现代管理

灰数灰度的一种公理化定义

刘思峰[1]，林　益[2]
（1. 南京航空航天大学经济与管理学院，南京　210016；
2. 美国宾州州立 SR 大学数学系，PA 16057，USA）

[摘要]　基于对已有的几种灰数灰度定义的讨论，建立了灰数灰度定义的公理系统；以灰数灰度定义公理为准绳，由灰数产生的背景或论域及灰数取数域的测度构造出一种新的灰数灰度定义式。新定义克服了原有定义中存在的问题，较为科学地描述了灰数的不确定程度。

[关键词]　灰色系统；灰数灰度；测度；公理化定义
[中图分类号]　C931　　[文献标识码]　A　　[文章编号]　1009－1742（2004）08－0091－04

1　引言

对于白化权函数 $f[a_1, b_1, b_2, a_2]$（见图 1）已知的灰数$\otimes \in [a_1, a_2]$，$a_1 < a_2$ 邓聚龙教授将其灰度定义为[1]*

$$g^{\circ}(\otimes) = 2|b_1 - b_2|/(b_1 + b_2) + \max\{|a_1 - b_1|/b_1, |a_2 - b_2|/b_2\} \quad (1)$$

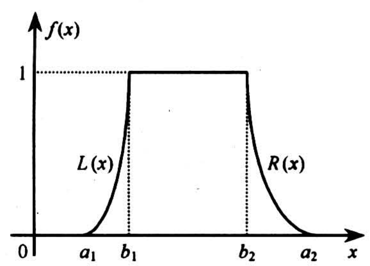

图 1　白化权函数 $f[a_1, b_1, b_2, a_2]$

Fig.1　Weight function of whitenization $f[a_1, b_1, b_2, a_2]$

灰数的白化权函数 $f[a_1, b_1, b_2, a_2]$ 相当于模糊数学中边界已知之 Fuzzy 集的隶属函数[2]，在某种意义上亦类似于随机变量的密度函数。这里，区间 $[a_1, a_2]$ 表示灰数$\otimes$的取值范围，$f(x)$ 的数值表达了灰数$\otimes$取某一具体数值 x 的可能性大小。

在式（1）中，灰度被表达为 2 部分之和，其中第一部分代表峰区的大小对灰度的影响，第二部分代表 $L(x)$ 和 $R(x)$ 覆盖面积大小对灰度的影响。按照这一定义，峰区越大，$L(x)$ 和 $R(x)$ 的覆盖面积越大，$g^{\circ}(\otimes)$ 就越大。

文献 [3] 中，基于灰区间长度 $l(\otimes)$ 和灰数的均值白化数$\hat{\otimes}$，Liu Sifeng 给出了灰度的一种公理化定义：

$$g^{\circ}(\otimes) = l(\otimes)/\hat{\otimes}, \quad (2)$$

这里，在非负性公理、零灰度公理、无穷灰度公理和数乘公理的基础上，灰度被定义为灰区间长度 $l(\otimes)$ 与其相应均值白化数$\hat{\otimes}$的商。

式（1）和式（2）给出的灰度定义皆存在以下问题：

1）不满足规范性　显然，当灰区间长度 $l(\otimes)$ 趋于无穷大时，由式（1）和式（2）定义的灰度皆有可能趋于无穷大。

2）零心灰数的灰度没有定义　对于零心灰数，

[收稿日期]　2003－12－04；修回日期　2004－02－03
[基金项目]　国家教育部博士学科点科研基金资助项目（20020287001）；江苏省自然科学基金重点课题（BK2003211）
[作者简介]　刘思峰（1955－），男，河南驻马店市人，博士，南京航空航天大学特聘教授，博士生导师

* 为与引用的参考文献原来的公式一致，继续采用$\otimes$，$\hat{\otimes}$，g° 变量符号并改为斜体

式（1）中为 $b_1 = b_2 = 0$ 的情形，式（2）中为$\hat{\otimes} = 0$ 的情形，这时，式（1）和式（2）所给出的灰度皆没有定义。

2 灰度定义的公理系统

灰数是灰色系统之行为特征的一种表现形式[4, 5]。灰数的灰度反映了人们对灰色系统认识的不确定程度[5~8]。因此，一个灰数灰度大小应与该灰数产生的背景或论域有着不可分割的联系。如果对一个灰数产生的背景或论域及其表征的灰色系统不加说明，实际上无法讨论该灰数的灰度。例如，对于灰数$\otimes \in [160, 200]$,如果不说明其产生的背景或论域及其表征的灰色系统，就很难说清楚它的灰度到底有多大。当它表达的一名中国成年男子的身高（cm）时，人们会觉得这一灰数的灰度很大。因为［160，200］几乎与中国成年男子身高的背景或论域重合。假若公安机关搜捕一名罪犯，有人提供信息说罪犯身高在 160 cm 和 200 cm 之间，这样的信息几乎没有任何价值。如果灰数$\otimes \in [160, 200]$表示的是一个人的血压（收缩压(mmHg)），那么一般人们会认为这一灰数的灰度不是很大，因为它的确能为医生提供十分有用的信息。

设 Ω 为灰数$\otimes$产生的背景或论域，$\mu(\otimes)$ 为灰数$\otimes$ 之取数域的测度，则灰数$\otimes$的灰度 $g^\circ(\otimes)$ 符合以下公理：

公理 1 $0 \leqslant g^\circ(\otimes) \leqslant 1$ 。

公理 2 $\otimes \in [a_1, a_2]$, $a_1 \leqslant a_2$ 当 $a_1 = a_2$ 时, $g^\circ(\otimes) = 0$ 。

公理 3 $g^\circ(\Omega) = 1$ 。

公理 4 $g^\circ(\otimes)$ 与 $\mu(\otimes)$ 成正比,与 $\mu(\Omega)$ 成反比。

公理 1 将灰数的灰度取值范围限定在［0，1］区间内。公理 2 规定白数的灰度为零。白数是完全确定的数，没有任何不确定的成分。公理 3 规定灰数产生的背景或论域 Ω 的灰度为 1，取为灰度的最大值。因为灰数产生的背景 Ω 一般为人所共知或覆盖了灰数的论域，故不含任何有用的信息，其不确定性最大。公理 4 表明当灰数$\otimes$产生的背景或论域一定时，灰数$\otimes$之取数域的测度 $\mu(\otimes)$ 越大，灰数$\otimes$的灰度 $g^\circ(\otimes)$ 越大。例如，估计某一实数真值得到灰数$\otimes$，在估计的可靠程度一定时，$\otimes$的测度越大，这种估计的意义越小，不确定性越大；相反，$\otimes$的测度越小，这种估计的意义越大，不确定性越小[4, 9~14]。

定义 1 设灰数$\otimes$产生的背景或论域为 Ω，$\mu(\otimes)$ 为灰数$\otimes$之取数域的测度，则称

$$g^\circ(\otimes) = \mu(\otimes) / \mu(\Omega) \tag{3}$$

为灰数$\otimes$的灰度。

定理 1 由式（3）给出的灰度定义满足灰度定义的 4 个公理。

证明 公理 1 由 $\otimes \subset \Omega$ 及测度的性质，有

$$0 \leqslant \mu(\otimes) \leqslant \mu(\Omega)。$$

从而

$$0 \leqslant g^\circ(\otimes) \leqslant 1。$$

公理 2 当 $a_1 = a_2$ 时 $\mu(\otimes) = 0$, 因此，$g^\circ(\otimes) = \mu(\otimes) / \mu(\Omega) = 0$ 。

公理 3、公理 4 显然。

定理 2 若$\otimes_1 \subset \otimes_2$，则 $g^\circ(\otimes_1) \leqslant g^\circ(\otimes_2)$ 。

证明 由$\otimes_1 \subset \otimes_2$ 及测度的性质，有 $\mu(\otimes_1) \leqslant \mu(\otimes_2)$，再由式（3）易知

$$g^\circ(\otimes_1) \leqslant g^\circ(\otimes_2)。$$

3 合成灰数的灰度

由于灰数具有可构造性，因此，有必要进一步研究合成灰数的灰度。

定义 2 设$\otimes_1 \in [a, b]$, $a < b$; $\otimes_2 \in [c, d]$, $c < d$, 则称

$$\otimes_1 \cup \otimes_2 = \{\xi \mid \xi \in [a, b] \text{ 或 } \xi \in [c, d]\} \tag{4}$$

为灰数$\otimes_1$ 与$\otimes_2$ 的并。

灰数的并相当于对若干灰数进行“堆积”或“归并”，其结果自然是灰度增大。

定理 3 $g^\circ(\otimes_1 \cup \hat{\otimes}_2) \geqslant g^\circ(\otimes_k)$, $k = 1, 2$。

证明 由 $\otimes_1 \cup \otimes_2 \supset \otimes_k$, $k = 1, 2$ 和定理 2 易知定理 3 成立。

定义 2 和定理 3 皆可以推广到有限个灰数求并的情形。

定义 3 设$\otimes_1 \in [a, b]$, $a < b$; $\otimes_2 \in [c, d]$, $c < d$, 则称

$$\otimes_1 \cap \otimes_2 = \{\xi \mid \xi \in [a, b] \text{ 或 } \xi \in [c, d]\} \tag{5}$$

为灰数$\otimes_1$ 与$\otimes_2$ 的交。

灰数的交相当于对若干个灰数进行综合加工、提炼，能够使人们对灰色系统的认识逐步深化，其

结果自然是灰度减小[8, 9]。

定理 4　$g^{\circ}(\otimes_1 \cap \otimes_2) \leqslant g^{\circ}(\otimes_k)$，$k = 1, 2$。

证明　由$\otimes_1 \cap \otimes_2 \subset \otimes_k$，$k = 1, 2$ 和定理 2 易知定理 4 成立。

定义 3 和定理 4 皆可以推广到有限个灰数求交的情形。

定理 5　设$\otimes_1 \subset \otimes_2$，则有

$$g^{\circ}(\otimes_1 \cup \otimes_2) = g^{\circ}(\otimes_2),$$
$$g^{\circ}(\otimes_1 \cap \otimes_2) = g^{\circ}(\otimes_1)。$$

证明　由$\otimes_1 \subset \otimes_2$，得$\otimes_1 \cup \otimes_2 = \otimes_2$，$\otimes_1 \cap \otimes_2 = \otimes_1$，从而

$$g^{\circ}(\otimes_1 \cup \otimes_2) = g^{\circ}(\otimes_2),$$
$$g^{\circ}(\otimes_1 \cap \otimes_2) = g^{\circ}(\otimes_1)。$$

当灰数$\otimes_1$，$\otimes_2$ 关于测度 μ 独立时，还可以得到更为有趣的结果。

定理 6　设 $\mu(\Omega)$，灰数$\otimes_1$，$\otimes_2$ 关于测度 μ 独立，则有

1) $g^{\circ}(\otimes_1 \cap \otimes_2) = g^{\circ}(\otimes_1) \cdot g^{\circ}(\otimes_2)$;

2) $g^{\circ}(\otimes_1 \cup \otimes_2) = g^{\circ}(\otimes_1) + g^{\circ}(\otimes_2) - g^{\circ}(\otimes_1) \cdot g^{\circ}(\otimes_2)$。

证明　1) 由 $\mu(\Omega) = 1$，且灰数$\otimes_1$，$\otimes_2$ 关于测度 μ 独立，有

$$g^{\circ}(\otimes_1 \cap \otimes_2) = \mu(\otimes_1 \cap \otimes_2) = \mu(\otimes_1) \cdot \mu(\otimes_2) = g^{\circ}(\otimes_1) \cdot g^{\circ}(\otimes_2);$$

2) 同理

$$g^{\circ}(\otimes_1 \cup \otimes_2) = \mu(\otimes_1 \cup \otimes_2) = \mu(\otimes_1) + \mu(\otimes_2) - \mu(\otimes_1) \cdot \mu(\otimes_2) = g^{\circ}(\otimes_1) + g^{\circ}(\otimes_2) - g^{\circ}(\otimes_1) \cdot g^{\circ}(\otimes_2)。$$

例　考虑掷一个均匀六面体骰子所得的点数，此时背景或论域为

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

设灰数 $\otimes_1 \in \{1, 2\}$，$\otimes_2 \in \{2, 3, 4\}$，$\mu$ 为概率测度，则

$$\mu(\otimes_1) = 1/3, \mu(\otimes_2) = 1/2,$$
$$\mu(\otimes_1 \cap \otimes_2) = 1/6$$

满足独立性条件，显然，

$$g^{\circ}(\otimes_1) = \mu(\otimes_1) = 1/3,$$
$$g^{\circ}(\otimes_2) = \mu(\otimes_2) = 1/2,$$
$$g^{\circ}(\otimes_1 \cap \otimes_2) = \mu(\otimes_1 \cap \otimes_2) = 1/6 = g^{\circ}(\otimes_1) \cdot g^{\circ}(\otimes_2),$$
$$g^{\circ}(\otimes_1 \cup \otimes_2) = \mu(\otimes_1 \cup \otimes_2) = 2/3 = g^{\circ}(\otimes_1) + g^{\circ}(\otimes_2) - g^{\circ}(\otimes_1) \cdot g^{\circ}(\otimes_2)$$

与定理 6 中的结论一致。

4　结语

灰数的合成方式将对合成灰数的灰度及相应灰信息的可靠程度产生一定的影响。一般地，灰数求并后灰度增大，而合成信息的可靠程度会有所提高；灰数求交后灰度减小，而合成信息的可靠程度往往会降低。在解决实际问题的过程中，当需要对大量灰数进行筛选、加工、合成时，可以考虑在若干个不同的层次上进行合成，逐层提取信息。在合成过程中，采用间层交叉进行并、交合成，以保证最后筛选出的信息在可靠程度和灰度方面都能满足一定的要求。在不确定性信息分析中，通过对不确定性信息的合成、提炼，人们希望尽可能地减小其不确定性、提高其可靠性。基于灰数的合成对合成灰数的灰度及相应灰信息的可靠性的影响分析，不难发现，不确定性和可靠性是一对矛盾。根据实际问题的研究需要，有时要求不确定性必须减小到某一水准，而对可靠性的要求允许适当放宽；有时则要求有较高的可靠性，允许适当放宽对不确定性的要求。一般可按照具体问题的背景进行取舍。

参考文献

[1]　邓聚龙. 灰色控制系统 [M]. 武汉：华中工学院出版社，1985

[2]　汪培庄，韩立岩. 应用模糊数学 [M]. 北京：北京经济学院出版社，1989

[3]　Liu Sifeng. Axioms on grey degree [J]. The Journal of Grey System, 1996, 8 (4): 396～400

[4]　Liu Sifeng. On measure of grey information [J]. The Journal of Grey System, 1995, 7 (2): 97～101

[5]　邓聚龙. 灰数学引论——灰色朦胧集 [M]. 武汉：华中理工大学出版社，1992

[6]　刘思峰，郭天榜，党耀国. 灰色系统理论及其应用（第二版）[M]. 北京：科学出版社，1999

[7]　刘思峰，邓聚龙. GM(1,1)模型的适用范围 [J]，系统工程理论与实践，2000，(5)：121～124

[8]　陈世联. 灰色系统中的灰元及灰元空间 [J]. 昆明理工大学学报，2001，26 (2)：92～95

[9]　Liu Sifeng, Lin Yi. An Introduction to Grey Systems: Foundations, Methodology and Applications [M]. Grove City: IIGSS Academic Publisher, 1998

[10] 杨建华，刘金禄，王子亮．灰色曲线与灰数的灰度[J]．武汉化工学院学报，1996，18（4）：71～72
[11] 杨建华．灰色曲面[J]．武汉化工学院学报，1998，20（1）：82～84
[12] Lin Yi, Liu Sifeng. A systemic analysis with data (I) [J]. International Journal of General Systems (UK), 2000, 29 (6): 989～999
[13] Lin Yi, Liu Sifeng. A systemic analysis with data (II) [J]. International Journal of General Systems (UK), 2000, 29 (6): 1001～1013
[14] 罗 党，刘思峰，党耀国．灰色模型GM(1,1)优化[J]．中国工程科学，2003，5（8）：50～53

An Axiomatic Definition of Degree of Greyness of Grey Number

Liu Sifeng[1], Lin Yi[2]

(1. *College of Economics and Management, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing* 210016, *China*, *E-mail*: *sfliu@nuaa.edu.cn*;
2. *Mathematics Department of Slippery Rock University, Slippery Rock, PA*. 16057, *USA*, *E-mail*: *Jeffrey.forrest@sru.edu*)

[**Abstract**] In this paper, an axiomatic system for the definition of degree of greyness of grey number is built based on discussion with two definitions of degree of greyness of grey number which have been put forward in the past. Taking axioms as the criterion for definition of degree of grayness of grey number, a new formula for definition of degree of grayness of grey number has been formed with measure of the right range of grey number and the background or field which is brought about by the grey number. The degree of uncertainty of grey number is described scientifically, and some problems present in old definitions have been surmounted in new definition.

[**Key words**] grey systems; degree of greyness of grey number; measure; axiomatic definition