

# 弧齿锥齿轮主曲率计算的么正活动标架法

王裕清, 梁 剑

(焦作工学院, 河南 焦作 454000)

**[摘要]** 曲面上点的主曲率计算是确定轮齿啮合压痕平面投影形状的关键。文章摒弃通常运用啮合原理和坐标变换计算的思路, 从曲面本身的性质出发, 把么正活动标架和外微分引入主曲率计算, 得到简明、有效的主曲率计算的新算法, 并结合压痕公式给出了一个应用实例。该算法可以推广到任意曲面的主曲率计算。

**[关键词]** 弧齿锥齿轮; 主曲率; 么正活动标架

## 1 序言

对于弧齿锥齿轮, 接触区良莠是衡量其传动质量好坏的一个重要标志。依据赫兹理论, 载荷作用下轮齿(视作弹性体)接触区域在接触点齿面的切平面内投影为椭圆, 而椭圆的长短轴以及方向与接触点处主曲率有关。因此, 方便、简洁地确定齿面上点的主曲率是解决接触区问题的基本问题之一。通常计算主曲率的方法是利用啮合原理的相关知识通过一系列的坐标变换获得的<sup>[1;2]</sup>, 计算复杂且工作量大, 这种方法没有深刻挖掘曲面的自身性质。笔者在充分考虑曲面自身性质的基础上, 引入数学中的么正活动标架和外微分, 得到曲面主曲率的新算法。

## 2 么正活动标架法计算主曲率

### 2.1 么正活动标架法<sup>[3]</sup>

对于曲面  $S \subset R^3$ , 在  $S$  上选取右手么正标架场  $\{P; e_1, e_2, e_3\}$ 。  $e_1, e_2, e_3$  是向量, 满足:

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

对任意  $x \in S \subset R^3$ ,  $\{P(x); e_1(x), e_2(x), e_3(x)\}$  是  $R^3$  中的一个右手么正标架, 其满足下列条件:

$$P(x) = x, e_3(x) = n(x)。$$

### 2.2 外微分式

在上述活动标架法对标架场进行微商时, 要在曲面上选定参数, 可以想象此时微商是很麻烦的。因为, 此时曲面上既有标架又有参数, 而且两者之间没有什么关系。联系到微分几何运算可以脱离参数的选取, 因此自然引入用微分运算代替对标架场的微商运算。这里的所谓微分运算是指分析学中对函数左微分, 也即外微分算子。

引入两个符号“ $\wedge$ ”和“ $d$ ”, 分别称作外积和外微分算子。记  $\wedge^k(s)$  为  $k$  阶外微分式。

### 2.3 主曲率的计算

依照外微分的相关性质, 仿照 Frenet 计算结果的形式有:

$$dp = \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2,$$

$$d \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix},$$

其中  $\omega_j, \omega_{ij}$  为外微分式。

在曲面一定的情况下, 其第一、第二基本形式一定。本节的算法就是从弧齿锥齿轮齿面的第一基本形式入手计算出总曲率, 求出主曲率。总曲率为曲面上某点两个主曲率的乘积。

[收稿日期] 2001-07-09; 修回日期 2001-09-10

[基金项目] 河南省自然科学基金资助项目 (984060400)

[作者简介] 王裕清 (1952-), 男, 湖北松滋县人, 焦作工学院教授

总曲率的算法表现为：

1) 用配方法将第一基本形式 I 写成

$$I = \omega_1^2 + \omega_2^2,$$

其中  $\omega_1, \omega_2$  为外微分式；

2) 由方程组  $\begin{cases} d\bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_{12} \wedge \bar{\omega}_2 \\ d\bar{\omega}_2 = -\bar{\omega}_{12} \wedge \bar{\omega}_1 \end{cases}$  解出  $\bar{\omega}_{12}$ ；

3) 由方程  $d\bar{\omega}_{12} = -K\bar{\omega}_1 \wedge \bar{\omega}_2$  定出总曲率  $K$ 。

任何曲面的第一、第二基本形式可以表示为：

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

$$II = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2.$$

式中： $E, F, G$  为第一类基本量； $L, M, N$  为第二类基本量。

按照上述的算法过程，设：

$$\begin{cases} \bar{\omega}_1 = \sqrt{E}(du + \frac{F}{E}dv), \\ \bar{\omega}_2 = \sqrt{\frac{EG - F^2}{E}}dv. \end{cases}$$

对上式微分，并写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} d\bar{\omega}_1 \\ d\bar{\omega}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{F}{E}\right)_u du \wedge dv - (\sqrt{E})_v du \wedge dv \\ \left(\sqrt{\frac{EG - F^2}{E}}\right)_u du \wedge dv \end{bmatrix}.$$

略去具体的数学计算，直接给出  $\bar{\omega}_{12}$ ：

$$\bar{\omega}_{12} = a = \left[ \frac{\left(\frac{F}{E}\right)_u - (\sqrt{E})_v}{\sqrt{\frac{EG - F^2}{E}}} du + \left[ \frac{\frac{F}{E}\left(\frac{F}{E}\right)_u - \frac{F}{E}(\sqrt{E})_v}{\sqrt{\frac{EG - F^2}{E}}} + \frac{\left(\sqrt{\frac{EG - F^2}{E}}\right)_u}{\sqrt{E}} \right] dv \right].$$

对  $\bar{\omega}_{12}$  进行微分，并由方程  $d\bar{\omega}_{12} = -K\bar{\omega}_1 \wedge \bar{\omega}_2$  有

$$K = -\frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left\{ \left[ \frac{\left(\frac{F}{E}\right)_u - (\sqrt{E})_v}{\sqrt{\frac{EG - F^2}{E}}} \right]_v - \left[ \frac{\frac{F}{E}\left(\frac{F}{E}\right)_u - \frac{F}{E}(\sqrt{E})_v}{\sqrt{\frac{EG - F^2}{E}}} + \frac{\left(\sqrt{\frac{EG - F^2}{E}}\right)_u}{\sqrt{E}} \right]_u \right\}.$$

特别是当  $u, v$  两参数正交时，上式可简化为

$$K = -\frac{1}{\sqrt{EG}} \left\{ \left[ \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}} \right]_v + \left[ \frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}} \right]_u \right\}.$$

这样，由第一基本形式，总曲率就确定了。按

照同样的思路，平均曲率可以表示为

$$H = \frac{EN + GL - 2FM}{EG - F^2}.$$

联立总曲率和平均曲率就可以得到两个主曲率。

### 3 应用实例

以 CA-10B 汽车后桥主、被动弧齿锥齿轮为例。其数据为：模数 9，小轮齿数 11，大轮齿数 25，轴交角  $90^\circ$ ，螺旋角  $35^\circ$ ，压力角  $20^\circ$ 。将由上述算法得到的主曲率代入文献 [4] 中推导的椭圆长短轴  $a, b$  的计算公式：

$$a = \sqrt{1 - e^2} \left[ \frac{3E(e)}{2(1 - e^2)} \cdot \frac{k_1 + k_2}{A + B} \cdot p \right]^{\frac{1}{3}},$$

$$b = \left[ \frac{3E(e)}{2(1 - e^2)} \cdot \frac{k_1 + k_2}{A + B} \cdot p \right]^{\frac{1}{3}}.$$

式中  $k_1, k_2$  为计算点的主曲率<sup>[4]</sup>，二者的乘积为总曲率，即  $K = k_1 k_2$ 。

经编制的程序仿真得到的接触线和接触区，见图 1 和图 2。试切对滚检验后的接触区形状与动态仿真得到的接触区图形基本一致。

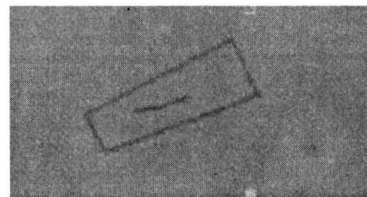


图 1 接触线

Fig.1 Contacted line

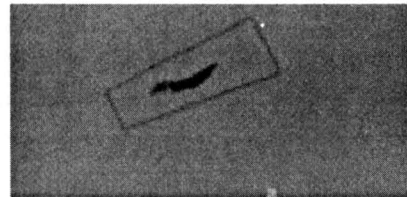


图 2 接触区

Fig.2 Contacted area

### 4 结论

1) 首次提出的弧齿锥齿轮曲面主曲率么正活动标架算法具有理论意义和工程应用价值，并可以推广到任意曲面的主曲率计算。

2) 新算法在计算总曲率时不依赖第二基本形式和法向量场  $n$ , 是一种内在算法, 充分利用了曲面本身的性质。

3) 在实际编程实现过程中, 新算法没有过多的空间变换, 程序代码易实现、易维护。

#### 参考文献

[1] Litvin F L. Determination of principal curvatures and

contact ellipse for profile crowned helical gears [J]. Journal of Mechanical Design, 1999, 121: 107~111

[2] 李特文 Φ JI. 齿轮啮合原理[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1984

[3] 虞言林, 郝凤歧. 微分几何讲义[M]. 北京: 高等教育出版社, 1991

[4] 梁 剑. 弧齿锥齿轮接触区理论研究及模拟[D]. 河南焦作: 焦作工学院, 2001

## The Application of Moving Frame in the Calculation of Spiral Bevel Gear's Principal Curvature

Wang Yuqing, Liang Jian

(Jiaozuo Institute of Technology, Jiaozuo, Henan 454000, Chian)

[Abstract] the calculation of contacted points' principal curvature is the key to determine contacted area. Traditionally, the method of determining principal curvature is to make use of the theory of mesh and coordinate transform. However, this method is complex. In this paper, based on the feature of curve surface, moving frame and co-differential are employed to give a sententious, effective algorithm of principal curvature. Then, according to the formulation of contacted area, an application example is given. This algorithm can be used for calculation of principal curvature in all kinds of curve surfaces.

[Key words] spiral bevel gear; principal curvature; moving frame

## 锂离子电池材料研究和产业化

锂离子电池是最新的二次电池, 近 10 年来得到迅速发展, 到 2000 年, 全球锂离子电池的销售额已超过镉镍和氢镍电池。锂离子电池正向型号多样化、高性能、低成本和更安全的方向发展, 不仅进一步挤占镉镍和氢镍电池的市场, 而且有可能向铅酸电池挑战。随着对现有材料的改性和新材料的研究开发以及电池设计的改进, 锂离子电池的应用范围不断拓宽, 从信息产业到能源交通, 从太空到水下, 锂离子电池在本世纪作为主要的二次电池, 将进入人类社会各个领域, 为人类造福。

我国已形成年产几千万只锂离子电池的产业化群体, 锂离子电池生产不断向我国转移, 我国已成为小功率锂离子电池的主要生产地。与此相适应, 锂离子电池相关材料的研究和开发也已取得很大的进展, 已经或即将实现产业化。

锂离子电池仍在快速发展, 以 18650 型电池为例, 1990 年容量为 900 mAh, 目前已达到 2 000 mAh。锂离子电池的主要发展方向是: 提高小功率电池的性能, 降低成本; 研究和开发电动车和储能用大容量动力电池; 开发聚合物电池; 研究工作电压为 2.0V 的锂离子电池。

材料研究是基础, 这些方向的成败都与新材料的研究和开发密切相关。

(中国科学院物理研究所 陈立泉)