

用改进的 Boussinesq 方程模拟潜堤上的波浪变形

郑永红¹, 沈永明², 吴修广², 游亚戈¹

(1. 中国科学院广州能源研究所, 广州 510640;

2. 大连理工大学海岸及近海工程国家重点实验室, 辽宁大连 116023)

[摘要] 研究了一种改进的 Boussinesq 方程, 采用预报校正格式对方程进行了数值离散, 并对淹没潜堤上的波浪变形进行了数值模拟, 从数值模拟结果和实测值的比较结果来看, 该方程能较好地模拟波浪在潜堤上传播时波面的变形过程, 可以用于实际中的波浪问题计算。这种改进的 Boussinesq 方程本身及其求解方法需做进一步的完善。研究结果为实际应用 Boussinesq 方程来研究复杂地形上的波浪传播提供一定的理论指导。

[关键词] 改进的 Boussinesq 方程; 数值模拟; 波浪变形; 潜堤

[中图分类号] O353.2 **[文献标识码]** A **[文章编号]** 1009-1742(2004)04-0034-07

1 前言

由于近岸区的波浪运动总是表现出较强的非线性, 此时波浪的非线性作用不能忽略, 因此将介绍一种能有效考虑波浪非线性作用的数学模型, 即 Boussinesq 类方程, 是一种能够描述规则波和不规则波在复杂地形上发生浅化、折射、绕射和反射效应的相当有效的数学模型, 可分为经典(标准) Boussinesq 方程、低阶 Boussinesq 方程和高阶 Boussinesq 方程等。各种 Boussinesq 方程均在一定程度上考虑了波浪的非线性效应和频散效应, 因此能够反映不同频率分量间的能量输运、波形变化、波群演化等。

Boussinesq 于 1871 年提出了著名的 Boussinesq 理论, 理论中考虑了自由面曲率对浅水长波流动的影响。经过 100 多年的发展, 该理论取得了长足发展, 已被推广用于深水短波的作用研究, 并且已成为模拟近岸区波浪运动的强有力的工具。第一个能考虑变水深地形并得到较好应用的 Boussinesq 方程当首推 1967 年 Peregrine^[1]提出的 Boussinesq 方程, 后人称其为经典或标准 Boussinesq 方程。在随后的

20 多年的时间, 许多学者^[2~6]应用该方程或其改进形式研究了浅水中的长波、短波以及波流的作用等, 讨论了其适用范围并提出了一些求解该类方程的有效数值格式。由于标准 Boussinesq 方程所反映的频散关系随水深的增大而误差不断增加, 因此只适用于相对浅水中的波浪问题。为了克服这一限制, 1991 年 Madsen 等^[7]提出了改进线性频散特征的新型 Boussinesq 方程, 将 Boussinesq 方程的适用范围推广到可以用于中等水深中的波浪问题, 1992 年 Madsen 等^[8]又在该方程中考虑了缓变地形的影响, 1995 年 Schäffer 和 Madsen^[9]又对该方程做了进一步的改进; Nwogu^[10]于 1993 年给出了另一种形式的 Boussinesq 方程, 该方程和 Madsen 提出的方程是弱非线性和弱频散性 Boussinesq 类方程的代表性方程, 并且被一些学者^[11~15]用来研究比较复杂地形上的波浪变形, 取得了比较满意的结果。最近, Boussinesq 类方程又有了新的进展, Wei^[16]等导出了二阶完全非线性 Boussinesq 方程, 而 Chen 等^[17]导出了四阶含流 Boussinesq 方程, 并采用该方程研究了流对波的影响; Gobbi 和 Kirby^[18]则导出了四阶完全非线性的高阶 Boussinesq 方程, 并采

[收稿日期] 2003-06-02; **修回日期** 2003-07-15

[基金项目] 国家自然科学基金重点资助项目(10332050); 国家自然科学基金资助项目(50379001); 国家杰出青年科学基金资助项目(50125924); 广东省自然科学基金资助项目(20021503)

[作者简介] 郑永红(1970-), 男, 安徽潜山县人, 博士, 中国科学院广州能源研究所研究员

用一种高精度的预报校正格式数值模拟了淹没浅堤上的波浪变形, 取得了相当满意的结果。从理论上说, 高阶 Boussinesq 方程更精确、更能反映实际情况, 但在实际应用时, 由于方程十分复杂, 加上高阶导数的出现, 使得程序实现起来相对困难, 至今为止, 高阶 Boussinesq 方程在复杂地形上的应用还仅限于一维问题。基于以上原因, 笔者采用一种改进的 Boussinesq 方程来研究波浪变形问题, 该方程由 Beji 和 Nadaoka^[19]于 1996 年首次导出, 当水深为常数时, 该方程和 Madsen^[8]导出的 Boussinesq 方程完全一致, 而对变水深地形, 该方程是 Madsen^[8]提出的 Boussinesq 方程的正式推导和对其中不正确之处的修正。为了说明 Beji 和 Nadaoka^[19]提出的 Boussinesq 方程的准确程度, 笔者对比较复杂地形上的波浪变形进行了数值模拟, 结果表明该方程得到的波要素是可信的, 可以用于实际当中的波浪问题计算。

2 Boussinesq 方程的正式推导

1992 年, Madsen^[8]等提出了缓坡地形上的一种 Boussinesq 方程, 通过理论分析和应用实践表明, 该方程比经典 Boussinesq 方程^[1]适用的水深范围更广, 但该方程没有严格的数学推导, 于是, Beji 和 Nadaoka^[19]从经典 Boussinesq 方程出发, 通过简单的数学代换, 正式推导了 Madsen 等提出的 Boussinesq 方程, 并指出了 Madsen 提出的 Boussinesq 方程中的不正确之处。下面给出 Beji 和 Nadaoka 导出的 Boussinesq 方程。

Peregrine^[1]导出的渐变水深标准 Boussinesq 方程为

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + g \nabla \eta = \frac{h}{2} \nabla [\nabla \cdot (h \mathbf{u}_t)] - \frac{h^2}{6} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_t) \quad (1)$$

$$\eta_t + \nabla \cdot [(h + \eta) \mathbf{u}] = 0 \quad (2)$$

式中, $\mathbf{u} = (u, v)$ 为深度平均的二维速度矢量; η 为自由面位移; $h = h(x, y)$ 为静水深; g 为重力加速度; 下标 t 表示关于时间的导数; ∇ 为二维水平梯度算子, $\nabla \cdot$ 为二维水平散度算子。

通过简单的加减处理, 并将二阶非线性频散项采用一阶长波关系式

$$\mathbf{u}_t + g \nabla \eta = 0, \eta_t + \nabla \cdot (h \mathbf{u}) = 0 \quad (3)$$

进行替换。式(1)可变为^[19]:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + g \nabla \eta = (1 + \beta) \frac{h}{2} \nabla [\nabla \cdot (h \mathbf{u}_t)] + \beta \frac{gh}{2} \nabla [\nabla \cdot (h \nabla \eta)] - \\ (1 + \beta) \frac{h^2}{6} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_t) - \beta \frac{gh^2}{6} \nabla (\nabla^2 \eta) \end{aligned} \quad (4)$$

式中, β 为一常数, 取 $\beta = 1/5$ ^[19]; ∇^2 为二维拉普拉斯算子。将上式写成分量形式, 可得到 x 和 y 方向的动量方程分别为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{(1 + \beta) h^2}{3} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}_t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{v}_t}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\beta gh^2}{3} \left(\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \eta}{\partial x \partial y^2} \right) + \\ \frac{(1 + \beta) h}{2} (2h_x \mathbf{u}_{xt} + h_{xx} \mathbf{u}_t + h_{xy} \mathbf{v}_t + h_y \mathbf{v}_{xt} + h_x \mathbf{v}_{yt}) + \frac{\beta gh}{2} (2h_x \eta_{xx} + h_{xx} \eta_x + h_{xy} \eta_y + h_y \eta_{xy} + h_x \eta_{yy}) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{u} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + g \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{(1 + \beta) h^2}{3} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{v}_t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_t}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\beta gh^2}{3} \left(\frac{\partial^3 \eta}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^2 \partial y} \right) + \\ \frac{(1 + \beta) h}{2} (2h_y \mathbf{v}_{yt} + h_{yy} \mathbf{v}_t + h_{xy} \mathbf{u}_t + h_x \mathbf{u}_{yt} + h_y \mathbf{u}_{xt}) + \frac{\beta gh}{2} (2h_y \eta_{yy} + h_{yy} \eta_y + h_{xy} \eta_x + h_x \eta_{xy} + h_y \eta_{xx}) \end{aligned} \quad (6)$$

上述式中, 下标 x 和 y 分别表示关于 x 和 y 方向的偏导数。

连续性方程式(2)写成分量形式为:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial (h + \eta) \mathbf{u}}{\partial x} + \frac{\partial (h + \eta) \mathbf{v}}{\partial y} = 0 \quad (7)$$

式(7)至式(9)构成了二维 Boussinesq 方程。对一维问题, Boussinesq 方程简化为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{(1 + \beta) h^2}{3} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_t}{\partial x^2} + \frac{\beta gh^2}{3} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} + \frac{(1 + \beta) h}{2} (2h_x \mathbf{u}_{xt} + h_{xx} \mathbf{u}_t) + \frac{\beta gh}{2} (2h_x \eta_{xx} + h_{xx} \eta_x) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial (h + \eta) \mathbf{u}}{\partial x} = 0 \quad (9)$$

3 Boussinesq 方程的离散格式

Boussinesq 方程可采用多种格式进行离散, 离散格式可分为两大类, 一类是单一网格上的离散格式, 另一种是交错网格上的离散格式。每类格式中

又包括多种格式,如高阶和低阶的预报校正格式、ADI格式等。高阶格式的优点是精度高,但程序设计复杂,计算效率低,另外还可能产生较大的数值振荡,导致数值计算不稳定,因此高阶格式在整体上并不优越,尤其对多维问题;在交错网格上对方程进行离散,可以避免诸如采用中心差分格式时引起的振荡等不利因素,但是交错网格也存在一些缺陷,如边界条件很难对各物理量前后一致地给出,另外采用交错网格得到的各物理量的最终结果由于不是在相同的网格点上得到的,因此要得到某个网格点上的所有待求物理量,还需要进行一定的插值处理;ADI格式是一种在流体力学问题中得到广泛应用的格式,由于对大多数流体力学问题,采用这种格式对方程进行离散,可以得到系数矩阵为三对角的代数方程组,从而可以采用追赶法进行快速求

$$\begin{aligned}\delta_x F_{i,j} &= \frac{F_{i+1,j} - F_{i-1,j}}{2\Delta x}, & \delta_y F_{i,j} &= \frac{F_{i,j+1} - F_{i,j-1}}{2\Delta y}; \\ \delta_{xx} F_{i,j} &= \frac{F_{i+1,j} - 2F_{i,j} + F_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}, & \delta_{yy} F_{i,j} &= \frac{F_{i,j+1} - 2F_{i,j} + F_{i,j-1}}{(\Delta y)^2}; \\ \delta_{xy} F_{i,j} &= \frac{F_{i+1,j+1} - F_{i+1,j-1} - F_{i-1,j+1} + F_{i-1,j-1}}{4\Delta x \Delta y}; \\ \delta_{xxx} F_{i,j} &= \frac{F_{i+2,j} - 2F_{i+1,j} + 2F_{i-1,j} - F_{i-2,j}}{2(\Delta x)^3}; \\ \delta_{yyy} F_{i,j} &= \frac{F_{i,j+2} - 2F_{i,j+1} + 2F_{i,j-1} - F_{i,j-2}}{2(\Delta y)^3}; \\ \delta_{xxy} F_{i,j} &= \frac{F_{i+1,j+1} - 2F_{i,j+1} + F_{i-1,j+1} - F_{i+1,j-1} + 2F_{i,j-1} - F_{i-1,j-1}}{2(\Delta x)^2 \Delta y}; \\ \delta_{xyy} F_{i,j} &= \frac{F_{i+1,j+1} - 2F_{i+1,j} + F_{i+1,j-1} - F_{i-1,j+1} + 2F_{i-1,j} - F_{i-1,j-1}}{2\Delta x (\Delta y)^2}.\end{aligned}$$

上述式中, δF 表示函数 F 的差分。除了上面定义的符号之外,对动量方程中的 $\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3}$ 和 $\frac{\partial^3 \eta}{\partial y^3}$ 在边界点附近的离散进行如下处理:

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \right|_{(2,j)} &= \frac{\eta_{4,j} - 3\eta_{3,j} + 3\eta_{2,j} - \eta_{1,j}}{\Delta x^3}, \\ \left. \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \right|_{(N_1-1,j)} &= \\ &= \frac{\eta_{N_1,j} - 3\eta_{N_1-1,j} + 3\eta_{N_1-2,j} - \eta_{N_1-3,j}}{\Delta x^3}; \\ \left. \frac{\partial^3 \eta}{\partial y^3} \right|_{(i,2)} &= \frac{\eta_{i,4} - 3\eta_{i,3} + 3\eta_{i,2} - \eta_{i,1}}{\Delta y^3}, \\ \left. \frac{\partial^3 \eta}{\partial y^3} \right|_{(i,N_J-1)} &= \\ &= \frac{\eta_{i,N_J} - 3\eta_{i,N_J-1} + 3\eta_{i,N_J-2} - \eta_{i,N_J-3}}{\Delta y^3};\end{aligned}$$

解,因此一般说来采用ADI格式的计算效率比较高,并且格式一般为无条件稳定或者临界无条件稳定,ADI格式的不足是中间时刻第一类边界条件的给定问题,如果根据某个解析表达式直接给出中间时刻的第一类边界条件,则可能使计算的最终结果的精度较差,此外对于Boussinesq方程,采用ADI格式仍然需要迭代,因此其快速求解的优势并不能很好地体现出来。基于以上这些原因,采用非交错网格下的预报校正格式进行离散,然后采用有关的代数方程组的求解方法来得到问题的数值解。下面介绍Boussinesq方程的离散格式,可分为预报阶段的离散格式和校正阶段的离散格式。

在具体给出离散格式之前,为了书写方便,首先定义以下符号:

上式中的 $(2, j)$ 和 $(N_1 - 1, j)$ 分别表示 x 方向的第一排和最后一排的域内节点编号, N_1 为 x 方向的最大节点编号;而 $(i, 2)$ 和 $(i, N_J - 1)$ 分别表示 y 方向的第一排和最后一排的域内节点编号, N_J 为 y 方向的最大节点编号。此外对动量方程中的 $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial \eta}{\partial y}$ 的离散进行如下特殊处理:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \eta}{\partial x} &= \delta_x \eta = \frac{\eta_{i+1,j} - \eta_{i-1,j}}{2\Delta x} - \frac{\Delta x^2}{6} \delta_{xxx} \eta, \\ \frac{\partial \eta}{\partial y} &= \delta_y \eta = \frac{\eta_{i,j+1} - \eta_{i,j-1}}{2\Delta y} - \frac{\Delta y^2}{6} \delta_{yyy} \eta.\end{aligned}$$

数值计算表明这种处理对减小数值格式的频散误差是十分必要的。

3.1 预报格式

1) 连续性方程的预报格式

$$\frac{\eta_{i,j}^{n+1} - \eta_{i,j}^n}{\Delta t} + \delta_x[(h_{i,j} + \eta_{i,j}^n)u_{i,j}^n] + \delta_y[(h_{i,j} + \eta_{i,j}^n)v_{i,j}^n] = 0 \quad (10)$$

2) 动量方程的预报格式

x 方向的动量方程的预报格式为

$$\begin{aligned} & \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} + u_{i,j}^n \delta_x u_{i,j}^n + v_{i,j}^n \delta_y u_{i,j}^n + g \delta_x \eta_{i,j}^n = \\ & \frac{(1 + \beta)h_{i,j}^2}{3} \left(\frac{\delta_{xx} u_{i,j}^{n+1} - \delta_{xx} u_{i,j}^n}{\Delta t} + \frac{\delta_{xy} v_{i,j}^{n+1} - \delta_{xy} v_{i,j}^n}{\Delta t} \right) + \\ & \frac{\beta g h_{i,j}^2}{3} (\delta_{xxx} \eta_{i,j}^n + \delta_{xyy} \eta_{i,j}^n) + \frac{(1 + \beta)h_{i,j}}{2} \cdot \\ & \left(2\delta_x h_{i,j} \frac{\delta_x u_{i,j}^{n+1} - \delta_x u_{i,j}^n}{\Delta t} + \delta_{xx} h_{i,j} \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} + \right. \\ & \delta_{xy} h_{i,j} \frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n}{\Delta t} + \delta_y h_{i,j} \frac{\delta_x v_{i,j}^{n+1} - \delta_x v_{i,j}^n}{\Delta t} + \\ & \delta_x h_{i,j} \frac{\delta_y v_{i,j}^{n+1} - \delta_y v_{i,j}^n}{\Delta t} \left. \right) + \frac{\beta g h_{i,j}}{2} (2\delta_x h_{i,j} \delta_{xx} \eta_{i,j}^n + \\ & \delta_{xx} h_{i,j} \delta_x \eta_{i,j}^n + \delta_{xy} h_{i,j} \delta_y \eta_{i,j}^n + \\ & \delta_y h_{i,j} \delta_{xy} \eta_{i,j}^n + \delta_x h_{i,j} \delta_{yy} \eta_{i,j}^n) \quad (11) \end{aligned}$$

同理，可很容易地写出 y 方向的动量方程的预报格式。

3.2 校正格式

1) 连续性方程的校正格式

$$\begin{aligned} & \frac{\eta_{i,j}^{n+1} - \eta_{i,j}^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} \delta_x [(h_{i,j} + \eta_{i,j}^{n+1})u_{i,j}^{n+1} + \\ & (h_{i,j} + \eta_{i,j}^n)u_{i,j}^n] + \frac{1}{2} \delta_y [(h_{i,j} + \eta_{i,j}^{n+1})v_{i,j}^{n+1} + \\ & (h_{i,j} + \eta_{i,j}^n)v_{i,j}^n] = 0 \quad (12) \end{aligned}$$

2) 动量方程的校正格式

$$\begin{aligned} & \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} [u_{i,j}^{n+1} \delta_x u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j}^n \delta_x u_{i,j}^n + \\ & v_{i,j}^{n+1} \delta_y u_{i,j}^{n+1} + v_{i,j}^n \delta_y u_{i,j}^n + g \delta_x (\eta_{i,j}^{n+1} + \eta_{i,j}^n)] = \\ & \frac{(1 + \beta)h_{i,j}^2}{3} \left(\frac{\delta_{xx} u_{i,j}^{n+1} - \delta_{xx} u_{i,j}^n}{\Delta t} + \frac{\delta_{xy} v_{i,j}^{n+1} - \delta_{xy} v_{i,j}^n}{\Delta t} \right) + \\ & \frac{\beta g h_{i,j}^2}{6} [(\delta_{xxx} + \delta_{xyy})(\eta_{i,j}^{n+1} + \eta_{i,j}^n)] + \frac{(1 + \beta)h_{i,j}}{2} \cdot \\ & \left(2\delta_x h_{i,j} \frac{\delta_x u_{i,j}^{n+1} - \delta_x u_{i,j}^n}{\Delta t} + \delta_{xx} h_{i,j} \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} + \right. \\ & \delta_{xy} h_{i,j} \frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n}{\Delta t} + \delta_y h_{i,j} \frac{\delta_x v_{i,j}^{n+1} - \delta_x v_{i,j}^n}{\Delta t} + \\ & \delta_x h_{i,j} \frac{\delta_y v_{i,j}^{n+1} - \delta_y v_{i,j}^n}{\Delta t} \left. \right) + \frac{\beta g h_{i,j}}{4} \cdot \\ & [2\delta_x h_{i,j} \delta_{xx} (\eta_{i,j}^{n+1} + \eta_{i,j}^n) + \delta_{xx} h_{i,j} \delta_x (\eta_{i,j}^{n+1} + \eta_{i,j}^n) + \\ & \delta_{xy} h_{i,j} \delta_y (\eta_{i,j}^{n+1} + \eta_{i,j}^n) + \delta_y h_{i,j} \delta_{xy} (\eta_{i,j}^{n+1} + \eta_{i,j}^n) + \\ & \delta_x h_{i,j} \delta_{yy} (\eta_{i,j}^{n+1} + \eta_{i,j}^n)] \quad (13) \end{aligned}$$

同理，可很容易地写出 y 方向的动量方程的校正格式。需要说明的是：在预报阶段， η 的求解是显式进行的，而 u 和 v 的离散方程可化为三对角矩阵形式采用追赶法求解；在校正阶段， η ， u 和 v 的求解需要进行联合迭代，直到相邻两次迭代的结果差值满足某一精度要求为止，采用的收敛准则为

$$\begin{aligned} & \max \left[\frac{\sum_{i,j} |\eta_{i,j}^{n+1}|_{k+1} - \eta_{i,j}^{n+1}|_k|}{\sum_{i,j} \eta_{i,j}^{n+1}|_{k+1}}, \right. \\ & \frac{\sum_{i,j} |u_{i,j}^{n+1}|_{k+1} - u_{i,j}^{n+1}|_k|}{\sum_{i,j} u_{i,j}^{n+1}|_{k+1}}, \\ & \left. \frac{\sum_{i,j} |v_{i,j}^{n+1}|_{k+1} - v_{i,j}^{n+1}|_k|}{\sum_{i,j} v_{i,j}^{n+1}|_{k+1}} \right] < \epsilon \quad (14) \end{aligned}$$

式中 $\sum_{i,j} F$ 表示对所有内点的 F 进行求和； k 表示第 k 次迭代； ϵ 为一小的正数，表示误差容许限。

4 初始条件和边界条件

4.1 初始条件

算例采用的初始条件为

$$u(x, y, 0) = v(x, y, 0) = \eta(x, y, 0) \quad (15)$$

4.2 边界条件

根据具体问题的不同，可分为各种不同的边界条件。对算例，边界条件有以下几种形式。

1) 上游造波边界条件 根据入射波的类型不同，可以给定不同的造波边界条件。对线性入射波，造波边界条件给定为：

$$\eta(0, y, t) = A_0 \cos(k \cos \alpha_0 x + k \sin \alpha_0 y - \omega t + 0.5\pi) \quad (16)$$

$$u(0, y, t) = \frac{\omega \eta(0, y, t) \cos \alpha_0}{k[\eta(0, y, t) + h(0, y)]} \quad (17)$$

$$v(0, y, t) = \frac{\omega \eta(0, y, t) \sin \alpha_0}{k[\eta(0, y, t) + h(0, y)]} \quad (18)$$

式中 A_0 为入射波振幅； α_0 为初始入射波向，算例中 $\alpha_0 = 0$ ； ω 为波浪圆频率； h 为水深； k 为波数，由该 Boussinesq 方程的线性色散关系^[19]

$$\omega^2 = gk \frac{kh(1 + \beta k^2 h^2/3)}{1 + (1 + \beta)k^2 h^2/3} \quad (19)$$

确定。

2) 下游开边界条件 下游开边界条件采用辐射边界条件，其具体形式如下：

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\cos \theta}{c} \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\sin \theta}{c} \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0 \quad (20)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\cos \theta}{c} \frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\sin \theta}{c} \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \quad (21)$$

3) 侧向开边界条件 侧向 (y 方向) 开边界条件严格说来也应采用相应的辐射边界条件, 但为了简化处理, 这里采用了下面的近似边界条件:

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (24)$$

5 算例及结果分析

Beji 和 Battjes^[20] 及 Luth 等分别对淹没浅堤地形上的波浪传播进行了物理模型试验, 其试验结果被一些学者用来验证他们的数值模型^[11,18,21]。笔者采用的资料取自文献 [18], 试验地形、水深及测点布置如图 1 所示, 入射波周期为 $T = 2.02$ s, 振幅为 $A_0 = 0.01$ m。数值计算时, y 方向的计算长度取 1. m, 采用的空间步长为 $\Delta x = \Delta y = 0.05$ m, 时间步长为 $\Delta t = 0.02$ s, 共计算 1700 个时间步, 每步迭代的误差容许限为 $\epsilon = 10^{-5}$ 。数值计算采用这样小的空间步长和时间步长是为了能够比较精细地分辨出由于非线性作用产生的高频谐波。

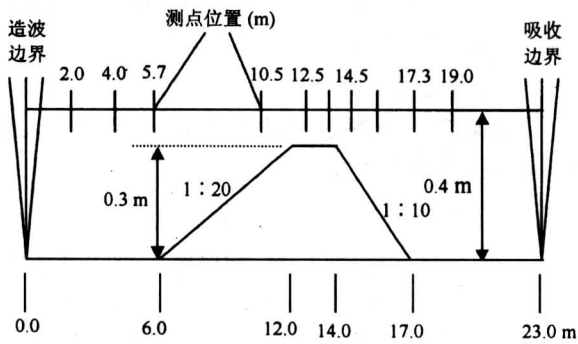


图 1 试验地形示意

Fig.1 Schematic of experimental topography

图 2 给出了在 10 个断面处的波面随时间变化的计算和实测值的比较。从总体上看, 该方程能较好地模拟波浪在潜堤上传播时波面的变形过程。可以看出, 在 $x = 2.0, 4.0, 10.5, 12.5, 13.5, 14.5$ m 处的计算结果和实测值均相当吻合, 在 $x = 15.7, 17.3, 19.0$ m 处的计算结果和实测值比较吻合, 但存在一定差异。而 $x = 5.7$ 处的数值结果和实测值存在较大的相位差, 文献 [18] 采用四

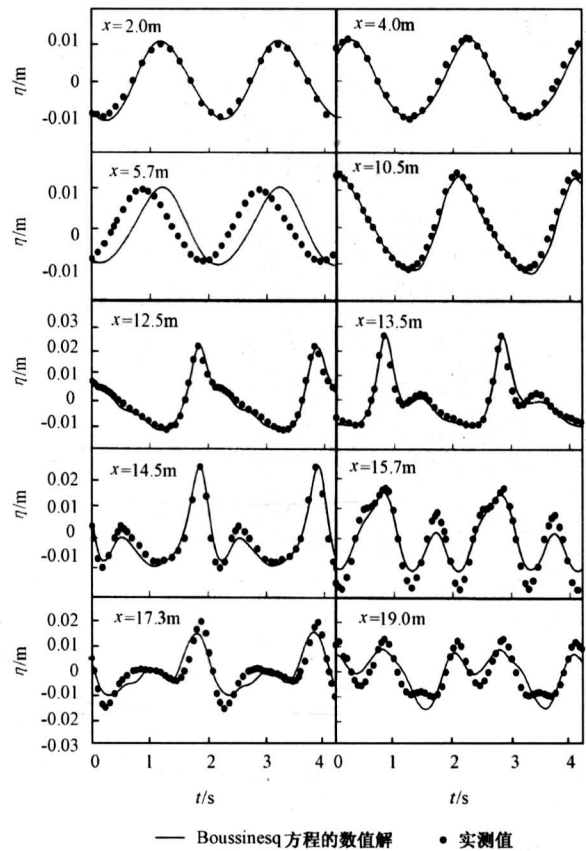


图 2 淹没浅堤上波浪变形的数值解与实测值的比较

Fig.2 Numerical solution and experimental data of wave transformation over a submerged bar

阶完全非线性 Boussinesq 方程得到的结果与实测值之间也存在同样相位差, 该文还说明了产生这种相差的主要原因是试验系统误差所致, 即测点位置在试验中实际上不是在 5.7 m 处, 而是在其他某个位置。在 $x = 15.7, 17.3, 19.0$ m 处的计算结果误差可能来自 2 个主要方面: a. 算例所采用的 Boussinesq 方程为弱非线性方程, 其本身可能不能够精细地反映由于非线性作用而产生的高频谐波, 从而产生一定的误差; b. 数值模拟采用的数值格式的误差。文献 [18] 还采用二阶完全非线性 Boussinesq 方程对该地形上的波浪变形进行了数值模拟, 得到的结果与实测值之间也存在一定差异。文献 [12] 应用 Nwogu^[10] 提出的 Boussinesq 方程并采用一种时间和空间均为四阶精度的数值格式对这种地形上的波浪变形进行了数值模拟, 其计算结果和实测值也存在一定差异, 主要表现在数值模拟的波高峰值偏小。文献 [12] 在对计算结果和实测

值比较后, 认为 Nwogu 提出的 Boussinesq 方程可用于中等水深地形上的波浪变形预报, 其结果在一定程度上是可信的, 但非线性项的作用过大, 需要对其进行修正; 然而文献 [15] 通过对 Nwogu^[10] 提出的 Boussinesq 方程进行抛物化处理, 得到了一个含自由参数的抛物型方程, 并采用该抛物型方程对该地形上的波浪问题也进行了数值模拟, 该方程却得到了比文献 [12] 更接近实测值的计算结果。

6 结论

对 Beji 和 Nadaoka 提出的 Boussinesq 方程采用预报校正格式进行了数值离散, 并对淹没浅堤上的波浪变形进行了数值模拟, 从数值模拟结果和实测值的比较来看, Beji 和 Nadaoka 提出的 Boussinesq 方程能给出比较满意的结果, 可以用于实际复杂地形上的波浪问题计算。另一方面, 数值格式精度还不够高, 带来一定的数值误差, 该 Boussinesq 方程为弱非线性弱频散模型, 这种改进的 Boussinesq 方程及其求解方法需做进一步的完善。

参考文献

- [1] Peregrine D H. Long waves on a beach [J]. *J Fluid Mech*, 1967, 27(4): 815~827
- [2] Abbott M B, Petersen H M, Skovgaard O. On the numerical modelling of short waves in shallow water [J]. *J Hydraulic Research*, 1978, 16(3): 173~203
- [3] Stiassnie M, Dagan G. Partial reflection of water waves by non-uniform advect currents [J]. *J Fluid Mech*, 1979, 92(1): 119~129
- [4] Lasen J, Dancy H. Open boundaries in short wave simulations: a new approach [J]. *Coastal Engineering*, 1983, 7(3): 285~297
- [5] Abbott M B, McCowan A D, Warren I R. Accuracy of short - wave numerical models [J]. *J Hydraulic Engineering*, 1984, 110(10): 1287~1301
- [6] Yoon S B, Liu P L F. Interaction of currents and weakly nonlinear water waves in shallow water [J]. *J Fluid Mech*, 1989, 205: 397~419
- [7] Madsen P A, Sørensen O R, Schäffer H A. A new form of Boussinesq equations with improved linear characteristics [J]. *Coastal Engineering*, 1991, 15: 371~388
- [8] Madsen P A, Sørensen O R, Schäffer H A. A new form of Boussinesq equations with improved linear characteristics: Part 2 a slowly-varying bathymetry [J]. *Coastal Engineering*, 1992, 18: 183~204
- [9] Schäffer H A, Madsen P A. Further enhancements of Boussinesq - type equations [J]. *Coastal Engineering*, 1995, 26: 1~14
- [10] Nwogu O. Alternative form of Boussinesq equations for nearshore wave propagation [J]. *J Wtrwy Port Coastal, and Ocean Engineering*, ASCE, 1993, 119(6): 618~638
- [11] Beji S, Battjes J A. Numerical simulation of nonlinear waves over a bar [J], *Coastal Engineering*, 1994, 23: 1~16
- [12] Wei G, Kirby J T. Time-dependent numerical code for extended Boussinesq equations [J]. *J Wtrwy Port, Coastal, and Ocean Engineering*, ASCE, 1995, 121(5): 251~261
- [13] Madsen P A, Sørensen O R, Schäffer H A. Surf zone dynamics simulated by a Boussinesq type model: Part 1 model description and cross-shore motion of regular waves [J]. *Coastal Engineering*, 1997, a 32: 255~287
- [14] Madsen P A, Sørensen O R, Schäffer H A. Surf zone dynamics simulated by a Boussinesq type model: Part 2 surf beat and swash oscillations for wave groups and irregular waves [J]. *Coastal Engineering*, 1997, b 32: 289~319
- [15] Kaihatu J M, Kirby J T. Two-dimensional parabolic modelling of extended Boussinesq equations [J]. *J Wtrwy Port, Coastal, and Ocean Engineering*, ASCE, 1998, 124(2): 57~67
- [16] Wei G, Kirby J T, Sinha A. A fully nonlinear Boussinesq model for surface waves: Part 1 highly nonlinear unsteady waves [J]. *J Fluid Mech*, 1995, 294: 71~92
- [17] Chen Q, Madsen P A, Schäffer H A, et al. Wave-current interaction based on an enhanced Boussinesq approach [J]. *Coastal Engineering*, 1998, 33: 11~39
- [18] Gobbi M F, Kirby J T. Wave evolution over submerged sills: tests of a high-order Boussinesq model [J]. *Coastal Engineering*, 1999, 37: 57~96
- [19] Beji S, Nadaoka K. A formal derivation and numerical modelling of the improved Boussinesq equations for varying depth [J]. *Ocean Engineering*, 1996, 23(8): 691~704
- [20] Beji S, Battjes J A. Experimental investigations of wave propagation over a bar [J]. *Coastal Engineering*, 1993, 19(1~2): 151~162
- [21] Ohya T, Kiota W, Tada A. Applicability of numerical models to nonlinear dispersive waves [J]. *Coastal Engineering*, 1994, 24: 297~313

Simulation of Wave Propagation Over a Submerged Bar Using a Modified Boussinesq Equation

Zheng Yonghong¹, Shen Yongming², Wu Xiuguang², You Yage¹

(1. Guangzhou Institute of Energy Conversion, Chinese Academy of Sciences, Guangzhou 510640, China;

2. State Key Laboratory of Coastal and Offshore Engineering, Dalian University of
Technology, Dalian, Liaoning 116023, China)

[**Abstract**] A modified Boussinesq equation is numerically studied. It is discretized by use of the predictor-corrector scheme. The numerical model applied to the propagation of waves over a submerged bar can produce results that are in general agreement with some laboratory measurements. The surface transformation of waves over the submerged bar is reproduced successfully by the numerical simulation. Comparison of numerical results with experimental data shows that the modified Boussinesq equation itself and the numerical solution method for it need to be studied further. These results can give some theoretical guidance to the applications of Boussinesq equation to wave propagation over complex topography in coastal areas.

[**Key words**] modified Boussinesq equation; numerical simulation; wave propagation; submerged bar

《中国工程科学》2004 年第 6 卷第 5 期要目预告

对我国制造业中长期发展战略的思考 …… 张 曙	潘玉良等
金属凝固显微组织的计算机模拟 …… 朱鸣芳等	既有公路桥梁剩余寿命评估时可变
料浆法磷铵生产工艺的发展与五大	荷载取值的研究 …… 索清辉等
磷肥工程的改造 …… 钟本和	集成产品开发规划的任务调度 …… 鲁建厦等
“开放的复杂巨系统”概念的形成 …… 卢明森	汽车零部件(弹簧)的可靠性稳健
人-机结合的智能科学和智能工程 …… 戴汝为	优化设计 …… 张义民等
农产品加工业技术创新体系建设刍议 …… 卢良恕等	水电工程地质信息三维可视化与分析 …… 刘东海等
开采煤层顶板环形裂隙圈内走向长钻孔法	非饱和土坡危险含水量分析 …… 张士林等
抽放瓦斯 …… 刘泽功等	Zr ₆₆ Al ₉ Cu ₁₆ Ni ₉ 块体非晶合金制备
改进的 R/S 方法与中国火灾数据的	工艺研究 …… 阮许平
分析预测 …… 付显华等	用改进后的 CSF 算法研究某边坡的稳定性
脉冲暂态混沌神经网络在约束非线性	…… 李建明
规划中的应用 …… 李 昊等	从三峡一期工程论工程宏观决策 …… 彭启友
分形模型与粗糙度参数 Ra 关系的研究	粒子群优化算法综述 …… 杨 维等