学 术 论 文

一类高维随机系统的小波分析

夏学文
（湖南工程学院数理系，湖南 湘潭　411104）

［摘要］　利用小波分析研究了线性随机系统 $\boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{X}_0+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{F}(\tau)\boldsymbol{X}(\tau)\mathrm{d}(\tau)+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{B}(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{G}(\tau)\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}(\tau)$ 在小波变换下的平均功率、稠度、小波展开及展开系数的相关性等。

［关键词］　随机系统；小波分析；平均功率；稠度；相关性

［中图分类号］ O211　　**［文献标识码］** A　　**［文章编号］** 1009－1742（2004）11－0043－04

1　引言

小波分析是一个新的数学分支，它是泛函分析、Fourier 分析、调和分析、数值分析最完美的结晶；在信号处理、图像处理、语言分析、模式识别、量子物理及众多非线性科学与工程科学领域得到很好的应用，是工具和方法上的重大突破。

许多学者在该领域做了许多的工作，近年，Cambanis，Flandrin，Krim，Priestley，Walter 等学者[1~5]及我国北京大学谢衷洁教授及其学生已将小波分析方法应用于随机过程与统计方面的研究[6]，做出了许多优秀的工作。笔者研究一类在工程科学中应用广泛的高维随机系统的小波性质，得到一些新结果。考虑如下线性随机系统[7]

$$\boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{X}_0+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{F}(\tau)\boldsymbol{X}(\tau)\mathrm{d}(\tau)+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{B}(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{G}(\tau)\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}(\tau)\qquad(1)$$

其中 $\boldsymbol{X}(t)$ 为 n 维状态向量，$\boldsymbol{u}(t)$ 为 n 维确定性控制输入，$\boldsymbol{F}(t)$ 为 $n\times n$ 系统矩阵，$\boldsymbol{B}(t)$ 为 $n\times n$ 控制输入加权阵，$\boldsymbol{G}(t)$ 为 $n\times n$ 扰动加权阵，$\boldsymbol{\beta}(t)$ 为 n 维布朗运动过程。

假定方程式（1）满足：

1）$\{\boldsymbol{\beta}(t),\ t\in T\}$ 的增量协方差矩阵为

$$\boldsymbol{E}\{\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}(t)\ \mathrm{d}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}(t)\}=Q(t)\mathrm{d}t;$$

2）初始状态 $\boldsymbol{X}_0$ 是高斯随机变量，其均值为 $\bar{\boldsymbol{X}}_0$，协方差矩阵为 $\boldsymbol{P}_0$，且 $\boldsymbol{X}_0$ 和 $\boldsymbol{\beta}(t)$ 独立；

3）确定性部分是渐近稳定的，即 $\lim\limits_{u\to\infty}\mathrm{e}^{\boldsymbol{F}u}=0$。

随机系统（1）在工程中具有重要的应用价值，许多工程问题可以归结为这一模型。

可知式（1）的解为[8]

$$\boldsymbol{X}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{F}(t-t_0)}\boldsymbol{X}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{\boldsymbol{F}(t-\tau)}\boldsymbol{B}(\tau)\cdot\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau+\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{\boldsymbol{F}(t-\tau)}\boldsymbol{G}(\tau)\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}(\tau)\qquad(2)$$

式中 $\boldsymbol{F}(t)=\boldsymbol{F}$ 为常数矩阵。

为研究方便，不妨设确定性输入为零，否则如果有常量输入 $\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t)$，则可设状态变量为 $[\boldsymbol{X}(t)-\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t)]$，此时式(2)可变为

$$\boldsymbol{X}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{F}(t-t_0)}\boldsymbol{X}_0+\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{\boldsymbol{F}(t-\tau)}\boldsymbol{G}(\tau)\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}(\tau)\qquad(3)$$

其均值向量和协方差矩阵分别为

$$\boldsymbol{m}_x(t)=\boldsymbol{E}\{\boldsymbol{X}(t)\}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{F}(t-t_0)}\bar{\boldsymbol{X}}_0,$$

$$\boldsymbol{P}_x(t)=\boldsymbol{E}\{[\boldsymbol{X}(t)-\boldsymbol{m}_x(t)][\boldsymbol{X}(t)-\boldsymbol{m}_x(t)]^{\mathrm{T}}\}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{F}(t-t_0)}\boldsymbol{P}_0\mathrm{e}^{\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(t-t_0)}+\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{\boldsymbol{F}(t-\tau)}\boldsymbol{GQG}^{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(t-\tau)}\mathrm{d}\tau,$$

其中 $\bar{\boldsymbol{X}}_0=\boldsymbol{E}\{\bar{\boldsymbol{X}}_0\}$，$\boldsymbol{P}_0=\boldsymbol{E}[(\boldsymbol{X}_0-\bar{\boldsymbol{X}}_0)(\boldsymbol{X}_0-\bar{\boldsymbol{X}}_0)^{\mathrm{T}}]$。

设 $\boldsymbol{H}=\{\boldsymbol{X}(t),\ t\in T\}$ 为均方连续的 n 维随机过程，且 $\boldsymbol{E}\{[\boldsymbol{X}(t)][\boldsymbol{X}(t)]^{\mathrm{T}}\}<\infty$。

定义内积 $\langle\boldsymbol{X}(t),\ \boldsymbol{X}(s)\rangle=(\boldsymbol{E}\{\boldsymbol{X}(t)\cdot\boldsymbol{X}(s)\},\ t,$

［收稿日期］　2003－11－03；修回日期　2004－01－08
［基金项目］　国家自然科学基金资助项目（10171009）；湖南省教育厅科研基金资助项目
［作者简介］　夏学文（1964－），男，湖南益阳市人，湖南工程学院教授，广东工业大学研究员

$s\in T\subset R$,其中 $\boldsymbol{X}(t)\cdot\boldsymbol{X}(s)$ 表示欧氏内积,且设

$$\|\boldsymbol{X}\| = \langle \boldsymbol{X}(t),\ \boldsymbol{X}(t)\rangle^{1/2} = (\boldsymbol{E}\{[\boldsymbol{X}(t)][\boldsymbol{X}(t)]^{\mathrm{T}}\})^{1/2}$$

对于 $\boldsymbol{X}(t)\in \boldsymbol{H}$,其小波变换定义为[4]

$$\mathrm{W}\boldsymbol{X}(s,x) = \frac{1}{s}\int_R \boldsymbol{X}(t)\Psi\left(\frac{x-t}{s}\right)\mathrm{d}t,\quad s\in R_+,\ t\in R \tag{4}$$

其中 Ψ 为母小波[4]。这样有

定理1

$$\int_0^\infty\int_R \mathrm{W}\boldsymbol{X}(s,x)\cdot \mathrm{W}g(s,x)\mathrm{d}xs^{-2}\mathrm{d}s = \boldsymbol{C}_\Psi\langle x,g\rangle \tag{5}$$

式中 $\boldsymbol{C}_\Psi = \int_0^\infty |\hat{\Psi}(t)|^2 t^{-1}\mathrm{d}t < \infty$。

证:对每个固定的 s,$\mathrm{W}\boldsymbol{X}(s,\ x)\in \boldsymbol{H}$,故

$$\int_0^\infty\int_R \mathrm{W}\boldsymbol{X}(s,x)\cdot \mathrm{W}g(s,x)\mathrm{d}xs^{-2}\mathrm{d}s = 2\pi\int_0^\infty\int_R \hat{\boldsymbol{X}}(\xi)\hat{g}(\xi)|\hat{\Psi}(s\xi)|^2\mathrm{d}\xi s^{-1}\mathrm{d}s = 2\pi\int_R\int_0^\infty|\hat{\Psi}(s,\xi)|^2 s^{-1}\mathrm{d}s\times\hat{x}(\xi)\hat{g}(\xi)\mathrm{d}\xi = \boldsymbol{C}_\Psi\langle x,g\rangle。$$

2 小波变换的平均功率

对于式(3),有

$$\mathrm{W}\boldsymbol{X}(s,x) = \frac{1}{s}\int_R\left[\mathrm{e}^{\boldsymbol{F}(t-t_0)}\boldsymbol{X}_0 + \int_{t_0}^t \mathrm{e}^{\boldsymbol{F}(t-\tau)}\boldsymbol{G}(\tau)\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}(\tau)\right]\Psi\left(\frac{x-t}{s}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{s}\left[\int_R \mathrm{e}^{\boldsymbol{F}(t-t_0)}\boldsymbol{X}_0\Psi\left(\frac{x-t}{s}\right)\mathrm{d}t + \int_R\int_{t_0}^t \mathrm{e}^{\boldsymbol{F}(t-\tau)}\boldsymbol{G}(\tau)\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}(\tau)\Psi\left(\frac{x-t}{s}\right)\mathrm{d}t\right],$$

$$[\mathrm{W}\boldsymbol{X}(s,x)]^2 = \frac{1}{s^2}\left\{\left[\int_R \mathrm{e}^{\boldsymbol{F}(t-t_0)}\boldsymbol{X}_0\Psi\left(\frac{x-t}{s}\right)\mathrm{d}t\right]^2 + 2\int_R \mathrm{e}^{\boldsymbol{F}(t-t_0)}\boldsymbol{X}_0\Psi\left(\frac{x-t}{s}\right)\mathrm{d}t\int_R\int_{t_0}^t \mathrm{e}^{\boldsymbol{F}(t-\tau)}\cdot \boldsymbol{G}(\tau)\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}(\tau)\Psi\left(\frac{x-t}{s}\right)\mathrm{d}t + \left[\int_R\int_{t_0}^t \mathrm{e}^{\boldsymbol{F}(t-\tau)}\boldsymbol{G}(\tau)\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}(\tau)\Psi\left(\frac{x-t}{s}\right)\mathrm{d}t\right]^2\right\}。$$

从而

$$\boldsymbol{E}[\mathrm{W}\boldsymbol{X}(s,x)]^2 = \frac{1}{s^2}\left\{\boldsymbol{E}\left[\int_R \mathrm{e}^{\boldsymbol{F}(t-t_0)}\boldsymbol{X}_0\Psi\left(\frac{x-t}{s}\right)\mathrm{d}t\right]^2 + \boldsymbol{E}\left[\int_R\int_{t_0}^t \mathrm{e}^{\boldsymbol{F}(t-\tau)}\boldsymbol{G}(\tau)\Psi\left(\frac{x-t}{s}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}(\tau)\mathrm{d}t\right]^2\right\}。$$

由此有:

定理2 $\mathrm{W}\boldsymbol{X}(s,x)$作为随机过程其平均功率为

$$\boldsymbol{E}[\mathrm{W}\boldsymbol{X}(s,x)]^2 = \frac{1}{s^2}\left\{\boldsymbol{E}\left[\int_R \mathrm{e}^{\boldsymbol{F}(t-t_0)}\boldsymbol{X}_0\Psi\left(\frac{x-t}{s}\right)\mathrm{d}t\right]^2 + \boldsymbol{E}\left[\int_R\int_{t_0}^t \mathrm{e}^{\boldsymbol{F}(t-\tau)}\boldsymbol{G}(\tau)\Psi\left(\frac{x-t}{s}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}(\tau)\mathrm{d}t\right]^2\right\}。$$

3 稠度

考虑

$$\boldsymbol{R}(\tau) \triangleq \boldsymbol{E}[\mathrm{W}\boldsymbol{X}(s,\ x+\tau)\mathrm{W}\boldsymbol{X}(s,\ x)] = \frac{1}{s^2}\iint_{R^2}\boldsymbol{E}[\boldsymbol{X}(u)\boldsymbol{X}(v)]\cdot \Psi\left(\frac{u-(x+\tau)}{s}\right)\Psi\left(\frac{v-x}{s}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

利用式(3)有

$$\boldsymbol{R}(\tau) = \frac{1}{s^2}\left\{\iint_{R^2}\mathrm{e}^{\boldsymbol{F}(u-t_0)}\bar{P}_0\mathrm{e}^{\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(v-t_0)}\cdot \Psi\left(\frac{u-(x+\tau)}{s}\right)\Psi\left(\frac{v-x}{s}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v + \iint_{R^2}\left[\int_{t_0}^{\min(u,v)}\mathrm{e}^{\boldsymbol{F}(u-\tau)}\boldsymbol{G}(\tau)\ \boldsymbol{Q}(\tau)\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}(\tau)\mathrm{e}^{\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(v-\tau)}\mathrm{d}\tau\right]\cdot \Psi\left(\frac{u-(x+\tau)}{s}\right)\Psi\left(\frac{v-x}{s}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\right\},$$

故

$$\boldsymbol{R}^{(1)}(\tau) = \frac{1}{s^2}\left\{\iint_{R^2}\mathrm{e}^{\boldsymbol{F}(u-t_0)}\bar{P}_0\mathrm{e}^{\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(v-t_0)}\cdot \Psi'\left(\frac{u-(x+\tau)}{s}\right)\Psi\left(\frac{v-x}{s}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v + \iint_{R^2}\left[\int_{t_0}^{\min(u,v)}\mathrm{e}^{\boldsymbol{F}(u-\tau)}\boldsymbol{G}(\tau)\ \boldsymbol{Q}(\tau)\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}(\tau)\mathrm{e}^{\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(v-\tau)}\mathrm{d}\tau\right]\cdot \Psi'\left(\frac{u-(x+\tau)}{s}\right)\Psi\left(\frac{v-x}{s}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\right\},$$

$$\boldsymbol{R}^{(2)}(\tau) = \frac{1}{s^4}\left\{\iint_{R^2}\mathrm{e}^{\boldsymbol{F}(u-t_0)}\bar{P}_0\mathrm{e}^{\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(v-t_0)}\cdot \Psi''\left(\frac{u-(x+\tau)}{s}\right)\Psi\left(\frac{v-x}{s}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v + \iint_{R^2}\left[\int_{t_0}^{\min(u,v)}\mathrm{e}^{\boldsymbol{F}(u-\tau)}\boldsymbol{G}(\tau)\ \boldsymbol{Q}(\tau)\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}(\tau)\mathrm{e}^{\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(v-\tau)}\mathrm{d}\tau\right]\cdot \Psi''\left(\frac{u-(x+\tau)}{s}\right)\Psi\left(\frac{v-x}{s}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\right\},$$

从而有

$$\boldsymbol{R}(0) = \frac{1}{s^2}\left\{\iint_{R^2}\mathrm{e}^{\boldsymbol{F}(u-t_0)}\bar{\boldsymbol{P}}_0\mathrm{e}^{\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(v-t_0)}\cdot\right.$$

$$\Psi\left(\frac{u-x}{s}\right)\Psi\left(\frac{v-x}{s}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v+$$

$$\iint_{R^2}\left[\int_{t_0}^{\min(u,v)}\mathrm{e}^{\boldsymbol{F}(u-t)}\boldsymbol{G}(t)\boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}(t)\mathrm{e}^{\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(v-t)}\mathrm{d}t\right]\cdot$$

$$\left.\Psi\left(\frac{u-x}{s}\right)\Psi\left(\frac{v-x}{s}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\right\},$$

$$\boldsymbol{R}^{(2)}(0)=\frac{1}{s^4}\left\{\iint_{R^2}\mathrm{e}^{\boldsymbol{F}(u-t_0)}\overline{\boldsymbol{P}}_0\mathrm{e}^{\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(v-t_0)}\cdot\right.$$

$$\Psi''\left(\frac{u-x}{s}\right)\Psi\left(\frac{v-x}{s}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v+$$

$$\iint_{R^2}\left[\int_{t_0}^{\min(u,v)}\mathrm{e}^{\boldsymbol{F}(u-t)}\boldsymbol{G}(t)\boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}(t)\mathrm{e}^{\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(v-t)}\mathrm{d}t\right]\cdot$$

$$\left.\Psi''\left(\frac{u-x}{s}\right)\Psi\left(\frac{v-x}{s}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\right\},$$

其中 $\overline{\boldsymbol{P}}_0=\boldsymbol{E}\ (\boldsymbol{X}_0\boldsymbol{X}_0^{\mathrm{T}})$。

定理 3　系统式(1)的解过程 $\boldsymbol{X}(t)$ 的过零稠度为 $\mathrm{d}s=|\boldsymbol{R}^{(2)}(0)/\pi^2R(0)|^{1/2}$可由式(6)和式(7)得到。

4　小波展开

可知[5]存在 $\boldsymbol{X}_m(t)\in\boldsymbol{H}$，使

$$\boldsymbol{E}[\boldsymbol{X}(t)-\boldsymbol{X}_m(t)]^2\to 0,\ m\to\infty,\ t\in R,$$

且 $\boldsymbol{X}_m(t)=\sum\limits_{k=-\infty}^{m-1}\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}b_{kn}\Psi_{kn}(t)$，

其中 $b_{kn}=\int_R\boldsymbol{X}(t)\Psi_{kn}(t)\mathrm{d}t$ 。有

$$\boldsymbol{E}[b_{mn}\cdot b_{kj}]=\iint_{R^2}\boldsymbol{E}[\boldsymbol{X}(t)\cdot\boldsymbol{X}(s)]\cdot$$

$$\Psi(2^mt-n)\Psi(2^ks-j)2^{m/2}2^{k/2}\mathrm{d}t\mathrm{d}s=$$

$$\iint_{R^2}\mathrm{e}^{\boldsymbol{F}(t-t_0)}\overline{\boldsymbol{P}}_0\mathrm{e}^{\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(s-t_0)}\Psi(2^mt-n)\cdot$$

$$\Psi(2^ks-j)2^{(m+k)/2}\mathrm{d}t\mathrm{d}s+$$

$$\iint_{R^2}\left[\int_{t_0}^{\min(s,t)}\mathrm{e}^{\boldsymbol{F}(t-\tau)}\boldsymbol{G}(\tau)\boldsymbol{Q}(\tau)\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}(\tau)\mathrm{e}^{\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(s-t)}\mathrm{d}\tau\right]\cdot$$

$$\Psi(2^mt-n)\Psi(2^ks-j)2^{(m+k)/2}\mathrm{d}t\mathrm{d}s。$$

设初始时刻 $t_0\to-\infty$ 则有

$$\lim_{t_0\to\infty}\boldsymbol{E}[b_{mn}\cdot b_{kj}]=\iint_{R^2}\left[\int_0^{\infty}e^{\boldsymbol{F}t}\boldsymbol{G}(\tau)\boldsymbol{Q}(\tau)\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}(\tau)\cdot\right.$$

$$\left.\mathrm{e}^{\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}s}\mathrm{d}\tau\right]\Psi(2^mt-n)\Psi(2^ks-j)2^{(m+k)/2}\mathrm{d}t\mathrm{d}s=$$

$$\iint_{R^2}\mathrm{e}^{\boldsymbol{F}t}\left[\int_0^{\infty}\boldsymbol{G}(\tau)\boldsymbol{Q}(\tau)\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}(\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}s}\cdot$$

$$\Psi(2^mt-n)\Psi(2^ks-j)2^{(m+k)/2}\mathrm{d}t\mathrm{d}s=$$

$$\boldsymbol{C}\iint_{R^2}\mathrm{e}^{\boldsymbol{F}t}\mathrm{e}^{\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}s}\Psi(2^mt-n)\Psi(2^ks-j)2^{(m+k)/2}\mathrm{d}t\mathrm{d}s,$$

其中常数 $\boldsymbol{C}=\int_0^{\infty}\boldsymbol{G}(\tau)\boldsymbol{Q}(\tau)\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}(\tau)\mathrm{d}\tau$。

设 t_0 固定，令 $t\to\infty$，则

$$\lim_{x_0\to\infty}\boldsymbol{E}[b_{mn}\cdot b_{kj}]=0$$

即在 $t\to\infty$时，b_{kn}相关程度为零。

设实函数 φ 是多尺度分析 $\{V_j\}\ j\in Z$ 的标准正交化生成元，则有

$$\varphi(t)=2^{1/2}\sum_{k\in z}h_k\varphi(2x-k)h_k\in L^2,$$
$$x\in R,\ k\in Z。$$

设　$\Psi(t)=2^{1/2}\sum\limits_{k\in z}(-1)^kh_{1-k}\varphi(2x-k)$，

对给定的 $J\in Z$，$\boldsymbol{X}(t)$的小波均方展式为

$$\boldsymbol{X}(t)=2^{J/2}\sum_{n\in Z}C_n^J\varphi(2^{-J}t-n)+$$

$$\sum_{j\leqslant J}2^{-j/2}\sum_{n\in Z}d_n^j\Psi(2^{-j}t-n),$$

其中　$C_n^j=2^{-j/2}\int_R\boldsymbol{X}(t)\varphi(2^{-j}t-n)\mathrm{d}t,$

$$d_n^j=2^{-j/2}\int_R\boldsymbol{X}(t)\Psi(2^{-j}t-n)\mathrm{d}t。$$

有$\boldsymbol{E}[d_n^j\cdot d_m^k]=2^{-(j+k)/2}\iint_{R^2}\boldsymbol{E}[\boldsymbol{X}(t)\cdot\boldsymbol{X}(t)]\cdot$

$$\Psi(2^{-j}t-n)\Psi(2^{-k}s-m)\mathrm{d}t\mathrm{d}s=$$

$$2^{-(j+k)/s}\iint_{R^2}\mathrm{e}^{\boldsymbol{F}(t-t_0)}\overline{\boldsymbol{P}}_0\mathrm{e}^{\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(s-t_0)}\cdot$$

$$\Psi(2^{-J}t-n)\Psi(2^{-k}s-m)\mathrm{d}t\mathrm{d}s+$$

$$\iint_{R^2}\left[\int_{t_0}^{\min(s,t)}\mathrm{e}^{\boldsymbol{F}(t-\tau)}\boldsymbol{G}(\tau)\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}(\tau)\mathrm{e}^{\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(s-\tau)}\mathrm{d}\tau\right]\cdot$$

$$\Psi(2^{-j}t-n)\Psi(2^{-k}s-m)\mathrm{d}t\mathrm{d}s。$$

现考虑 $\Psi(t)$具有紧支集 $[-K_1,\ K_2]$，K_1，$K_2\geqslant 0$，且存在充分大的 M，使

$$\int_R t^m\Psi(t)\mathrm{d}t=0,0\leqslant m\leqslant M-1,$$

从而 φ 具有紧支集 $[-K_3,\ K_4]$，满足 $K_1+K_2=K_3+K_4$，K_3，$K_4\geqslant 0$。

记 $b(j,\ k)=\langle X(t),\ \Psi_{jk}\rangle$，$a(j,\ k)=\langle x(t),\ \Psi_{jk}\rangle$，现固定 J，则

$$\{2^{J/2}\varphi(2^Jx-k),\ K\in Z\}\cup$$
$$\{2^{j/2}\Psi(2^jt-k),\ K\in Z\}_{j\geqslant J}$$

是 $L^2(R)$的一组标准正交基。因此，有

$$\boldsymbol{X}(t)=2^{J/2}\sum_{K\in Z}a(J,K)\varphi(2^Jt-k)+$$

$$\sum_{j\geqslant J}\sum_{K\in Z}2^{j/2}b(j,k)\Psi(2^Jt-k)。$$

随机过程 $b(j,\ m)$的相关函数为

$$R_{\mathrm{b}}(j,\ k;\ m,\ n)=\boldsymbol{E}[b(j,\ m)b(k;\ n)]=$$

$$2^{-(j+k)/2}\iint_{R^2}\boldsymbol{E}[\boldsymbol{X}(t)\cdot\boldsymbol{X}(t)]\cdot$$

$$\Psi(2^{-j}t-n)\Psi(2^{-k}s-n)\mathrm{d}t\mathrm{d}s=$$
$$2^{-(j+k)/2}\iint_{D^2}\boldsymbol{E}[\boldsymbol{X}(t)\cdot\boldsymbol{X}(t)]\cdot$$
$$\Psi(2^{-j}t-n)\Psi(2^{-k}s-n)\mathrm{d}t\mathrm{d}s,$$

其中 $D=[-K_1, K_2]$。

考虑展开式

$$\boldsymbol{X}(t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_{m,n}\Psi_{m,n}(t),$$

其中 $\Psi_{m,n}(t)=2^{m/2}\Psi(2^m t-n), a_{m,n}(t)=\int_R \boldsymbol{X}(u)\Psi_m(u-n/2^m)\mathrm{d}u$，其中 $\Psi_m(t)=2^{m/2}\cdot\Psi(2^m t)$，$\Psi$ 为母小波，有

$$a_{m,n}=2^{m/2}\int_R \boldsymbol{X}(u)2^m\Psi(u-n/2^m)\mathrm{d}u=$$
$$2^{m/2}\int_R \boldsymbol{X}(u)\Psi(2^m u-n)\mathrm{d}u,$$

从而 $\boldsymbol{E}[a_{m,n}]=2^{m/2}\int_R \mathrm{e}^{\boldsymbol{F}(u-t_0)}\bar{\boldsymbol{X}}_0\Psi(2^m u-n)\mathrm{d}u$。

如果 $\boldsymbol{X}(t)$为平稳过程，由式(3)知：

$$\boldsymbol{m}_x(t)=0,$$
$$\boldsymbol{P}_x(t)=\text{常数}=\boldsymbol{P}。$$

从而 $\boldsymbol{E}[a_{m,n}]=0$，

$$\boldsymbol{E}[a_{m,n}a_{j,k}]=2^{(m+j)/2}\iint_{R^2}\boldsymbol{P}\cdot$$
$$\Psi(2^m u-n)\Psi(2^j v-k)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=$$
$$\boldsymbol{P}2^{(m+j)/2}\iint_{R^2}\Psi(2^m u-n)\Psi(2^j v-k)\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

由此可得展开系数的相关程度。

对于时不变线性随机系统，如果其确定性部分渐近平稳，不管初始条件如何其最终状态过程是平稳的，从而其小波展开式系数也是平稳的。

5 结语

小波分析是 Fourier 分析发展史上里程碑式的进展，是众多学科共同关注的热点，它广泛应用于信号处理、图像处理、量子场论、地震勘探、语言识别与合成、音乐、雷达、CT 成像、彩色复印、流体湍流、天体识别、机器视觉、机械故障诊断与监控、分形以及数字电视等高科技领域。它被誉为数学显微镜，是工具和方法上的重大突破。近几年来，随机过程的小波分析已是国际上十分活跃的研究分支，由于现实中的诸多问题都带随机性，因此随机过程的小波分析具有更为重要的理论意义与应用价值，这一分支的研究将使随机过程小波分析理论更加深入和完善，同时为这些理论在诸如上述多方面的实际应用中提供新结果、新方法。笔者所研究的正是一类在工程中有重要应用背景的随机控制系统在小波变换器下的一些重要性质及其小波展开问题，在随机系统时频局部化问题中有重要的应用价值。

参考文献

[1] Cambanis S. Wavelet approximation of deterministic and random signals [J]. IEEE Tran on Information Theory, 1994, 40(4): 1013~1029

[2] Flandrin P. Wavelet analysis and aynthesis of fractional brownian motion [J]. IEEE Tran on Information Theory, 1992, 38(2): 910~916

[3] Krim H. Multiresolution analysis of a class of nonstationary processes [J]. IEEE, Tran on Information Theory, 1995, 41(4): 1010~1019

[4] Priestley M B. Wavelets and time - dependent spectral analysis [J]. J of Time Series Analysis, 1996, 17(1): 85~103

[5] Zhang J, Walter G G. A wavelet based K-L-Like expansion for wide-sense stationary processes [J]. IEEE Trans Sig, Proc, 1994, 38(2): 814~823

[6] Haobo R. Wavelet estimation for jumps in a heteroscedastic regressian model [J]. Acta Mathematica Scientia, SerB, 2002, 22(2): 269~276

[7] Arnold L. Stochastic Differential Epuation [M]. John Wiley & Sons Inc New York, 1974

[8] Wong E, Hajek B. Stochastic Processes in Engineering Systeme [M]. New York: Springs-Verlay, 1985

Wavelet Analysis of a Sort of Multidimension Stochastic System

Xia Xuewen

(*Hunan Institute of Engineering*, *Xiangtan*, *hunan* 411104, *China*)

[**Abstract**] In this paper, a linear stochastic systeme $\boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{X}_{t_0}+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{F}(\tau)\boldsymbol{X}(\tau)\mathrm{d}(\tau)+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{B}(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{G}(\tau)\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}(\tau)$ is studied, using wavelet analysis and its average power, density degree and wavelet expansion and corelation of expansion coefficient are obtained.

[**Key words**] stochastic system; density degree; wavelet expansion; average power; corelation