学术论文

广义近似空间与粗糙分类代数

刘永红

（武汉理工大学自动化学院计算技术研究所，武汉　430070）

[摘要]　提出了广义近似空间、粗近似公理、干扰集公理、粗糙集的分类原则、粗选原则、不确定偶集原则、精选原则、对策分类、量子逻辑分类、bit 量子对称分类、不可比集、bit 空间集、协议关系、粗糙集函数、粗糙分类代数和粗糙单代数等基本概念，并提出了一个猜想；展示了一些新观点；基于协议关系构造了粗糙商代数和粗糙子代数，给出了回避－归并算法及算例。

[关键词]　广义近似空间；粗糙集；粗糙分类代数；协议关系；粗糙单代数；粗糙商代数；粗糙子代数

[中图分类号]　TP18；O144　　[文献标识码]　A　　[文章编号]　1009－1742（2006）03－0039－10

1　引言

粗糙集理论[1~3]是近 10 年来国际上信息科学和计算机科学的一个研究热点[4~28]。近几年来，其中近似空间和粗糙代数结构引起了一些学者的关注。

近似空间中的分类问题是一个基本问题，又是一个重要的中心问题。分类虽然可以作广泛的理解，但它受到知识认知和行为原则的限制。波兰科学院院士，数学家 Pawlak 在研究近似空间时，基于二元等价关系，提出了粗糙集概念[1]。但 Pawlak 意义下的粗糙集分类方法存在概念基础上的局限性。

值得研究的问题是关于知识的理解及分类、信息系统的智能处理等问题，在一定意义下，都涉及一致性问题以及协议关系问题。更确切地说，是粗糙集与条件属性的关系、信息系统（或知识库）与基于协议关系的粗糙分类代数的关系、知识分类的协议性等问题；上近似集与下近似集的关系构成一种代数结构的问题。

笔者引进了广义近似空间概念，涉及量子逻辑分类、对策分类等；给出了有关的公理、原则，提出并证明了几个定理，还提出了一个猜想，引进了一种新的空间，展示了一些新观点，讨论了集合元素（或知识元）间存在一种特殊性质的关系，即代数的协议关系。实际上协议关系是代数结构的一种关系。笔者从选择公理和良序定理出发[29]，提出了协议分类代数、协议关系、粗糙单代数和协议关系粗糙函数等概念，刻画了协议关系的粗糙分类代数性质，构造了一个新代数，即粗糙商代数，提出了粗糙分类代数、粗糙子代数等概念，讨论了粗糙子代数的性质，给出了粗糙子代数的充要条件，提出了粗糙子代数的同态映射、二重性定理等。最后还提出了回避－归并算法，并给出了一个例子。

2　广义近似空间的基本理论

设 $|U| < \infty$，U 是论域，近似空间是偶对 (U, R)，其中 R 是 U 上的非空集合关系，称为 Pawlak 近似空间。对于 $X \subseteq U$ 定义 2 个子集：

上近似集：$A_u(X) = \{X \in U | R(X) \cap X \neq \emptyset\}$；

下近似集：$A_d(X) = \{X \in U | R(X) \subseteq X\}$。

定义 1　粗糙集 $R(X)$ 满足下列条件：

1) $A_u(X)$，$A_d(X) \neq \emptyset$；

2) $A_u(X) \cup A_d(X) \in R(X)$；

[收稿日期]　2004－12－21；修回日期　2005－05－09

[作者简介]　刘永红（1962－），男，湖北武汉市人，武汉理工大学副教授

3)若 $\alpha \in A_u(X)$, $\beta \in A_d(X)$,则 $\beta < \alpha$。

对于粗糙集偶对($A_u(X)$, $A_d(X)$),称为 $R(X)$ 的极限分类,$A_u(X)$称为这个极限分类上近似集,$A_d(X)$称为它的下近似集。

公理1(粗近似公理) 对 Pawlak 近似空间(U, R)中的 $A_u(X)$ 和 $A_d(X)$,下列4种情况,必有一种情况发生:

1)$A_u(X) > A_d(X)$;2)$A_u(X) = A_d(X)$;

3)$A_u(X) < A_d(X)$;4)$A_u(X) \parallel A_d(X)$。

其中"$\parallel$"表示不可比较关系。

原则1(粗糙集的分类原则) Pawlak 近似空间(U, R),对于定义1,存在粗糙集 $R(X)$,称为 $A_u(X)$ 与 $A_d(X)$ 的无序对集合,记为 $\{A_u(X), A_d(X)\}$;称为 $A_u(X)$ 与 $A_d(X)$ 有序对集合,记为 $\{A_u(X), \{A_u(X), A_d(X)\}\}$。

原则2(粗选原则) 对于 Pawlak 近似空间(U, R),有下列原则:

1)若选公理1中的 $A_u(X) = A_d(X)$,则记为 $\{A_u(X)\}$,即为近似对象 $A_u(X)$ 的单元粗糙集合,意味着含一个元素 $A_u(X)$,称 $R(X)$ 为退化了的不可测粗糙集。

2)若选公理1中的 $A_u(X) \parallel A_d(X)$,有

$$S(X) = \{A_u(X) \parallel A_d(X) \mid x \in A_u(X), A_d(X)\},$$

则称 $S(X)$ 为不可比较集或称互补集,意味着上近似集与下近似集之间存在平行的真实关系,即互补关系,用图1的格图表示。

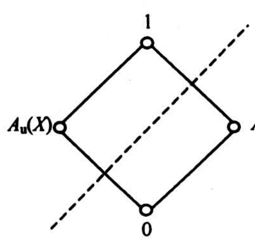

图1 格图

Fig.1 Lattice graph

规定:$0 \leqslant A_u(X) \leqslant 1$;$0 \leqslant A_d(X) \leqslant 1$,则子格 $\langle\{1, A_u(X), 0\}, \leqslant\rangle$ 和子格 $\langle\{1, A_d(X), 0\}, \leqslant\rangle$ 是 U 上的2个子格,图1中虚线表示 $A_u(X)$将 U 中的元素划分为2类。

为了表明不同概念在对策意义下的一致性,引入对策分类定义。

定义2 设($A_u(X)$, $A_d(X)$)是一个极限分类,记为 $R(X)$,若存在平衡偶对($\min A_u(X)$, $\max A_d(X)$)则称为对策分类,记为 $K(X)$。

定义3 粗糙集 $R(X)$ 的 bit 空间集记为 $R_{bit}(X)$,它的空间(U, R_{bit})由范数导出,即

$$\| R_{bit} \| = \sum_{k=1}^{n} \max_{x \in U} | \min A_u(X) - \max A_d(X) |。$$

所形成的 Banach 空间记为 $L^b(U, R, R_{bit})$。

定义4 ($A_u(X)$, $A_d(X)$, $S(X)$)称为广义近似空间 U 的量子逻辑分类,记为 $Q_U(X)$,其中 $S(X)$ 是基于半序关系的不确定集。

注1 Pawlak 粗糙集的上近似集与下近似集是一种特殊情况下的分类。近似空间中粗糙集格性质的量子分类[28]与此量子逻辑分类一起,成为广义近似空间一般的分类形式。

定义5 设 $A_u(X)$, $S(X)$是 U 上的2个等价关系。当$(a, b) \in S(X)$时,必有$(a, b) \in A_u(X)$,则称 $S(X)$ 确定的分类比 $A_u(X)$ 确定的分类精细。

定义6 ($A_u(X)$, $S(X)$)称为上投影分类,记为 $P_u(X)$;($A_d(X)$, $S(X)$)称为下投影分类,记为 $P_d(X)$。

公理2(干扰集公理) 广义近似空间(U, R, S)中,存在 U 上的半序关系干扰集,记为 $I(X)$,形如

$$I(X) = \{X \in U(S \mid X) \cap X \neq \varnothing\}。$$

对于定义3,下列3种情况,必有1种情况发生:

1) $R_{bit}(X) < I(X)$;

2) $R_{bit}(X) \cong I(X)$;

3) $R_{bit}(X) > I(X)$。

其中"$\cong$"表示同构关系。

原则3(不确定的偶集原则) 对于广义近似空间(U, R, S),存在着 $R_{bit}(X)$ 与 $I(X)$ 的不确定偶集,记为 $\Psi(X)$,即$\{R_{bit}(X), I(X)\}$,有

$$\Psi(X) = \{X \in U \mid I(X) \cap X \neq \varnothing\}。$$

原则4(精选原则) 对不确定干扰集 $I(X)$,有下列原则:

1)若选公理2中的 $R_{bit}(X) \cong I(X)$,则为定义3的 bit 空间集,或称 bit 量子集,记为$\{R_{bit}(X)\}$;

2)若选公理2中的 $R_{bit}(X) > I(X)$,则为广义近似空间的隐 bit 量子集,记为$\{R_{bit}^{-}(X)\}$;

3)若选公理2中的 $R_{bit}(X) < I(X)$,则为广义近似空间的显 bit 量子集,记为$\{R_{bit}^{+}(X)\}$。

定义7　对于广义近似空间的bit空间集合(U, R_{bit})，$x \in R_{bit}(X)$，$(R_{bit}^{-}(X), R_{bit}^{+}(X))$称为bit量子对称分类，记为$Y(X)$。

定义8　$(R_{bit}^{-}(X), R_{bit}^{+}(X), I(X))$称为广义近似空间的bit量子逻辑分类，记为$T_{bit}(X)$，其中$I(X)$是基于半序关系的干扰集。

关于广义近似空间理论的上近似集元素的数目临界问题，有下面定理：

定理1（临界定理）　若$A_{ui}(X) \cap A_{uj}(X) \neq \emptyset$，$A_{ui}(X) \cup A_{uj}(X) \neq A_u(X)$，$i \neq j$，$A_u(X) = \{A_{u1}(X), A_{u2}(X), \cdots, A_{us}(X)\}$，$1 \leqslant i, j \leqslant s$，则

$$s \leqslant C_{n-1}^{[n/2]-1}。$$

证明　设补集为$A'_u(X) = \{A'_{u1}(X), A'_{u2}(X), \cdots, A'_{us}(X)\}$，考虑$A_u(X)$。由于

$A_{ui}(X) \cap A_{uj}(X) \neq \emptyset$，于是

$A_{ui}(X) \not\subseteq A'_{uj}(X)$，且$A_{ui}(X) \not\supseteq A'_{uj}(X)$，得

$A_{ui}(X) \cap A'_{uj}(X) \neq \emptyset$；由于

$A_{ui}(X) \cup A_{uj}(X) \neq N$，$N = \{1, 2, \cdots, n\}$，于是

$A'_{ui}(X) \cap A'_{uj}(X) \neq \emptyset$。

$A_u(X)$是n元集N的子集，且$\{A_u(X), A'_u(X)\}$分为2个集，$A_u(X)$中的集元数均$\leqslant n/2$，并且当$|A_{ui}(X)| = n/2$时，$A_{ui}(X)$与$A'_{ui}(X)$仅有一个在$A_u(X)$中，$|A_{ui}(X)| \leqslant k \leqslant n/2$，$A_{ui}(X)$可用每两个互补的$k$元集代替，当$|A_{ui}(X)| = k$，有

$$A_{ui}(X) = A'_{ui}(X)。$$

显然，当$|A_{ui}(X)|$递增，$C_{n-1}^{|A_{ui}(X)|-1}$也会相应增强，即满足

$$\sum 1/C_{n-1}^{|A_{ui}(X)|-1} \leqslant 1, A_{ui}(X) \in A_u(X)。$$

其中$A_{ui}(X) \leqslant [n/2]$，于是有

$$C_{n-1}^{|A_{ui}(X)|-1} \leqslant C_{n-1}^{[n/2]-1}。$$

从而$A_u(X)$中的子集恰有s个，即得$s \leqslant C_{n-1}^{[n/2]-1}$。

注2　从定理1可以看出，广义近似空间的上近似集元素s的临界是可预测的。

定理2[28]　在近似空间中（Pawlak意义下的），不存在一般完全分类。（证明略）

定理3　对于广义近似空间，$R(X)$中的任何量子对称分类$N(X)$，都有$N(X) \subseteq Q_U(X)$成立。

证明　设$N(X)$是任何分类，当$x \in N(X)$，且$x \in R_{bit}(X)$，必有x的bit量子对称分类$Y(X)$，使

$$Y(X) \subseteq N(X) \subseteq R(X),$$

由于$x \in Q_U(X)$，$R(X) \subseteq Q_U(X)$，于是得$N(X) \subseteq Q_U(X)$。证毕。

定理4　对于广义近似空间(U, R, S)，$R(X)$成为$T_{bit}(X)$的充分必要条件：

$$A_u(X) < I(X) < A_d(X),\ x \in U。$$

证明　当$A_u(X) < I(X)$，由公理2和原理2，生成

$$\{A_u(X)\} \subseteqq \{R_{bit}^{+}(X), I(X)\};$$

同理，生成

$$\{A_d(X)\} \subseteqq \{R_{bit}^{-}(X), I(X)\}。$$

反之，若

$(A_u(X), A_d(X)) \subseteqq (R_{bit}^{+}(X), R_{bit}^{-}(X), I(X))$，

根据定理3，在bit量子逻辑意义下，则有

$$A_u(X) \subseteq I(X) \subseteq A_d(X))。$$

易推得$A_u(X) < I(X) < A_d(X)$成立。

猜想　设广义近似空间(U, R, S)，若存在干扰集$I(X)$，则有

$$S(X) = \bigcup_{k=1}^{n} I_k(X),$$

$I_k(X)$中两两互不可比，即$I_i(X) \parallel I_j(X)$，$i \neq j$。

新观点：

1）相信的程度与知识分类的原则无关；

2）知识是一种逻辑，如量子逻辑；

3）知识的所有近似描述组成的集，称为知识的广义近似空间。对知识的分类就是广义近似空间的一个子集；

4）知识的发现量可以用映射来表示。

3　粗糙分类代数概念

定义9　设粗糙分类代数是一个对生(opposite) $R = (B, S)$，其中B是一个非空粗糙集构成的集合族，$\forall A \in B$，称A是粗糙分类代数R的基集，$S \neq \emptyset$，$\forall s \in S$，

$$s: A_{i1} \times A_{i2} \times \cdots \times A_{in} \to A_i,$$

其中$A_{i1}, A_{i2}, \cdots, A_{in}, A_i \in B$，$n \in N$，称$S$是$B$上有限元运算的一个集合。

定理5　定义9中的S集可良序。

证明　由于每一个集合都是可以良序的[29]，这样，定理5显然也成立。

定理6　对于定义9中的集合S，S的基数$|\omega_s|$有意义，当且仅当定理5成立。

证明　1）基数$|\omega_s|$有意义，表明存在某个基

数 O,使 ω_s 与 O 等势,记为 $E_P(\omega_s, O)$,于是 $|\omega_s| = |O|$,设 S 集可良序,且存在保序双射 $f: S \to O$,于是存在 O 到 ω_s 的保序双射 $g: O \to \omega_s$,O 可良序,从而诱导了 ω_s 成为良序;

2) 若构造序数 ω_s 的良序成为良序集,在相同序结构的意义下,则可推导出与 ω_s 等势的最小序数 $|\omega_s|$。

注 3 定理 6 意味着,可用与基数等势的方式计算 ω_s 的元素个数。$R = (B, S)$ 中的 S 为良序,记作 $S = \{s_0, s_1, s_2, \cdots, s_i, \cdots\}, i < J$,其中 J 为一个序数。这样,S 与 J 建立了一个同构对应,从而建立 S 上的良序关系 $<_s$。

定义 10 设 $R = (B, S)$,若 s_i 是 n_i 元运算,则称 R 为 On 型,即

$$\mathrm{On} = (n_0, n_1, n_2, \cdots, n_i, \cdots), \ i < J。$$

称 J 为 On 型的阶。

注 4 对于定义 10, 在一定意义下, $n_i = 0$,S 是良定义的。

定义 11 设 $R = (B, S)$,其中零元运算的集合是 $k \subseteq B$,若 k 对 R 中所有运算封闭,则 (k, S) 是 R 的粗糙子代数,且称这个子代数和 R 自身是 R 的平凡粗糙子代数。

定义 12 设非零正整数集 N^+ 的子集 S,若 S 对 N^+ 的乘法运算封闭,则称 S 为 N^+ 的一个粗糙子代数。

4 协议关系

定义 13 设 $\mathbf{Z}$ 是整数集,N^+ 是非零正整数集,若对非零协议数 τ,使

$$\tau = \{\alpha\} \cap \{\beta\}, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbf{Z}, \forall \tau \in N^+。$$

则称 α 协议于 β,记作 $\alpha \approx \beta(\tau)$。

协议式 α 与 β 是协议关系,α 协议于 β 是由协议数 τ 诱导的结果。协议式为

$$\alpha \approx \beta(\tau), \ \mathrm{iff}\ \tau = \{\alpha\} \cap \{\beta\}。$$

定义 14 设 $\approx$ 是集合 B 上的一个二元关系,$\forall \alpha, \beta \in B$,$\tau$ 是协议数,若协议式满足

$$\alpha \approx \alpha(\tau), \text{ 自反性;}$$

若 $\alpha \leqslant \beta$ 且 $\beta \leqslant \alpha$, 则蕴含

$$\alpha \approx \beta(\tau), \text{ 反对称性。}$$

则称 $\approx$ 是 B 的一个协议关系。

注 5 与半序关系比较, 协议关系是更为普遍的二元关系。显然, 所有半序关系都是协议关系。因此, 协议概念是半序概念的一种推广。

定义 15 设 $\approx$ 是集合 B 上的一个二元关系,$\forall a, b, c \in B$,τ 是协议数, 若协议式满足

$$a \approx b(\tau), \ b \approx c(\tau), \ c \approx a(\tau),$$

则称 $\approx$ 是协议循环关系。

性质 1 (置换性) 设 $R = (B, S)$ 为 On 型, 若对任意的 $x <$ On, $S_x \in S$,且 $\alpha_i, \beta_i \in B$,ω_s 是 B 上的一个等价关系, 有

$$\alpha_i \approx \beta_i(\omega_s), \ 0 \leqslant i \leqslant n_x, \text{使}$$

$$s_x(\alpha_0, \cdots, \alpha_{n_x-1}) \approx s_x(\beta_0, \cdots, \beta_{n_x-1})(\omega_s),$$

$$\forall s_x(\alpha), \ s_x(\beta) \in S,$$

则称 ω_s 为 R 上的一个协议关系。

性质 2 (存在性) 对于任意的协议分类代数 R,若存在性质 1(置换性),则存在协议关系 $\approx$。

定义 16 设 $R = (B, S)$,若协议关系 $\approx$ 对 R 中所有的运算都符合性质 1 和性质 2,则称 $\approx$ 是 R 上的协议关系,且称 B 中关于 $\approx$ 的类为 R 上的协议类,记作 $[\alpha]$,其中 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in B$,称 α 为协议类 $[\alpha]$ 的代表元素。

定义 17 设 $R = (B, S)$,若 δ 是粗集 B 上的一个等价关系,且满足性质 1,则称 δ 为 R 上的一个协议关系。

对于定义 17,有下面 2 种情形:

情形 1 (δ_{I} 定义) 设 $R = (B, S)$,若二元关系 δ_{I} 是 B 上的一个等价关系,α 与 β 对 δ_{I} 的协议式定义为

$$\alpha \approx \beta(\delta_{\mathrm{I}}), \ \forall \alpha, \beta \in B。$$

如果满足性质 1,则称 δ_{I} 是 B 上的一个完备协议关系。

情形 2 (δ_{II} 定义) 设 $R = (B, S)$,若二元关系 δ_{II} 是 B 上的一个等价关系,α 与 β 对 δ_{II} 的协议式定义为

$$\alpha \approx \beta(\delta_{\mathrm{II}}), \ \mathrm{iff}\ \alpha = \beta, \ \forall \alpha, \beta \in B,$$

如果满足性质 1,则称 δ_{II} 是 B 上的一个等价协议关系。

定义 18 对 $R = (B, S)$ 上的所有协议关系构成的粗糙集,称为粗糙分类代数的协议关系粗糙集,记作 POR(R),且称 |POR(R)| 为 R 的协议基数。

注 6 对于情形 1 和情形 2, 若 $\delta_{\mathrm{I}}, \delta_{\mathrm{II}} \in$ POR (R),且 POR(R) $\neq 0$,可基于协议关系来定义一类比较简单的代数, 即定义 19。

定义 19 若 POR(R) $= \{\delta_{\mathrm{I}}, \delta_{\mathrm{II}}\}$,且满足自

同态映射 $\Psi: B \to B$，则称为粗糙单代数(rough simple algebra)，记作 $R_\delta = (B, S)$。

定义 20　广义近似空间上所有粗糙分类代数构成的类记作 PRC。

定义 21　设 $R = (B, S)$，如果在 B 上定义了若干关系，且这些关系构成了一个集合 G，则称为关系集 G 的一个代数，记作 $R_G = (B, S, G)$。

注 7　对于定义 21，R_G 是粗糙分类代数结构中的一种情形。

例 1　关系集 $G = \mathrm{POR}(R)$。

例 2　设 $R = (L_s, \vee, \wedge)$ 是一个任意的粗糙格[28]，其中 L_s 是一个非空半序关系粗集，令 $\forall \alpha, \beta \in L_s$，有

$$\alpha \leqslant \beta, \text{ iff } \alpha \vee \beta = \beta, \text{ iff } \alpha \wedge \beta = \alpha,$$

则"$\leqslant$"是定义 9 中 B 上的一个半序关系，R 是"$\leqslant$"的一个序代数 $R_{\leqslant} = (L_s, \vee, \wedge, \leqslant)$。

定义 22　设 CNC 表示 R 的基数的类，R 的基数函数

CNF: PRC→CNC，R→CNF (R)。

定义 23　一个协议关系粗集函数

PRF: PRC→CNC，R→|POR (R)|，

且称PRF(R) = |POR (R)|为 R 的协议粗糙集基数。

定理 7　若 $R \in$ PRC，则粗糙单代数 R_δ 有

PRF (R) = |POR(R)| = 1，2。(证明略)。

定理 8　设 ψ: $B \to C$ 是从 $R = (B, S)$ 到 $V = (C, S)$ 的一个同态映射，令 $\lambda \in \mathrm{POR}(V)$，$B$ 上有一个二元关系：

$$\xi_{\psi,\lambda}: \alpha \approx \beta(\xi_{\psi,\lambda}), \text{iff } \psi(\alpha) \approx \psi(\beta)(\lambda), \alpha, \beta \in B,$$

则 $\xi_{\psi,\lambda} \in$ POR (R)，称 $\xi_{\psi,\lambda}$ 是 λ 受 ψ 诱导的协议关系。

证明　显然，$\xi_{\psi,\lambda}$ 是一个等价关系，根据性质 1 和定义 17 可以证明定理 8 成立，(略)。

例 3　设 $\psi: B \to C$ 是从(B, S)到(C, S)的一个同态映射，运用情形 1(δ_{I} 定义)给出 δ_B 或 δ_C，则

$$\xi_{\Psi,\delta_C} = \delta_B。$$

证明　设 B 中的任意元素 α 和 α'，根据定理 8，有

$$\alpha \approx \alpha'(\xi_{\Psi,\delta_C}), \text{ iff } \psi(\alpha) \approx \psi(\alpha')(\delta_C),$$

又从 δ_C 定义知

$$\psi(\alpha) \approx \psi(\alpha')(\delta_C),$$

于是有

$$\alpha \approx \alpha'(\xi_{\Psi,\delta_C}), \alpha, \alpha' \in B,$$

故 $\xi_{\Psi,\delta_C} = \delta_B$。

定理 9　设 $\psi: B \to C$ 是从(B, S)到(C, S)的一个同态映射，$\varphi: C \to D$ 是从(C, S)到(D, S)中一个同态映射。若

$$d \in D(D), h_{\varphi,d} \in D(C), h_{\psi,h_{\varphi,d}} \in D(B),$$
$$h_{\varphi\cdot\psi,d} \in D(B),$$

则 $h_{\psi,h_{\varphi,d}} = h_{\varphi\cdot\psi,d}$。

证　设 $\alpha, \beta \in B$，根据性质 1，则有

$$\alpha \approx \beta(h_{\psi,h_{\varphi,d}}), \text{iff } \psi(\alpha) \approx \psi(\beta)(h_{\varphi,d}),$$
$$\text{iff } \varphi(\psi(\alpha)) \approx \varphi(\psi(\beta))(d),$$
$$\text{iff } (\varphi \circ \psi)(\alpha) \approx (\varphi \circ \psi)(\beta)(d),$$
$$\text{iff } \alpha \approx \beta(h_{\varphi\cdot\psi,d}),$$

从而得 $h_{\psi,h_{\varphi,d}} = h_{\varphi\cdot\psi,d}$。

定义 24　设≈是集合 A 的一个协议关系，令 $B \subseteq A$，任一 $\alpha_i \in B$，$i = 1, 2, \cdots, n$，若

$$\alpha_i \approx \alpha_1, \cdots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \cdots, \alpha_n(\tau), \text{且}$$
$$\beta_j \in A - B, j = 1, 2, \cdots, m, \text{有}$$
$$\beta_j \not\approx \alpha_1, \cdots, \alpha_n(\tau),$$

则称 B 为≈的一个最大协议类。

定义 25　若协议类个数有限，则 τ 的不同协议类的个数称为 τ 的秩，否则秩为无限。

定理 10　设 τ 是非空有限集合 A 上的协议关系，若 B 是一个协议类，则存在一个最大协议类 B_P，使 $B \subseteq B_P$。

证明　设 $A = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$，构造协议类的序列：

$$B_0 \subseteq B_1 \subseteq B_2 \subseteq \cdots,$$

使 $B_0 = B_1$，$B_{i+1} = B \cup \{\alpha_j\}$，且满足 $\alpha_j \notin B_i$，于是 α_j 与 B_j 中各元素有≈关系的最小下标，由于 $|A| = n$，从而至多经过 $n - |B|$ 步就会停止，且序列中的最后一个协议类为 B_P，证毕。

定理 11　设 τ 是非空集合 A 的协议关系，τ 的协议类集合 $\{[\alpha]_\tau | \alpha \in A\}$ 是 A 的一个分类。(证明略)

准则 1 (方向判定准则，方向判定定理)　若一个偶对集 P 协议于 2 个或 2 个以上偶对集的协议类，且满足定义 15，则舍去 P 的方向；否则，为所求的方向。(证明略)

准则 2 (极小化的协议图判别准则)　对于准则 1，舍去 P 的方向，删去弧 (或边)。(证明略)

不等式1（协议图不等式） 设协议图有 n 个结点，且结点的自回路定义为空回路 $\varnothing$，若有向弧（或边）数 k 满足

$$1 \leqslant k \leqslant n,$$

则称协议图为极小化的协议图。

定义26 设非空集合 A，若存在集合 Θ 满足

1) $\varnothing \notin \Theta$；

2) $(\forall x)(x \in \Theta \to x \subseteq A)$；

3) $\bigcup \Theta = A$。

则称 Θ 是 A 的一个协议覆盖，且称 Θ 中的元素是 Θ 的协议覆盖块。

定义27 对非空集合 A 上的协议关系，最大协议类的集合是 A 的一个协议覆盖 Θ，则称为 A 的完全协议覆盖，记作 $B_P(A)$。

定理12 对定义27，$B_P(A)$ 是惟一的。（证明略）

推论1 设非空有限集合 A，非空最大协议类 B_P，有 $B_P = \{A_1, \cdots, A_n\}$，若

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i,$$

则 B_P 是 A 的协议覆盖。(证明略)

注4 对推论1的反问，即构造 A 的协议覆盖，未必需要最大协议类。

5 协议关系定义的粗糙商代数

基于定义9来考虑一类特殊的粗糙代数——具有协议关系的粗糙商代数。

定义28 设粗糙分类代数 $(B, \cdot)$ 及其上的协议关系的粗糙商集上的运算“$*$”，对任一 $[B_1]_\tau$，$[B_2]_\tau \in R/\tau$，有

$$[B_1]_\tau * [B_2]_\tau = [B_1 \cdot B_2]_\tau。$$

其中，$B_1, B_2 \in B$，从而构成了一个新的代数 $(R/\tau, *)$，称为粗糙分类代数 $(B, \cdot)$ 的商代数。

定义29 设 $R = (B, S)$ 是一个粗糙商代数，由 R 生成的所有粗糙商代数集，记作 RQA(H)，即 $RQA(H) = \{R/\tau \mid \tau \in \mathrm{POR}(H)\}$。且称 $|\mathrm{RQA}(H)|$ 为 RQA(H) 的基数。

定义30 一个粗糙商代数集函数

$$\mathrm{RQF}: \mathrm{PRC} \to \mathrm{CNC},\ H \to |\mathrm{RQA}(H)|,$$

称 RQF(H) 为 H 的粗糙商代数集度数。

定理13 设 $R = (B, S)$，$\tau = \mathrm{POR}(R)$，令

$$B/\tau = \{[\alpha]_\tau \mid \alpha \in \beta\},$$

$$[\alpha]_\tau = \{\beta \in B \mid \beta \approx \alpha(\tau)\},$$

且 $s_x \in S$，令

$$s_x([\alpha_0]_\tau, \cdots, [\alpha_{n_x-1}]_\tau) = [s_x(\alpha_0, \cdots, \alpha_{n_x-1})]_\tau,$$

则 $R/\tau \approx (B/\tau, S)$ 称为 R 的一个粗糙商代数 H，且它是由 τ 生成的粗糙商代数。

证明 设 $\alpha_i \approx \beta_i(\tau)$，$\alpha_i, \beta_i \in B$，$0 \leqslant i \leqslant n_x$，由于 $\tau \in \mathrm{POR}(R)$，有

$$s_x(\alpha_0, \cdots, \alpha_{n_x-1}) \approx s_x(\beta_0, \cdots, \beta_{n_x-1})(\tau)。$$于是

$$s_x([\alpha_0]_\tau, \cdots, [\alpha_{n_x-1}]_\tau) = [s_x(\alpha_0, \cdots, \alpha_{n_x-1})]_\tau = [s_x(\beta_0, \cdots, \beta_{n_x-1})]_\tau = s_x([\beta_0]_\tau, \cdots, [\beta_{n_x-1}]_\tau)。$$

这样，保证 s_x 的每一个运算都受协议关系 τ 的诱导，从而 $H = R/\tau \approx (B/\tau, S)$。

定理14 设 $R = (B, S)$，若 $\tau \in \mathrm{POR}(R)$，令一个同态映射

$$\psi_\tau: B \to B/\tau,\ \alpha \to [\alpha]_\tau,$$

则 $\psi_\tau: (B, S) \to (B/\tau, S)$，$\alpha \to [\alpha]_\tau$。

证明 设 $\alpha_0, \cdots, \alpha_{n_x-1} \in B$，$s_x \in S$，于是有

$$\psi_\tau(s_x(\alpha_0, \cdots, \alpha_{n_x-1})) = [s_x(\alpha_0, \cdots, \alpha_{n_x-1})]_\tau = s_x([\alpha_0]_\tau, \cdots, [\alpha_{n_x-1}]_\tau) = s_x(\psi_\tau(\alpha_0), \cdots, \psi_\tau(\alpha_{n_x-1}))。$$

这样，保证 s_x 的每一个运算都受到协议关系的诱导，从而定理成立，证毕。

定理15 设 $H = (B/\tau, S)$，若 $\tau \in \mathrm{POR}(R)$，而 B 中有一个协议关系，记作 ξ_{Ψ_τ}。令

$$\psi_\tau: (B, S) \to (B/\tau, S),\ \alpha \to [\alpha]_\tau,$$

则 $\tau = \xi_{\Psi_\tau}$。

证明 设 B 中任意两个元素 α，α'，则有

$$\alpha \approx \alpha'(\tau),\ \text{iff}\ [\alpha]_\tau = [\alpha']_\tau,\ \text{iff}\ s_\tau(\alpha) = s_\tau(\alpha'),\ \text{iff}\ \alpha \approx \alpha'(\xi_{\Psi_\tau}),$$

从而 $\tau = \xi_{\Psi_\tau}$。

定理16 设 (B, S) 和 (C, S) 是2个粗糙分类代数，且 $\varphi: B \to C$ 是从 (B, S) 到 (C, S) 的一个同态映射，令

$\tau_\varphi: \alpha \approx \beta(\tau_\varphi)$，iff $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$，$\alpha, \beta \in B$，则 $\psi: (B/\tau_\varphi, S) \to (C, S)$，$[\alpha]_{\tau_\varphi} \to \varphi(\alpha)$，$\forall \alpha \in B$ 是同构映射。

证明 显然，ψ 是一一到上的映射。设 $s' \in S$，若 $n = 0$，s' 是0元运算，则 s' 是 B 中一个指定元素 α_0，于是 $\beta_0 = \varphi(\alpha_0)$ 也是 B 中一个指定0元运算 s'。

若 $n>0$，设 B/τ_φ 中任意 n 个元素是 $[\alpha_1]_{\tau_\varphi}$，$[\alpha_2]_{\tau_\varphi}$，…，$[\alpha_n]_{\tau_\varphi}$，则有

$$\psi(s'([\alpha_1]_{\tau_\varphi},\cdots,[\alpha_n]_{\tau_\varphi}))=$$
$$\varphi(s'([\alpha_1]_{\tau_\varphi},\cdots,[\alpha_n]_{\tau_\varphi}))=$$
$$s'(\varphi(\alpha_1),\cdots,\varphi(\alpha_n))=$$
$$s'(\psi([\alpha_1]_{\tau_\varphi}),\cdots,\psi([\alpha_n]_{\tau_\varphi}))。$$

故 ψ 是同构映射。

定理17　设 $\varphi: B\to C$ 是 (B,S) 到 (C,S) 上的同态映射，若 $\lambda\in \mathrm{POR}(C)$，则

$$\psi:(B/t_{\varphi,\lambda},S)\to(C/s,S),[\alpha]_{\tau_{\varphi,\lambda}}\to$$
$$[\varphi(\alpha)]_\lambda,\ \forall\alpha\in B。$$

证明　类似定理16的证明方法，(略)。

定义31　设 $H=(B/\tau,S)$，若 $B_1\subseteq B$，$\tau_1\in$ POR (B)，且有 $\mu: B_1/\tau_1\to B/\tau$，$[\alpha]_{\tau_1}\to[\alpha]_\tau$，则称 μ 是一个单射同态映射。

定理18　设 $R=(B,S)$，若 $H=(B/\tau,S)$，且 $\tau\in$ POR (R)，则

$$\mathrm{PRF}(R/\tau)\leqslant\mathrm{PRF}(R)。$$

证明　若 $\tau_1\in$ POR (R/τ)，令 τ_1 诱导 R 上的一个协议关系 $\varepsilon_1:\alpha\approx\alpha'(\varepsilon_1)$，iff $[\alpha]_\tau\approx[\alpha']_\tau(\tau_1)$，则 $\tau\subseteq\varepsilon_1$，且 $\varepsilon_1\in\mathrm{POR}(R)$。

若 τ_1，$\tau_2\in$ POR (R/τ)，且 $\tau_1\neq\tau_2$，设 $([\alpha]_\tau,[\alpha']_\tau)\in\tau_1$，且 $([\alpha]_\tau,[\alpha']_\tau)\notin\tau_2$，于是 $\alpha\neq\alpha'$ (ε_2)，则 $\varepsilon_1\neq\varepsilon_2$，于是有一个单射同态映射

$$\mu:\mathrm{POR}\ (R/\tau)\to\mathrm{POR}\ (R),\ \tau_1\to\varepsilon_1。于是$$
$$|\mathrm{POR}(R/\tau)|\leqslant|\mathrm{POR}(R)|。$$

由定义23知

$$\mathrm{PRF}(R)=|\mathrm{POR}(R)|,$$
$$\mathrm{PRF}(R/\tau)=|\mathrm{POR}(R/\tau)|,$$

从而得 $\mathrm{PRF}(R/\tau)\leqslant\mathrm{PRF}(R)$。

推论2　$\mathrm{RQF}(H)\leqslant\mathrm{PRF}(H)$。(证明略)

定理19　协议关系上的粗糙商代数的运算结果，具有分类意义。

证明　由性质1、性质2、定义16和定义28可知，(略)。

这种用协议关系刻画粗糙商代数，事实上是协议关系在粗糙分类代数上的一个重要应用。

6　协议关系定义的粗糙子代数

定义32　设上近似粗代数 $U=(A_u(X),S)$，$U\in$ PRC，下近似粗代数 $D=(A_d(X),S)$，若

$$A_d(X)\subseteq A_u(X)，且\ A_d(X)\neq\varnothing,$$

则称 $A_d(X)$ 是 U 的一个粗糙子代数，或称 $A_d(X)$ 是 $A_u(X)$ 的一个粗糙子代数。

定理20　设 $U=(A_u(X),S)\in$ PRC，$A_d(X)\neq\varnothing$，且 $A_d(X)\subseteq A_u(X)$，$s\in S$，则 $A_d(X)$ 是 $A_u(X)$ 的一个粗糙子代数的充要条件是，$A_d(X)$ 对 U 中的 $s=\{*\}$ 是封闭的。(证明略)

定理21　设 $U=(A_u(X),S)$，$D=(A_d(X),S)$，其中 $A_d(X)$ 是 U 的一个粗糙子代数，若 $A_u(X)$ 上一个等价关系 $\delta\in$ POR(U)，令 $A_d(X)$ 上的一个协议关系 ω，使

$$\omega:\ \alpha_1\approx\alpha_2(\omega),\ \mathrm{iff}\ \alpha_1\approx\alpha_2(\delta),$$
$$\alpha_1,\alpha_2\in A_d(X),$$

则 $\omega\in$ POR (D)。

证明　对 $A_d(X)$，满足性质1，(略)。

定义33　对于 $U=(A_u(X),S)$，且 $A_d(X)\subseteq A_u(X)$，由 $A_u(X)$ 的每一子集构成的集称为幂集，记作 POW$(A_u(X))$。

定义34　对于 $U=(A_u(X),S)$，由 U 生成的所有粗糙子代数集，记作 RSS(U)，形如

$$\mathrm{RSS}(U)=\{A_d(X)\mid A_d(X)\in\mathrm{POW}(A_u(X))\},$$

且称 $|\mathrm{RSS}(U)|$ 为 RSS (U) 的基数。

原则5　(非空原则)　$\mathrm{RSS}(U)\neq\varnothing$。

定理22　设 $\varnothing\neq U\in R$，则 $\mathrm{RSS}(U)\subseteq$ POW $(A_u(X))$。(证明略)

定义35　一个粗糙子代数集函数

$$\mathrm{RSF}:\mathrm{PRC}\to\mathrm{CNC},\ U\to|\mathrm{RSS}(U)|,$$

且 RSF(U) 称为 U 的粗糙子代数集度数。

引理1　设 $U=(A_u(X),S)\in$ PRC，使

$$\mathrm{RSF}(U)=2^{\mathrm{RSS}(U)}。$$

证明　设 $N=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}_{n<J}$，其中 J 为一个序数，且 $S=\{*\}$，若 $m*n=0$，$\forall m,n\in N$，对任意一个 $A_d(X)\subseteq N^+=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}_{n<J}$，由于

$$A_d(X)\cup\{0\}\in\mathrm{RSS}(U)，于是$$
$$|\mathrm{RSS}(U)|=|2^N|=2^{\mathrm{RSS}(U)}，由于$$
$$\mathrm{RSF}(U)=|\mathrm{RSS}(U)|,$$

故 $\mathrm{RSF}(U)=2^{\mathrm{RSS}(U)}$。

定理23　设 $U\in$ PRC，使

$$0<\mathrm{RSF}\ (U)\leqslant 2^{\mathrm{RSS}(U)}。$$

证明 由原则5,定理22和引理1可知,(略)。

对于 R,有下列3种情形:

情形3(R_c定义) 设 $R=(B, S)$,若任何一个非空粗糙子集和它们的运算作成 R 的粗糙子代数,则称 R 为紧粗糙子代数(compact rough subalgebra),记作 R_c。

情形4(R_i定义) 设 $R=(B, S)$, $A_u(X)$, $A_d(X)\in R$,若 $A_u(X)=A_d(X)$,或 $A_d(X)=\{r\}$(表示单元素集),则称($A_d(X)$, S)为 R 的同一粗糙子代数(rough subalgebra of identity),记作 R_i。

情形5(R_{ci}定义) 设 $R=(B, S)$,若 R_c 都是 R_i,则 R 称为紧同一粗糙子代数(rough subalgebra of compact identity),记为 R_{ci}。

定义36 设 $R=(B, S)\in \mathrm{PRC}$, $\varnothing\neq E\subseteq B$,若 E 生成一个粗糙子代数 I_E,且 $E\subseteq I_E$,称 I_E 是 R 包含 E 的最小粗糙子代数,记作 $\min(I_E)$。若 $I_E=\{i\}$, $i\in B$,则 $\min(\{i\})=\min(i)$。

定义37 一个粗糙子代数的基数函数SBF SBF: $\mathrm{PRC}\to\mathrm{CNC}$, $R\to\inf\{|D||D\in\mathrm{RSS}(U)\}$,且 $\mathrm{SBF}(U)$ 称为 U 的粗糙子代数下确界度数。

定理24 设 $U=(A_u(X), S)\in\mathrm{SBF}$,则有

$$\mathrm{SBF}(U)=\inf\{|\min(I_E)|\varnothing\neq I_E\subseteq A_u(X)\}=\inf\{|\min(i)||i\in A_u(X)\}。$$

证明 设 n, m 是2个粗糙子代数的下确界度数,若令

$$n=\inf\{|\min(I_E)||\varnothing\neq I_E\subseteq A_u(X)\},$$

$$m=\inf\{|\min(i)||i\in A_u(X)\},$$ 则有

$$\{|\min(i)||i\in A_u(X)\}\subseteq \inf\{|\min(I_E)||\varnothing\neq I_E\subseteq A_u(X)\}\subseteq\mathrm{RSS}(U),$$ 于是

$$\mathrm{SBF}(U)\leqslant n\leqslant m。$$

再设 C 是 U 的任一粗糙子代数,若 $C\neq\varnothing$,于是 $i\in C$,从而 $\{i\}\subseteq C$,因 C 是包含 $\{i\}$ 的一个粗糙子代数,则有 $\min(I_E)\subseteq C$,于是

$$|\min(i)|\leqslant|C|,$$ 由于

$$m=\inf\{|\min(j)||j\in A_u(X)\},$$ 且

$$m\leqslant|\min(i)|\leqslant|C|,$$

从而 $m\leqslant\mathrm{SBF}(U)$。

综上,得到 $n=m=\mathrm{SBF}(U)$。

定理25 设 $U=(A_u(X), S)$, $D=(A_d(X), S)$, D 到 U 的同态映射 θ

$$\theta: A_u(X)\to A_d(X),$$

则有下列性质:

1) 设 A 是 D 的一个粗糙子代数,则 $\theta(A)$ 是 U 的一个粗糙子代数,且 $\theta(A_d(X))$ 是 U 的一个粗糙子代数;

2) 设 $C\subseteq\theta(A_d(X))\subseteq A_u(X)$,若 C 是 U 的一个粗糙子代数,则 $\theta^{-1}(C)$ 是 D 的一个粗糙子代数。若 θ 是满射, $A_u(X)=\theta(A_d(X))$,则 U 的任一粗糙子代数的原像是 D 的一个粗糙子代数。

证明 1) 由于 $\varnothing\neq\theta(A_d(X))\subseteq A_u(X)$,只证 $\theta(A_d(X))$ 对 U 中所有的运算是封闭的。

若 U 中存在零元运算 μ^-,则 D 中存在对应的零元运算 μ,且 $\theta(\mu)=\mu^-$,从而有 $\mu^-\in\theta(A_d(X))$,再考虑 U 中的非零元运算 $s\in S$,对于 $\theta(A_d(X))$ 中的任意 k 个元素 β_1, …, β_k,存在

$$\alpha_1,\cdots,\alpha_k\in A_d(X),\text{ 使}$$

$$\theta(\alpha_j)=\beta_j,\ j=1,\cdots,k。\text{于是}$$

$$s(\beta_1,\cdots,\beta_k)=s(\theta(\alpha_1),\cdots,\theta(\alpha_k))=\theta(s(\alpha_1,\cdots,\alpha_k))\in\theta(A_d(X))。$$

2) 仅考察 s。

对于 C 中的任意 k 个元素 β_1, …, β_k,存在 α_1, …, α_k 是 $\theta^{-1}(C)$ 中的任意 k 个元素,使 $\theta(\alpha_j)=\beta_j$, $j=1$, …, k,从而 C 是 U 的一个粗糙子代数有

$$\theta(s(\alpha_1,\cdots,\alpha_k))=s(\theta(\alpha_1),\cdots,\theta(\alpha_k))=s(\beta_1,\cdots,\beta_k)\in C,$$

于是 $s(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)\in\theta^{-1}(C)$,从而 $\theta^{-1}(C)$ 是 D 的一个粗糙子代数。

定理26(二重性定理,不一定定理) 设 $U=A_u(X, S)$,则 $\mathrm{RSS}(U)$ 在 $\subseteq$ 下不一定存在最小粗糙子代数。

证明 1) 先承认选择定理[29],再由半序关系粗糙集知[28],必含有极大理想元,但不一定存在最小理想元。这里,称 U 为不具有最小粗糙子代数的代数,且记为作NMA。

2) 在定义36有意义下,由于 $A_d(X)\subseteq B$,则称 U 具有最小粗糙子代数的代数,且记作YMA。

3) 由原则5知, $\mathrm{RSS}(U)\neq\varnothing$,则 $\mathrm{NMA},\mathrm{YMA}\neq\varnothing$。

综上所述,定理26具有二重性。

7 算法和应用

算法1(回避-归并算法)

$$//\ \boxed{\text{有向关系图}}\xrightarrow{\text{符号化}}\boxed{\text{协议关系矩阵}}\ //$$

// 矩阵中的 W 表示三个方面：1) 回避自反；2) 反对称的一种不可能的状态；3) 舍去的协议偶对。//

// 矩阵中的 $x^{\leftarrow}$, $x^{\rightarrow}$ 表示待定方向的偶对。若定出了方向，则 $x^{\leftarrow}$ 或 $x^{\rightarrow}$ 置换为 1。//

Step 1　扫描协议关系矩阵的最上一行，且从左开始，向右进行扫描：

1.1）若发现 W，则扫描向右移；

1.2）若发现 $x^{\leftarrow}$，$x^{\rightarrow}$，则根据准则 1 求出方向，并在协议矩阵中置换为 1，且标记相应的协议偶对集；

1.3）若发现 1，则标记相应的协议偶对集；

1.4）若发现偶对集组成的集合中有重复的元素，则等价为自身的一个元素；

1.5）将这些集合归并到协议类中。

Step 2　扫描移向下一行，且从左开始，向右进行扫描：

2.1）重复 Step 1 中的 1.1，1.2，1.3；

2.2）与 Step 1 的协议类进行比对，若发现重复的元素，则删去；

2.3）将这些新的集合归并到协议类中，于是得到了一个扩充的协议类。

Step 3　重复 Step 2，直到扫描完矩阵的第 n 行第 n 列的元素为止。

Step 4　从协议矩阵的第 n 行开始，向上扫描，若发现仅有一个 W，其他元素全为 0，它是一个孤立结点，则扩充到协议类中。

Step 5　将上述得到的协议类及孤立元素合起来，从而得到了最大协议类。

注 7　协议矩阵中的符号 $x^{\leftarrow}$，$x^{\rightarrow}$ 表示待定偶对集，它对应协议关系图上弧的方向，由反对称性知，$x^{\leftarrow}$ 和 $x^{\rightarrow}$ 两者必居其一，即 W 或 1。

例 4　一个协议关系有向图如图 2 所示。

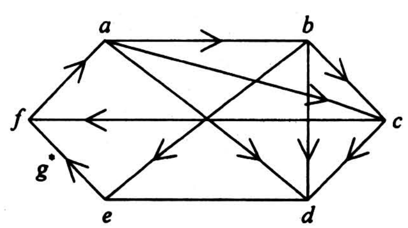

图 2　协议关系有向图

Fig.2　Protocol relation digraphs

协议关系矩阵为

$$\begin{array}{c|ccccccc}
a & W & 1 & 1 & 1 & 0 & W & 0 \\
b & W & W & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
c & W & W & W & 1 & 0 & 1 & 0 \\
d & W & W & W & W & x^{\leftarrow} & 0 & 0 \\
e & 0 & W & 0 & x^{\rightarrow} & W & 1 & 0 \\
f & 1 & 0 & W & 0 & W & W & 0 \\
g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W \\
\hline
 & a & b & c & d & e & f & g
\end{array}$$

1）判断协议矩阵中 $x^{\leftarrow}$，$x^{\rightarrow}$，并求最大协议类；

2）找出极小化的协议图；

3）求协议关系矩阵的秩。

解：

1）根据算法 1（回避－归并算法），运算结果：

$\{a, b, c, d\}$；

$\{a, b, c, d\}$，$\{b, e\}$；

$\{a, b, c, d\}$，$\{b, e\}$，$\{c, f\}$；

$\{a, b, c, d\}$，$\{b, e\}$，$\{c, f\}$，$x^{\leftarrow} \Rightarrow 1$，$\{d, e\}$；

$\{a, b, c, d\}$，$\{b, e\}$，$\{c, f\}$，$\{d, e\}$，$x^{\rightarrow} \Rightarrow W$，$\{e, f\}$；

$\{a, b, c, d\}$，$\{b, e\}$，$\{c, f\}$，$\{d, e\}$，$\{e, f\}$，$\{f, a\}$；

$\{a, b, c, d\}$，$\{b, e\}$，$\{c, f\}$，$\{d, e\}$，$\{e, f\}$，$\{f, a\}$，$\{g\}$

为最大协议集。

2）根据协议图不等式和准则 2，易得极小化的协议图，（略）。

3）根据协议类，协议关系矩阵的秩为 7。

参考文献

[1] Pawlak Z. Rough sets [J]. Inter J Computer and Inform Sci, 1982, 11(5): 341～356

[2] Pawlak Z. Rough clussificution [J]. Int J Man-machine Studies, 1984, 20: 469～483

[3] Pawlak Z. Learning from example [J]. Bull Pol Acad Sci (Tech Sci), 1986, 34(9,10): 573～586

[4] Pomykala J A. Approximation operations in approximation space [J]. Bulletin of the Polish Academy of Science, 1987, 35(9,10): 653～662

[5] Showinski R, Stefanowski J. Rough classification in incomplete information systems [J]. Math Computing Modelling, 1989, 12(10,11): 1347～1357

[6] Ziarko W. Variable precision rough set model [J]. J Computer and System Sciences, 1993, 46(1): 39～59

[7] Pawlak Z, Busse J G, Slowinski R, Ziarko W. Rough sets [J]. Communication of the ACM, 1995, 38(11): 89 ~ 95
[8] Kuroki N. Rough ideals in semigroups [J]. J of Inform Sci, 1997, 100: 139 ~ 163
[9] Bonikowski Z, Bryniarsiki E, Mybraniec S U. Extensions and intentions in the rough set theory [J]. J of Inform Sci, 1998, 107: 149 ~ 167
[10] Lingras P J, Yao Y Y. Data mining using estensions of the rough set models [J]. J of the Amer Soc for Inform Sci, 1998, 49(5): 415 ~ 422
[11] Yao Y Y. Relational interpretation of neighborhood operators and rough set approximation operators [J]. J of Infom Sci, 1998, 111: 239 ~ 359
[12] Yao Y Y, Lingras P J. Interpretations of belief function in the theory of rough sets [J]. J of Infrom Sci, 1998, (104): 81 ~ 106
[13] 王 珏，王 任，苗夺谦，等．基于 Rough Set 理论的“数据浓缩”[J]．计算机学报，1998，21(5)：393 ~ 400
[14] 刘 清．算子 Rough 逻辑及其归结原理[J]．计算机学报，1998，21(5)：476 ~ 480
[15] 刘文奇．Pawlak 代数及其性质[J]．模糊系统与数学，1999，13(2)：139 ~ 163
[16] 苗夺谦，王 钰．粗糙集理论中概念与运算的信息表示[J]．软件学报，1999，10(2)：113 ~ 116
[17] 祝 峰，何华灿．粗集的公理化[J]．计算机学报，2000，23(3)；330 ~ 333
[18] Showinski R, Vanderpooten D. A generalized definition of rough approximations based on similarity [J]. IEEE Trans on Data and Knowledge Engineering, 2000, 12(2): 331 ~ 336
[19] Quafatou M. A-RST: a generalization of rough set theory [J]. J of Inform Sci, 2000, 124: 301 ~ 316
[20] 苗夺谦．Rough Set 理论中连续属性的离散化方法[J]．自动化学报，2001，27(3)：296 ~ 302
[21] 苏 健，高 济．基于元信息的粗糙集规则增式生成方法[J]．模式识别与人工智能，2001，14(4)：428 ~ 433
[22] 张文修，吴伟志，梁吉业，等．粗糙集理论与方法[M]．北京：科学出版社，2001
[23] 陈德刚，张文修．粗糙集和拓朴空间[J]．西安交通大学学报，2001，35(12)：1313 ~ 1315
[24] 王国胤．Rough 集理论与知识获取[M]．西安：西安交通大学出版社，2001
[25] 刘文奇，吴从幾．相似关系粗集理论与相似关系信息系统[J]．模糊系统与数学，2002，16(3)：50 ~ 58
[26] 祝 峰，王飞跃．关于覆盖广义粗集的一些基本结果[J]．模式识别与人工智能，2002，15(1)：6 ~ 13
[27] 米据生，吴伟志，张文修．粗糙集的构造与公理化方法[J]．模式识别与人工智能，2002，15(3)：280 ~ 284
[28] 刘永红，粗糙集的格刻画[J]．模式识别与人工智能，2003，16(2)：174 ~ 177
[29] 张锦文．公理集合论导引[M]．北京：科学出版社，1999

Approximation Space of Generalization and Rough Classification Algebra

Liu Yonghong
(*Institute of Automation*, *Wuhan University of Technology*, *Wuhan* 430070, *China*)

[**Abstract**] Some new basic concepts are proposed in this paper, including the approximation space of generalization, rough approximation axiom, disturbance set axiom, classification principle of rough set, principle of nondeterministic even set, principle of concentration, game classification, quantum logic classification, bit quantum symmetric classification, incomparable set, bit space set, protocol relation, rough set function of protocol relation, rough classification algebra, rough simple algebra, etc., and a guess is also proposed. The mathematics viewpoints of knowledge are shown. Based on the protocol relation, the rough quotient algebra and the rough subalgebra are constructed. The avoidance-merge algorithm (A – M algorithm) is presented and an example is given.

[**Key words**] approximation space of generalization; rough set; rough classification algebra; protocol relation; rough simple algebra; rough quotient algebra; rough subalgebra