

基于频域的PID广义预测控制器的鲁棒性分析

王繁珍, 陈增强, 姚向峰, 袁著社

(南开大学自动化系, 天津 300071)

[摘要] 推导了PID广义预测控制器(PID-GPC)的闭环反馈结构,采用小增益定理获得了存在建模误差(MPM)情况下PID-GPC鲁棒稳定的一个充分条件。然后在频域内分析了PID-GPC控制器的参数选择对其鲁棒性的影响。

[关键词] 预测控制;鲁棒性;频域;小增益定理;PID控制

[中图分类号] TP273 **[文献标识码]** A **[文章编号]** 1009-1742(2006)10-0066-05

1 引言

广义预测控制器(GPC)^[1]自出现以来,在理论和应用上均获得了很快的发展,出现了多种新的算法,并且在工业和航空航天等领域获得了很多成功的应用^[2-4],得到了控制工程界的高度重视。GPC之所以能够成功地应用在实际工程中,是由于它是一种基于模型进行多步预测,并滚动实施优化的先进控制策略。这种建立在实际反馈信息基础上的反复优化,对建模误差和环境干扰等不确定性具有很强的适应能力。

GPC的设计通常基于一个较低阶的线性近似模型,而复杂的工业过程或航天航空过程,在模型阶次、非线性性、未知环境扰动等方面存在较大的不确定性,因而研究GPC的鲁棒性程度,探讨GPC的参数设计对其鲁棒性的影响具有重要的理论意义与实际应用价值。但是对GPC的鲁棒性分析难度较大,主要是由于GPC是以大范围预测为基础的在线滚动优化策略,使得其闭环传递函数较为复杂,主要设计参数蕴含在闭环传递函数中,难以推导出设计参数和闭环特性之间的定量关系。陈增强等^[5]建立了GPC闭环系统的扩展状态空间方程,

然后对其鲁棒性进行了定量分析,给出了保证系统BIBO稳定的未建模误差的一个允许上界。Robinson和Clark^[6]分析了滤波多项式对GPC鲁棒性的影响。孙明玮^[7]等在IMC框架下分析了闭环系统鲁棒性的根源,并利用儒歇定理给出了闭环鲁棒稳定的一个上界的估计值。这些理论结果定量地分析了GPC的鲁棒性程度。但是要获得GPC参数鲁棒设计的实用性方法,仍需要另辟蹊径。为此,毛宗星等^[8]提出了基于频域的GPC稳定性分析与设计方法。由于频域理论的稳定性分析与设计具有丰富的内容,且闭环系统的频域特性能更深刻地反映系统的本质性能,通过频域的分析方法(如乃奎斯特图、伯德图、根轨迹图等)对预测控制的闭环系统进行分析,并观察设计参数变化对性能的影响,可有效地指导控制器的设计。

然而,传统的由反馈系统的偏差的比例(P)、积分(I)、和微分(D)的线性组合构成的反馈控制律——PID控制,由于具有原理简单,直观易懂,易于工程实现,鲁棒性强,适用面广等一系列优点,仍一直是工业过程控制中应用最广泛的一类基本控制律。为了应用这两种控制方法的长处,把PID控制和GPC控制结合起来,可形成一种新的预

[收稿日期] 2005-09-12; **[修回日期]** 2006-01-17

[基金项目] 国家自然科学基金资助项目(60374037, 60574036); 高校博士学科点专项基金项目(20050055013), 教育部新世纪优秀人才支持计划(2005-290)

[作者简介] 王繁珍(1968-), 男, 河北安国市人, 工学博士, 南开大学副教授

测控制方法 (PID-GPC)。这个方法采用了比例积分加微分的新的目标函数, 因此推导的控制器具有一种广义的“比例+积分+微分”的结构。

首先推导了 PID-GPC 控制下的闭环反馈结构, 并获得了闭环鲁棒稳定的一个充分条件, 然后采用频域的幅频分析的方法, 分析了 PID-GPC 控制器的设计参数选择对系统鲁棒性的影响。因而能够有效地指导 PID-GPC 的参数设计, 对这种新型控制方法的工程应用具有重要意义。

2 PID 广义预测控制器 (PID-GPC)

用离散时间差分方程模型

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t-1) + C(q^{-1})\xi(t)/\Delta \quad (1)$$

描述一个单输入单输出的过程, 其中

$$\begin{aligned} A(q^{-1}) &= 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_n q^{-n}, \\ B(q^{-1}) &= b_0 + b_1 q^{-1} + \dots + b_n q^{-n}, \\ C(q^{-1}) &= 1 + c_1 q^{-1} + \dots + c_n q^{-n}, \\ \Delta &= 1 - q^{-1}, \end{aligned}$$

$y(t)$ 和 $u(t)$ 分别表示系统的输出和输入, q^{-1} 为后移算子, $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ 和 $\{c_i\}$ 分别为 A , B 和 C 3 个多项式的系数, n_a , n_b 和 n_c 为对应的阶次。

PID-GPC 目标函数如下:

$$J = \sum_{j=1}^N \{K_i [e(t+j)]^2 + K_p [\Delta e(t+j)]^2 + K_d [\Delta^2 e(t+j)]^2\} + \lambda \sum_{j=1}^{N_u} [\Delta u(t+j)]^2 \quad (2)$$

$$e(t) = \Delta e(t) = 0,$$

$$e(t+j) = w(t+j) - \hat{y}(t+j) \quad (3)$$

其中 N 为预测前位。 N_u 为控制前位。 $\lambda > 0$ 为控制加权因子。 K_p , K_i , K_d 分别为比例项系数、积分项系数和微分项系数。 $\hat{y}(t+j)$ 为 $y(t)$ 的向前 j 步预测。 $w(t+j)$ 为给定的设定值柔化序列, 由

$$w(t) = y_r(t),$$

$$w(t+j) = \alpha w(t+j-1) + (1-\alpha)y_r(t), \quad j=1, \dots, N \quad (4)$$

产生, 其中 $y_r(t)$ 为 t 时刻的设定值, $\alpha (0 \leq \alpha < 1)$ 为柔化因子。

$j=1, 2, \dots, N$ 为获得系统输出的向前 j 步最优预测, 解两组丢番图方程:

$$C = E_j A \Delta + q^{-1} F \quad (5)$$

$$E_j B = G_j C + q^{-1} H_j \quad (6)$$

其中 E_j , F_j , G_j , H_j 为关于 q^{-1} 的多项式, 阶次分别为 $j-1$, n_a , n_b-1 。

由式 (1)、式 (5) 和式 (6) 可得

$$y(t+j) = F_j y'(t) + H_j \Delta u'(t-1) + G_j \Delta u(t+j-1) + E_j \xi(t+j) \quad (7)$$

其中

$$y'(t) = y(t)/C(q^{-1}),$$

$$u'(t-1) = u(t-1)/C(q^{-1}).$$

最优预测 $\hat{y}(t+j)$ 为

$$\hat{y}(t+j) = F_j y'(t) + H_j \Delta u'(t-1) + G_j \Delta u(t+j-1) \quad (8)$$

定义

$$f(t+j) = F_j y'(t) + H_j \Delta u'(t-1) \quad (9)$$

则

$$\hat{y}(t+j) = f(t+j) + G_j \Delta u(t+j-1) \quad (10)$$

令

$$e(t+j) = [w(t+j) - f(t+j)] - G_j \Delta u(t+j-1), \quad j=1, 2, \dots, N \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \Delta e(t+j) &= [\Delta w(t+j) - \Delta f(t+j)] - [G_j \Delta u(t+j-1) - G_{j-1} \Delta u(t+j-2)], \\ & \quad j=2, \dots, N \quad (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta^2 e(t+j) &= [\Delta^2 w(t+j) - \Delta^2 f(t+j)] - [G_j \Delta u(t+j-1) - 2G_{j-1} \Delta u(t+j-2) + G_{j-2} \Delta u(t+j-3)], \\ & \quad j=3, \dots, N \quad (13) \end{aligned}$$

为了推导方便, 引入向量和矩阵:

$$w = [w(t+1), \dots, w(t+N)]^T,$$

$$\Delta w = [w(t+1), \Delta w(t+2), \dots, \Delta w(t+N)]^T,$$

$$\Delta^2 w = [w(t+1), \Delta w(t+2) - w(t+1), \Delta^2 w(t+3), \dots, \Delta^2 w(t+N)]^T,$$

$$f = [f(t+1), \dots, f(t+N)]^T,$$

$$\Delta f = [f(t+1), \Delta f(t+2), \dots, \Delta f(t+N)]^T,$$

$$\Delta^2 f = [f(t+1), \Delta f(t+2) - f(t+1), \Delta^2 f(t+3), \dots, \Delta^2 f(t+N)]^T,$$

$$e = [e(t+1), \dots, e(t+N)]^T,$$

$$\Delta e = [e(t+1), \Delta e(t+2), \dots, \Delta e(t+N)]^T,$$

$$\Delta^2 e = [e(t+1), \Delta e(t+2) - e(t+1), \Delta^2 e(t+3), \dots, \Delta^2 e(t+N)]^T,$$

$$U = [\Delta u(t), \dots, \Delta u(t+N_u-1)]^T,$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{G}_i &= \begin{pmatrix} g_0 & 0 & \cdots & 0 \\ g_1 & g_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & g_1 & \ddots & 0 \\ g_{N-2} & \vdots & \ddots & g_0 \\ g_{N-1} & g_{N-2} & \cdots & g_{N-N_u} \end{pmatrix}_{N \times N_u}, \quad \mathbf{G}_p = \begin{pmatrix} g_0 & 0 & \cdots & 0 \\ g_1 - g_0 & g_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & g_1 - g_0 & \ddots & 0 \\ g_{N-2} - g_{N-3} & \vdots & \ddots & g_0 \\ g_{N-1} - g_{N-2} & g_{N-2} - g_{N-3} & \cdots & g_{N-N_u} - g_{N-N_u-1} \end{pmatrix}_{N \times N_u}, \\
 \mathbf{G}_d &= \begin{pmatrix} g_0 & 0 & \cdots & 0 \\ g_1 - 2g_0 & g_0 & \ddots & \vdots \\ g_2 - 2g_1 + g_0 & g_1 - 2g_0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & g_0 \\ g_{N-1} - 2g_{N-2} + g_{N-3} & g_{N-2} - 2g_{N-3} + g_{N-4} & \cdots & g_{N-N_u} - 2g_{N-N_u-1} + g_{N-N_u-2} \end{pmatrix}_{N \times N_u},
 \end{aligned}$$

其中 g_i 是 $G_j(q^{-1})$ 中 q^{-i} 项的系数。

这样得到

$$\mathbf{e} = \mathbf{w} - \mathbf{f} - \mathbf{G}_i \mathbf{U} \quad (14)$$

$$\Delta \mathbf{e} = \Delta \mathbf{w} - \Delta \mathbf{f} - \mathbf{G}_p \mathbf{U} \quad (15)$$

$$\Delta^2 \mathbf{e} = \Delta^2 \mathbf{w} - \Delta^2 \mathbf{f} - \mathbf{G}_d \mathbf{U} \quad (16)$$

将式 (2) 化成向量形式, 可得

$$J = \mathbf{K}_i \mathbf{e}^T \mathbf{e} + \mathbf{K}_p \Delta \mathbf{e}^T \Delta \mathbf{e} + \mathbf{K}_d \Delta^2 \mathbf{e}^T \Delta^2 \mathbf{e} + \lambda \mathbf{U}^T \mathbf{U} \quad (17)$$

令 $\partial J / \partial \mathbf{U} = 0$, 并化简, 最终可得

$$\Delta u(t) = \mathbf{R}_p (\Delta \mathbf{w} - \Delta \mathbf{f}) + \mathbf{R}_i (\mathbf{w} - \mathbf{f}) + \mathbf{R}_d (\Delta^2 \mathbf{w} - \Delta^2 \mathbf{f}) \quad (18)$$

$$\mathbf{R}_p = \mathbf{e}_1^T (\lambda \mathbf{I} + \mathbf{K}_p \mathbf{G}_p^T \mathbf{G}_p + \mathbf{K}_i \mathbf{G}_i^T \mathbf{G}_i + \mathbf{K}_d \mathbf{G}_d^T \mathbf{G}_d)^{-1} \mathbf{K}_p \mathbf{G}_p^T,$$

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{e}_1^T (\lambda \mathbf{I} + \mathbf{K}_p \mathbf{G}_p^T \mathbf{G}_p + \mathbf{K}_i \mathbf{G}_i^T \mathbf{G}_i + \mathbf{K}_d \mathbf{G}_d^T \mathbf{G}_d)^{-1} \mathbf{K}_i \mathbf{G}_i^T,$$

$$\mathbf{R}_d = \mathbf{e}_1^T (\lambda \mathbf{I} + \mathbf{K}_p \mathbf{G}_p^T \mathbf{G}_p + \mathbf{K}_i \mathbf{G}_i^T \mathbf{G}_i + \mathbf{K}_d \mathbf{G}_d^T \mathbf{G}_d)^{-1} \mathbf{K}_d \mathbf{G}_d^T,$$

$$\mathbf{e}_1^T = [1, 0, \dots, 0]_{N_u \times 1}^T$$

将矩阵

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

引入上面式子, 简化得

$$\begin{aligned}
 \mathbf{G}_p &= \mathbf{S} \mathbf{G}_i, \quad \mathbf{G}_d = \mathbf{S}^2 \mathbf{G}_i, \\
 \Delta \mathbf{w} &= \mathbf{S} \mathbf{w}, \quad \Delta^2 \mathbf{w} = \mathbf{S}^2 \mathbf{w}, \\
 \Delta \mathbf{f} &= \mathbf{S} \mathbf{f}, \quad \Delta^2 \mathbf{f} = \mathbf{S}^2 \mathbf{f}
 \end{aligned} \quad (19)$$

令 $\mathbf{\Omega} = \mathbf{K}_i \mathbf{I} + \mathbf{K}_p \mathbf{S}^T \mathbf{S} + \mathbf{K}_d (\mathbf{S}^2)^T (\mathbf{S}^2)$, 则

$$\Delta u(t) = \mathbf{e}_1^T (\lambda \mathbf{I} + \mathbf{G}_i^T \mathbf{\Omega} \mathbf{G}_i)^{-1} \mathbf{G}_i^T \mathbf{\Omega} (\mathbf{W} - \mathbf{f}) =$$

$$[h_1 \ h_2 \ \cdots \ h_N] \begin{bmatrix} w(t+1) \\ w(t+N) \end{bmatrix} -$$

$$[F_1 \ F_N] y(t) - \begin{bmatrix} H_1 \\ H_N \end{bmatrix} \Delta u(t-1) =$$

$$[h_1 \ h_2 \ \cdots \ h_N] \begin{bmatrix} \alpha - F_1 \\ \alpha - F_N \end{bmatrix} y(t) -$$

$$\begin{bmatrix} 1 - \alpha \\ 1 - \alpha^N \end{bmatrix} y_r(t) - \begin{bmatrix} H_1 \\ H_N \end{bmatrix} \Delta u(t-1) \quad (20)$$

即

$$\begin{aligned}
 \Delta u(t) &= \sum_{j=1}^N h_j (1 - \alpha^j) y_r(t) - \\
 &\sum_{j=1}^N h_j (F_j(q^{-1}) - \alpha^j) y(t) - \\
 &\sum_{j=1}^N h_j H_j(q^{-1}) \Delta u(t-1)
 \end{aligned} \quad (21)$$

将上式化为

$$T(q^{-1}) \Delta u(t) = R y_r(t) - S(q^{-1}) y(t) \quad (22)$$

其中

$$R = \sum_{j=1}^N h_j (1 - \alpha^j) \quad (23)$$

$$S(q^{-1}) = \sum_{j=1}^N h_j (F_j(q^{-1}) - \alpha^j) \quad (24)$$

$$T(q^{-1}) = 1 + q^{-1} \sum_{j=1}^N h_j H_j(q^{-1}) \quad (25)$$

3 PID-GPC 鲁棒性的频域分析

被控对象仍同式 (1), 为下面分析简单起见,

令 $C(q^{-1}) = 1$ 和忽略 $\xi(t)$, 设系统的实际模型为

$$y(t) = G(q^{-1}) u(t) = q^{-1} B(q^{-1}) u(t) / A(q^{-1}) \quad (26)$$

辨识模型为

$$y(t) = \hat{G}(q^{-1}) u(t) = q^{-1} \hat{B}(q^{-1}) u(t) / (\hat{A} q^{-1})$$

那么系统的建模误差 (MPM) $\tilde{G}(q^{-1})$ 为

$$\tilde{G}(q^{-1}) = G(q^{-1}) - \hat{G}(q^{-1}) \quad (28)$$

由前面的推导, 闭环反馈系统的结构图可以化为如图 1 所示。

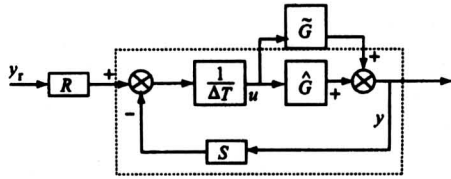


图 1 PID-GPC 的反馈结构图

Fig.1 The feedback structure of PID-GPC

图 1 中的虚线部分记为 M , 易得

$$M(q^{-1}) = S(q^{-1}) / [\Delta T(q^{-1}) + \hat{G}(q^{-1})S(q^{-1})] \quad (29)$$

据图 1, 由小增益定理, 可直接得到下面定理。

定理 1 如果控制器的设计使 $M(q^{-1})$ 稳定(即 $\Delta T + \hat{G}S$ 的根在单位圆内), 带有附加扰动的闭环系统稳定的一个充分条件是

$$|\tilde{G}(e^{-j\omega})M(e^{-j\omega})| < 1, \forall \omega \in [0, \pi] \quad (30)$$

$$|\tilde{G}(e^{-j\omega})| < |1/M(e^{-j\omega})| = |[\Delta T(e^{-j\omega}) + \hat{G}(e^{-j\omega})S(e^{-j\omega})]/S(e^{-j\omega})|, \forall \omega \in ([0, \pi] \quad (31)$$

推论 1 稳定界 $|1/M(e^{-j\omega})|$ 的稳态增益等于过程模型的稳态增益。

证明 由式 (31) 得

$$|1/M(e^{-j\omega})| = |[\hat{G}(e^{-j\omega}) + \Delta T(e^{-j\omega})/S(e^{-j\omega})]| \quad (32)$$

因为 $\Delta(e^{-j\omega}) = 1 - e^{-j\omega}$, 在稳态($\omega = 0$), $\Delta(e^{-j\omega}) = 0$, 代入式(32)可以直接得证。

从推论可知, 在低频时, $(1/M(e^{-j\omega}))$ 受过程模型的影响比控制器的影响大。如果未建模部分的稳态增益超过了过程模型的稳态增益, 则 PID-GPC 的稳定性不能保证。

4 仿真研究

仿真模型的传递函数取为

$$G(s) = 1/(s+1)(3s+1)(5s+1) \quad (33)$$

采样周期取 $T_s = 1$, 模型离散化后为

$$G(q^{-1}) = (0.0077q^{-1} + 0.0212q^{-2} + 0.0036q^{-3}) / (1 - 1.9031q^{-1} + 1.1514q^{-2} - 0.2158q^{-3}) \quad (34)$$

采用方波输入, 最小二乘辨识, 取 $n_a = 1, n_b = 1$, 得到的辨识模型为

$$\hat{G}_0(q^{-1}) = (0.0419q^{-1} + 0.0719q^{-2}) / (1 - 0.8969q^{-1}) \quad (35)$$

下面通过对参数的调整, 来测试各个参数对频域鲁棒界的影响。

4.1 K_i 的影响

图 2 画出了 MPM 曲线, 以及 K_i 取不同值时的 $|1/M(e^{-j\omega})|$ 曲线。其中 $N_u = 3, N = 3, \alpha = 0, \lambda = 5, K_p = 0, K_d = 0$ 。图 2 表明, 随着 K_i 的增大, 鲁棒区域 ($|1/M(e^{-j\omega})|$ 和 $|\tilde{G}(e^{-j\omega})|$ 之间的区域) 明显减少, 因此随着比例系数 K_i 的增大, 系统的鲁棒性降低。

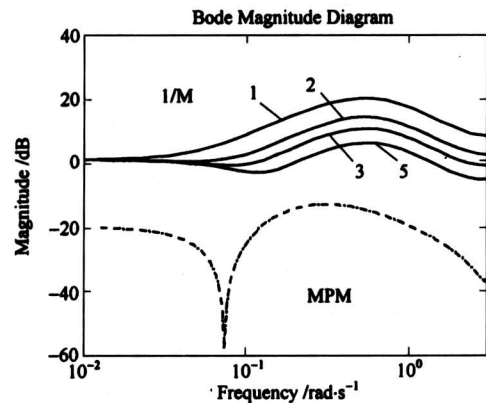


图 2 K_i 对稳定界变化的影响效果

Fig.2 Effect of K_i on stability bound

4.2 K_p 的影响

从图 3 可以看出, 增大 K_p , 虽然可以使控制器的跟踪加快, 但鲁棒性降低了。其中 $N_u = 3, N = 3, \alpha = 0, \lambda = 1, K_i = 1, K_d = 0$ 。

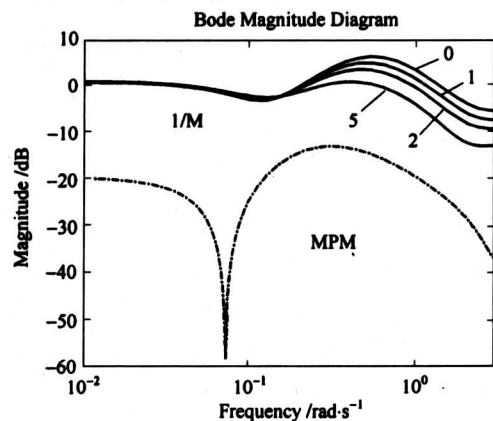


图 3 K_p 对稳定界变化的影响效果

Fig.3 Effect of K_p on stability bound

4.3 K_d 的影响

从图 4 可以看出, 增大 K_d , 可以使控制器的跟踪加快, 鲁棒性也增加了。其中 $N_u = 3$, $N = 3$, $\alpha = 0$, $\lambda = 0.5$, $K_i = 1$, $K_p = 0$ 。

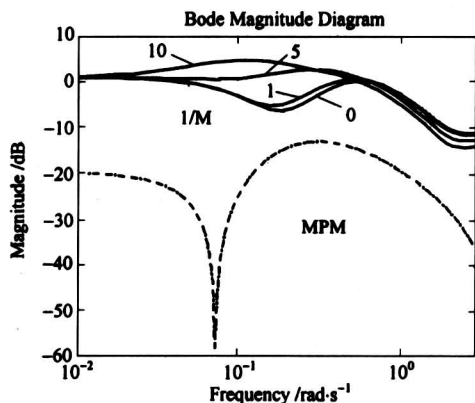


图 4 K_d 对稳定界变化的影响效果

Fig.4 Effect of K_d on stability bound

5 结论

推导了 PID-GPC 的闭环反馈结构, 采用频域中幅频分析的方法分析控制系统的鲁棒性, 并指导 PID-GPC 的参数设计。所获得的设计方法有重要的工程实用价值。为预测控制的推广与应用开辟了一条有效的途径。

参考文献

[1] Clarke D W, Mohtadi C, Tuffs P S. Generalized

predictive control [J]. Automatica, 1987, 23 (1): 137 ~ 148

[2] Dumont G A, Martin-Sanchez M, Zervos C C. Comparison of an auto-tuned PID regulator and an adaptive control system on an industrial bleach plant [J]. Automatica, 1989, 25 (1): 33 ~ 40

[3] 陈增强, 袁著祉, 李玉梅, 等. 工业锅炉的加权预测自校正控制 [J]. 自动化学报, 1993, 19 (1): 46 ~ 53

[4] 孙明玮, 陈增强, 袁著祉. 飞航导弹高精度自适应预测控制设计 [J]. 中国工程科学, 2005, 7 (10): 23 ~ 27

[5] 陈增强, 袁著祉. On the robustness of a generalized predictive controller [J]. 高校应用数学学报 (B 辑), 1995, 10 (4): 449 ~ 456

[6] Robinson B D, Clarke D W. Robustness effects of a prefilter in generalized predictive control [J]. IEE Proceedings: Control Theory and Applications, 1999, 138 (1): 2 ~ 8

[7] 孙明玮, 陈增强, 袁著祉. The principle of robustness in generalized predictive control [J]. 高校应用数学学报 (B 辑), 1999, 14 (2): 293 ~ 399

[8] 毛宗星, 陈增强, 孙青林, 等. 基于频域的广义预测控制器 (GPC) 的稳定性分析 [J]. 控制与决策, 2002, 17 (6): 859 ~ 862

[9] 孙青林, 陈增强, 袁著祉. 基于频域的多变量广义预测控制器稳定性分析 [J]. 中国工程科学, 2004, 6 (10): 39 ~ 44

[10] 毛宗星, 陈增强, 孙青林, 等. 基于频域的广义预测控制器 (GPC) 的鲁棒性分析 [J]. 华东理工大学学报, 2002, 28 (增刊): 15 ~ 19

Frequency-domain-based Robustness Analysis for PID Generalized Predictive Control

Wang Fanzhen, Chen Zengqiang, Yao Xiangfeng, Yuan Zhuzhi

(Department of Automation, Nankai University, Tianjin 300071, China)

[Abstract] The closed-loop feedback structure of PID generalized predictive control (PID-GPC) is proposed, then small-gain criterion is used to obtain a sufficient condition for the robust stability of PID-GPC under the condition of model-plant mismatch (MPM). Further more, the influence of PID-GPC parameter tuning on its robustness is analyzed in frequency domain.

[Key words] predictive control; robustness; frequency domain; small-gain criterion; PID control