

分形模型参数与粗糙度参数 R_a 关系的研究

潘玉良, 吴立群, 张云电

(杭州电子工业学院, 杭州 310037)

[摘要] 介绍了W-M分形模型参数(D, G, γ)的物理含义,研究了分形参数(D, G, γ)与粗糙度参数 R_a 之间的联系,导出了分形参数(D, G, γ)与粗糙度参数 R_a 关系式,用数值分析拟合方法验证了关系式的正确性。

[关键词] W-M分形模型;分形参数;粗糙度 R_a 。

[中图分类号] TH124 **[文献标识码]** A **[文章编号]** 1009-1742(2004)05-0049-03

1 引言

工程实际中存在着许多分形现象^[1],描写分形的模型很多,其中W-M分形模型是时域、尺度、频谱物理意义最直观的一种,其时域函数由无限项随机相位余弦函数构成,频谱由无限项系数呈指数衰减的 δ 脉冲项构成。W-M分形模型应用在粗糙轮廓分析上,不但可以分析粗糙轮廓主要特征,还可以预测到更加精细的轮廓结构,同时粗糙轮廓被放大的精细轮廓结构与整体又表现出一定的统计自相似特性。

以下是在研究粗糙轮廓时应用最多的W-M分形函数。W-M函数处处连续,但处处不可微分^[2]。W-M函数为

$$Z(x) = G^{D-1} \sum_{n=n_1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi\gamma^n x + \varphi_n)}{\gamma^{(2-D)n}}, \quad 1 < D < 2, \gamma > 1 \quad (1)$$

其中 $Z(x)$ 为随机表面轮廓高度, x 表示轮廓的位置坐标, G 是幅度系数(μm), D 是分数维, γ^n 表示轮廓的空间频率, γ 为大于1的常数。

2 分形参数 D, G 和常数 γ 及粗糙度参数 R_a 的基本含义

分形参数分数维 D 是表示轮廓结构复杂程度的参数, D 越大轮廓细节越丰富;分形参数幅度系数 G 是影响轮廓幅值大小的参数,它的大小不影响轮廓的横向间距和‘过零点数’;常数 $\gamma > 1$ 且为非整正数; γ^n 表示轮廓的空间频率。 γ 取非整正数的目的在于式(1)中空间频率按几何级数规律变化后,各余弦函数叠加之和,充分表现随机性。M. V. Berry指出,分形几何中,分数维 D 是决定不规则性的参数, γ 的大小不影响不规则性,它与分数维 D 之间不存在数学上的联系。

轮廓算术平均偏差 R_a 是传统粗糙度参数中最重要的一個,它表示在取样长度 l 内,轮廓偏距绝对值的算术平均值,用公式表示为^[3]

$$R_a = \frac{1}{l} \int_0^l |Z(x)| dx \quad (2)$$

几乎任何国家的粗糙度标准中都首先使用粗糙度参数 R_a 。在工程应用中,粗糙度参数 R_a 广为接受和使用,但是分形参数与 R_a 之间定量关系研究较少,这对灵活应用W-M函数为粗糙轮廓建

[收稿日期] 2003-07-08; 修回日期 2003-09-13

[基金项目] 国家自然科学基金资助项目(50275043),浙江省教育厅资助项目(20020206)

[作者简介] 潘玉良(1960-),男,浙江嘉兴市人,杭州电子工业学院副教授

模、正确理解分形参数表达粗糙度的能力、推广使用分形参数都是极大障碍。因此，有必要研究分形参数 D , G 与 R_a 之间的内在联系。

3 R_a 与分形参数 D , G 之间的数学联系^[4, 5]

式 (1) W - M 函数的均值

$$\begin{aligned} \mu &= E(Z(x)) = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l} \int_0^l Z(x) dx = \\ \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l} \int_0^l G^{D-1} \sum_{n=n_1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi\gamma^n x + \varphi_n)}{\gamma^{(2-D)n}} dx &= \\ G^{D-1} \sum_{n=n_1}^{\infty} \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l} \int_0^l \cos(2\pi\gamma^n x + \varphi_n) dx &/ \\ \gamma^{(2-D)n} &= 0. \end{aligned}$$

W - M 函数的偏斜度

$$S_k = \frac{1}{\sigma^3} \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l} \int_0^l Z(x)^3 dx,$$

经过大量数值仿真计算, $S_k \rightarrow 0$ 。因此, W - M 分形函数是零均值, 近似对称分布。

把式 (1) W - M 函数代入式 (2) 得:

$$\begin{aligned} R_a &= \frac{1}{l} \int_0^l |Z(x)| dx = \frac{1}{l} \int_0^l G^{D-1} \cdot \\ &\left| \sum_{n=n_1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi\gamma^n x + \varphi_n)}{\gamma^{(2-D)n}} \right| dx < \\ \frac{G^{D-1}}{l} \sum_{n=n_1}^{\infty} \frac{1}{\gamma^{(2-D)n}} \int_0^l |\cos(2\pi\gamma^n x + \varphi_n)| dx &= \\ \frac{2G^{D-1}}{\pi} \frac{\gamma^{(D-2)n_1}}{1 - \gamma^{D-2}}, n_1 > 0, \end{aligned}$$

即
$$R_a < \frac{2G^{D-1}}{\pi} \frac{\gamma^{(D-2)n_1}}{1 - \gamma^{D-2}}, n_1 > 0 \quad (3)$$

4 分形参数 D , G 与粗糙度 R_a 数值关系^[5]

取分数维 $D=1.1 \sim 1.9$, 幅度系数 $G=0.25, 0.1, 0.04, 0.016$ 等 8 个数, 初始项 $n_1=1$, 用 W - M 函数产生模拟轮廓 (略), 用式 (2) 计算轮廓粗糙度 R_a , 分别研究 $R_a - D$, $R_a - G$ 之间的关系, 结果如图 1 和图 2 所示。

从图 1 看到, G 保持不变时, $R_a - D$ 的关系并非一致单调。 G 较大时, 如 $G=0.25$, R_a 与分数维 D 关系中存在着一个最小极值点; 当 G 较小

时, 如 $G < 0.04$, R_a 与分数维 D 呈单调关系。用最小二乘法拟合图 1 中 $G=0.00256$ 时, R_a 与分数维 D 数值关系为

$$R_a \propto \frac{1}{D^{6.8}} \quad (4)$$

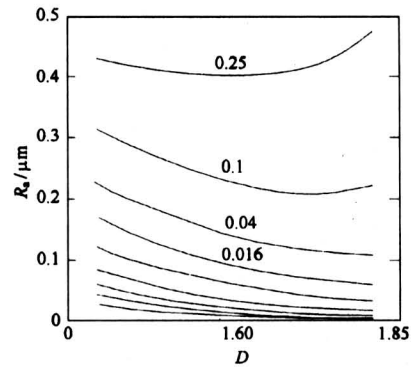


图 1 $R_a - D$ 关系

Fig.1 Relationship between $R_a - D$

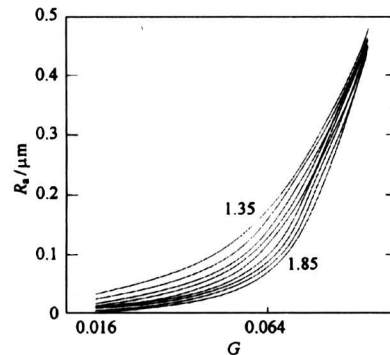


图 2 $R_a - G$ 关系

Fig.2 Relationship between $R_a - G$

从图 2 看到, D 保持不变时, $R_a - G$ 的关系一致单调。用最小二乘法拟合图 2 中 $D=1.5$ 时 R_a 与幅度系数 G 关系得

$$R_a = 0.8111G^{0.5} \quad (5)$$

用最小二乘法拟合图 2 中 $D=1.7$ 时, R_a 与幅度系数 G 关系为

$$R_a = 1.0803G^{0.7} \quad (6)$$

由以上两式推断 R_a 与幅度系数 G 关系为

$$R_a \propto G^{D-1} \quad (7)$$

$R_a - D$, $R_a - G$ 之间的数值关系结果充分地体现了式 (3) 的正确性。

5 结论

经过数学推导和数值分析得到以下结论：

1) 粗糙度参数 R_a 与分形参数 D , G 及常数 γ 有关联, 并满足

$$R_a < \frac{2G^{D-1}}{\pi} \frac{\gamma^{(D-2)n_1}}{1 - \gamma^{D-2}}, n_1 > 0。$$

2) R_a 与幅度系数 G 关系为 $R_a \propto G^{D-1}$ 。

参考文献

[1] Mandelbrot B B. Fractal character of fracture surfaces

of metals [J]. Nature, 1984, 308: 1571~1572

[2] Majumdar A. A fractal characterization and simulation of rough surfaces [J]. Wear, 1990, 136: 313~327

[3] Thomas T R. Rough surface [M]. New York: Longman Group Ltd, 1982

[4] 吴立群. 分形、小波理论在粗糙轮廓建模与设计中的应用研究 [D]. 杭州: 浙江大学, 2001

[5] 潘玉良, 吴立群, 陈国金, 等. 轴类零件粗糙度参数模糊设计系统研究 [J]. 组合机床与自动化加工技术, 2001, (6): 13~16

Study of the Relationship Between Fractal Model Parameters and Roughness Parameter R_a

Pan Yuliang, Wu Liqun, Zhang Yundian

(Hangzhou Institute of Electronic Engineering, Hangzhou 310037, China)

[Abstract] The W-M fractal model and the physical meaning of fractal parameters (D , G , γ) are briefly introduced in this paper. The relationships between model parameters and roughness parameter R_a are studied theoretically. The simulation shows that their relationships are correct.

[Key words] W-M fractal model; fractal parameters; roughness R_a

《中国工程科学》2004 年第 6 卷第 6 期要目预告

“知行学”引论

——信息 知识 智能的统一理论 钟义信

跨学科的地质灾害预警工程 姚学祥等

论创造性思维 冯国瑞

长江三峡坝区地壳稳定性研究 李 等

具有冗余结构的分布式数据库

服务器及其负载平衡模型 田俊峰等

Agent 的 PASS-BDI 模型 樊 玮等

不同微波遥感模态和不同数据组合的等湿度

区域分布与土壤湿度的反演 袁 苇等

基于光谱辐射信息的高温目标图像识别

..... 范学良等

三峡工程管理模式及混凝土技术研究

..... 曹广晶

中国物流业及物流技术刍议 罗一新等

碾磨水电站大坝碎石土防渗料工程

特性及土料设计 王寿根

一种新型聚能破甲战斗部及其

发展趋势探讨 安二峰等

含稀释剂的 Al-Cr₂O₃体系燃烧合成反应

热力学分析与反应模型 张衍诚等

向家坝工程大坝混凝土施工过程动态

仿真研究 申明亮等

基于以太网通讯的自动化立体仓库

管理与监控系统 王志伟等

化学键参数和原子半径差与 BMG 合金的

GFA 关系 蔡安辉等

抗静电增强尼龙 6 的研制 刘建强

植物(秸秆)改性纤维资源化利用 罗学刚