expression published in literatures to describe the relationship between the coefficients of static friction and the load. Also the published data do not compare with and discuss each other. In this paper, from the definition of differential coefficients of static friction, the expressions for differential and apparent coefficients of static friction,  $\tilde{\mu}$  and  $\bar{\mu}$  for several models are deduced. Only  $\bar{\mu}$  can be measured in experiments, which can be the coefficients on micro or macro scale depending on the load on the substrate, but  $\tilde{\mu}$  can not be measured because the differential variables are too small to measure. In Amontons' model,  $\tilde{\mu}$  equals to  $\bar{\mu}$  and both are constant. In single asperity model with load on micro or nano scale,  $\tilde{\mu}$  and  $\bar{\mu}$  are not constant but proportional to  $P^{-1}$ . In the model based on absorption layers as third bodies between two contact bodies,  $\tilde{\mu}$  is a constant,  $\bar{\mu}$  is not a constant but proportional to  $P^{-1}$ .  $\bar{\mu}$  is a constant only in high normal pressure. In the model based on constant  $P$ ,  $\tilde{\mu}$  and  $\bar{\mu}$  are related with  $F$  and  $A$ . Finally, the experimental data published in literatures have been discussed based on the novel deduced expressions.

[**Key words**] differential coefficients of static friction; coefficients of static friction on micro or nano scale; apparent coefficients of static friction; coefficients of static friction on macro scale