

论岩土塑性体应变与剪应变的相互作用原理

王靖涛^{1,2}

(1. 信阳师范学院建筑工程系, 河南信阳 464000;
2. 华中科技大学土木工程与力学学院, 武汉 430074)

[摘要] 对岩土塑性变形过程中体应变与剪应变的相互作用原理的内涵做了深入的阐述, 特别对塑性体应变和剪应变之间的相互作用方式, 塑性体应变对抗剪能力的直接控制作用, 剪缩和剪胀发生的条件, 应力路径相关性是这种相互作用的综合体现及实例验证, 临界状态是塑性和弹性体应变都保持不变的纯粹剪切变形过程等方面进行了论证; 根据这个相互作用原理, 在理论上证明了空间临界状态线的存在性和唯一性以及它与应力是无关的。

[关键词] 岩土塑性体变形和剪应变的相互作用原理; 岩土本构关系; 压硬性; 剪胀性

[中图分类号] V475; V476 **[文献标识码]** A **[文章编号]** 1009-1742(2006)09-0024-06

1 引言

岩土构成了地球外层的岩石圈。人类的一切活动都是在岩石圈上进行的。在人类进化的早期就与岩土打交道了。至今岩土仍然是使用最广泛的工程材料。虽然我们对岩土力学性质的认识已逐渐深化, 然而仍停留在经验占相当部分的阶段。岩土的力学响应相当复杂, 影响因素很多。岩土具有与金属不同的许多特性, 诸如压硬性、剪胀性和应力路径相关性等。虽然已提出了许多岩土本构方程, 但是实际应用的效果却不令人满意。这个事实表明, 对岩土本构关系的复杂性, 并未找到它的症结所在。这也正是许多研究者多年来探究的最基础的研究课题。Harr (1977) 采用颗粒力学方法, 基于颗粒微观相互作用, 利用概率理论来研究宏观连续介质的应力应变性质^[1]。另外一种方法是将岩土近似地当作一个连续体, 在连续介质力学的框架内进行研究, 即是在宏观水平上的唯象方法。当然, 还必须考虑孔隙水压和气压的重要作用。实际上, 至今我们对作为连续介质的岩土的许多宏观变形规律还

知之甚少。

笔者基于本构方程公理中 Noll 的局部作用原理^[2]和在对岩土本构关系特性深入分析的基础上, 提出了岩土塑性变形中存在两个相对独立的变形: 体积变形和剪切变形, 它们之间的相互作用是产生塑性变形基本特性的主要根源^[3]。这里简称为塑性体应变与剪应变的相互作用原理。

笔者在本文将对这个原理的内涵做进一步深层次的阐述。特别对塑性体应变与剪应变之间的相互作用方式, 塑性体应变对抗剪能力的直接控制作用, 剪胀和剪缩发生的条件, 应力路径相关性是这种相互作用的综合体现及实例验证和临界状态是纯粹剪切变形过程等进行论证。并在理论上证明了空间临界状态线的存在。

2 塑性体应变与塑性剪应变之间的相互作用

由于在组成岩土的晶粒和颗粒之间存在许多空隙, 它们变形的最大特征是产生较大的塑性体积变形。更为重要的是由此引发了塑性体应变与塑性剪

[收稿日期] 2005-11-13; **修回日期** 2006-03-14

[作者简介] 王靖涛 (1940-), 男, 天津市人, 华中科技大学土木工程与力学学院教授, 博导; 信阳师范学院教授, 主要从事岩土力学与工程教学和科研

应变之间的相互作用。两者构成了岩土塑性变形中起控制作用的一对基本矛盾。按照热力学理论，塑性体应变和塑性剪应变均属于内变量，表示了材料内部微观结构不可逆的变化，从而导致了材料宏观性质的不可逆改变。只有外部荷载引起的不可逆的材料性质的变化，才能影响下一个荷载增量引起的力学响应，因此塑性变形具有这种功能。然而在弹性变形中不可能发生这种效应，例如，卸载和再加载的弹性变形并不改变随后的变形路线。但是岩土的弹性体应变也会引起孔隙比的暂时变化。因此，在一些情况下，例如单调加荷中弹性体应变对抗剪能力的影响也是应该考虑的。

目前，对岩土的基本特性，如压硬性和剪胀性，大都采用了平均正应力 p 和广义剪应力 q 的交叉影响来进行解释，即 p 直接对剪应变 ($\bar{\epsilon}^p$) 起作用，而 q 直接对体应变 (ϵ_v^p) 发生影响。

根据本构方程公理中 Noll 提出的局部作用原理^[2]，应力的作用和传递只能通过物体的变形才能实现，以及对岩土塑性变形基本特性产生机理的分析，笔者认为， p 和 q 分别对塑性剪应变和塑性体应变的作用都不是直接的， p 通过体应变对剪应变发生作用，而 q 借助于剪应变影响体应变，如图 1 所示。

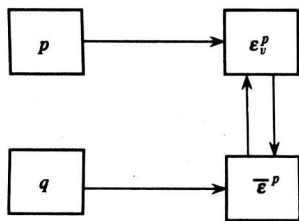


图 1 ϵ_v^p 和 $\bar{\epsilon}^p$ 间的相互作用

Fig.1 The interaction between ϵ_v^p and $\bar{\epsilon}^p$

岩土和金属的力学响应存在显著的差别，特别表现在岩土独具压硬性和剪胀性。岩土的破坏面是锥面，静水压力对抗剪强度有重要影响；而金属破坏面是圆柱面，与静水压力无关。岩土变形中剪应变可以引起体积的膨胀或收缩，即剪胀性，然而金属变形却不发生这种效应。根据 ϵ_v^p - $\bar{\epsilon}^p$ 相互作用原理可以对上述岩土和金属变形基本特性之间的差别给出简单和合理的解释。由于金属塑性变形中塑性体应变近似为零，故不可能发生 ϵ_v^p 与 $\bar{\epsilon}^p$ 间的相互作用。

体应变和广义剪应变是应变张量的两个不变

量，分别表示体积和形状的变化。两者统一在岩土微小单元体的变形中。然而它们的塑性变形部分之间存在强烈的相互作用，也可以说是体积胀缩与形状畸变之间的耦合效应。这种相互作用贯穿于岩土变形的全过程中。

2.1 剪胀性

如前所述，剪切变形可以引起体积的变化，无论收缩或膨胀，这种性质均称为剪胀性，是岩土与金属不同的主要特性之一。剪缩和剪胀是剪应变 $\bar{\epsilon}^p$ 对体应变 ϵ_v^p 作用的两种表现方式。

岩石和土中都存在大量的微孔隙。在剪切变形中，土中的颗粒重新排列和分布，在岩石中微空隙闭合，都可以使微空隙体积减小。这种现象称为剪缩。然而，在一定条件下剪切变形也可以引起体积的增大，在土中主要是颗粒间咬合和颗粒的破碎（实际上，也是微裂隙的生成）所造成的。岩石中主要是微裂隙的扩展和新的微裂隙的生成，这种现象在岩石力学中称为剪胀或扩容。然而，在金属的塑性变形中，由于在一般压力下塑性体应变几乎为零，剪切变形不能够对塑性体应变发生作用，故不出现剪缩和剪胀。

剪缩和剪胀都是剪切变形引起的，然而在什么条件下产生剪缩和剪胀呢？一方面取决于土的内部密实程度；另一方面，静水压力 p 对剪胀有抑制作用，实际上土的密实程度也是相对围压而言的，约束压力增大，相应密实程度可以提高。Casagrande (1938) 在研究粒状土液化时首先引进了临界孔隙比概念^[4]。在一定的围压下，土样剪切变形最终达到破坏时，体积不发生变化，孔隙比维持为一个常值，称为临界孔隙比。与此类似，对一个特定的孔隙比值，在破坏时体积保持为一常值，这时围压也维持不变，称为临界围压^[5]。临界孔隙比与临界围压是一一对应的关系。根据土样的孔隙比和当时所承受的围压可以判断土样收缩或膨胀的发生。这里引进一个相对孔隙比参数： $e_r = e/e_c$ ，其中 e 为土样的初始孔隙比， e_c 是土样当时所承受的围压所对应的临界孔隙比。当 $e_r > 1$ 时，发生剪缩；当 $e_r < 1$ 时，体积膨胀。

因此，在剪应变作用下，发生剪胀和剪缩的条件是由土的孔隙比和外部围压共同决定的。

2.2 塑性体应变对抗剪能力的作用

塑性体应变对剪切变形的作用与上节所述的剪应变对体应变的作用不同，并不是直接的，而是通

过提高或降低抗剪能力对剪应变施加影响。

在岩土变形中主要有两种作用导致体积的收缩和膨胀：一是静水压力的作用。表现在两个方面， p 的增减直接引起体积的缩胀；另外由于围压对剪胀有约束作用，如上节所述，它与孔隙比一起共同控制剪胀的发生。二是剪应变对体应变的作用，即剪胀效应。体积收缩导致密度增加，这意味着孔隙比的减小，从而提高了抗剪能力。这就是所谓的压硬性或压力敏感性。初始围压的增加，在一定压力范围内，致使抗剪强度升高和延性增大。这已被大量岩土三轴压缩试验所证实。相反，体积膨胀将会降低抗剪能力。

图 2 显示了正常固结粘土和超固结粘土在典型应力路径下的变形过程和强度。其中，对于正常固结土， AB 表示排水的常规三轴压缩路径 (CTC)， AC 是不排水的 CTC 路径。从图中可以看出，在路径 AB 中孔隙比 e 不断减小，即体积收缩，而在路径 AC 中 e 保持不变。这两种路径下分别最终达到破坏线上的 B 点和 C 点。试验结果表明，抗剪强度随孔隙比的减小而增大。

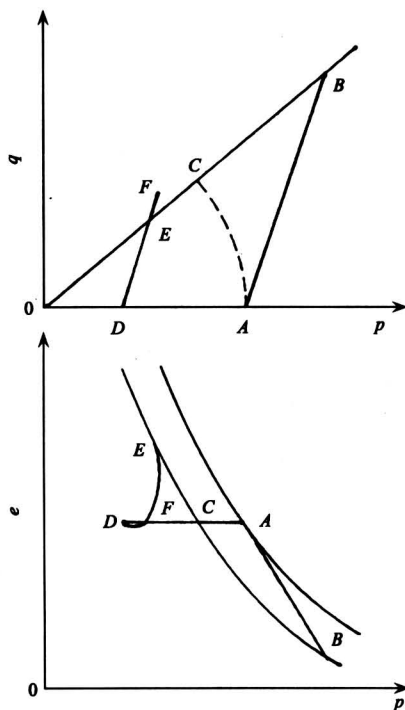


图 2 正常固结和超固结粘土的三轴试验应力路径
Fig.2 Stress paths in triaxial test on normally consolidated clay and overconsolidated clay

对于超固结粘土也有类似的情况。重超固结粘

土的排水和不排水的 CTC 试验路径和强度也显示在图 2 中。在排水试验中土样首先到达峰值强度 F 点，然后破坏时抵达 E 点。在变形过程中除开始体积稍有收缩外，大部分处在剪胀状态。在不排水路径 DC 下，体积一直保持不变，最终到达破坏线上的 C 点。与正常固结粘土的试验结果不同，排水路径下的抗剪强度低于不排水路径的强度值。这个事实证实了体积膨胀导致强度下降。以上试验结果表明，塑性体应变确实对抗剪强度起决定性作用。

在图 3 清晰地显示出了 $\epsilon_p^p - \bar{\epsilon}^p$ 相互作用及对抗剪能力的影响。

从图 3 中可以看出，塑性体应变 ϵ_p^p 通过改变抗剪能力作用于塑性剪应变 $\bar{\epsilon}^p$ 。塑性剪应变也可以影响它自身，通过剪缩或剪胀作用于 ϵ_p^p ，从而影响抗剪能力。然而，无论什么情况，抗剪能力的改变都是直接来自于 ϵ_p^p 的作用。因此可以得到这样的结论：塑性体应变的变化控制抗剪能力的升降，并决定了应力应变关系曲线的类型。例如，在松砂和正常固结粘土的变形中，体积连续收缩，应力应变关系曲线是应变硬化型；而密砂、超固结粘土和岩石的变形，在初期体积稍有收缩后，一直处于体积膨胀过程，其应力应变曲线属于应变软化型。

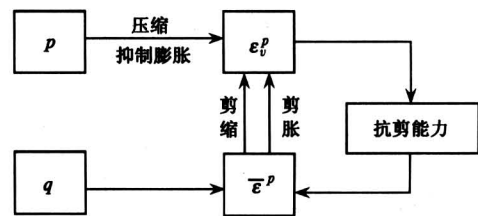


图 3 $\epsilon_p^p - \bar{\epsilon}^p$ 相互作用及对抗剪能力的影响
Fig.3 Interaction between $\epsilon_p^p - \bar{\epsilon}^p$ and its impact on the resistance to shear

2.3 应力路径的相关性

笔者通过试验和理论分析证明：岩土本构关系不仅与应力路径相关，而且这种相关性是塑性体应变与塑性剪应变之间相互作用的综合体现。同时还指出，剪切屈服轨迹和体积屈服轨迹平均斜率的变化近似地反映了 $\epsilon_p^p - \bar{\epsilon}^p$ 相互作用的强度变化^[3]。进一步的研究表明，所建立的每一个岩土本构模型只能适合一种应力路径。

应力路径不仅影响变形过程，也与抗剪强度密切相关。事实上，材料的破坏是变形发展的最终结

果。上节给出的正常固结粘土和超固结粘土在不同应力路径下的变形过程和强度，就充分显示了不同的应力路径到达不同的破坏点。

笔者(2002)提出了岩土本构关系的数值建模方法^[6]。数值建模的最大优点是可以反映应力路径的影响。文献 [7, 8] 采用数值建模方法已经建立了砂土的一系列应力路径下的弹塑性本构模型。通过可视化，给出了在整个应力场 (p, q) 中剪切

变形和体积变形的三维曲面。图 4 分别显示了中密砂在常规三轴压缩试验 (CTC) 和三轴压缩试验 (TC) 中剪应变和体应变的变化曲面。从这些曲面可以直观地观察到，两种应力路径下的应变曲面无论在高度上和坡度上都存在明显的差别。特别是 TC 路径下的体应变中发生了显著的剪胀现象。这进一步证实了应力路径对本构关系的影响是不可忽视的。

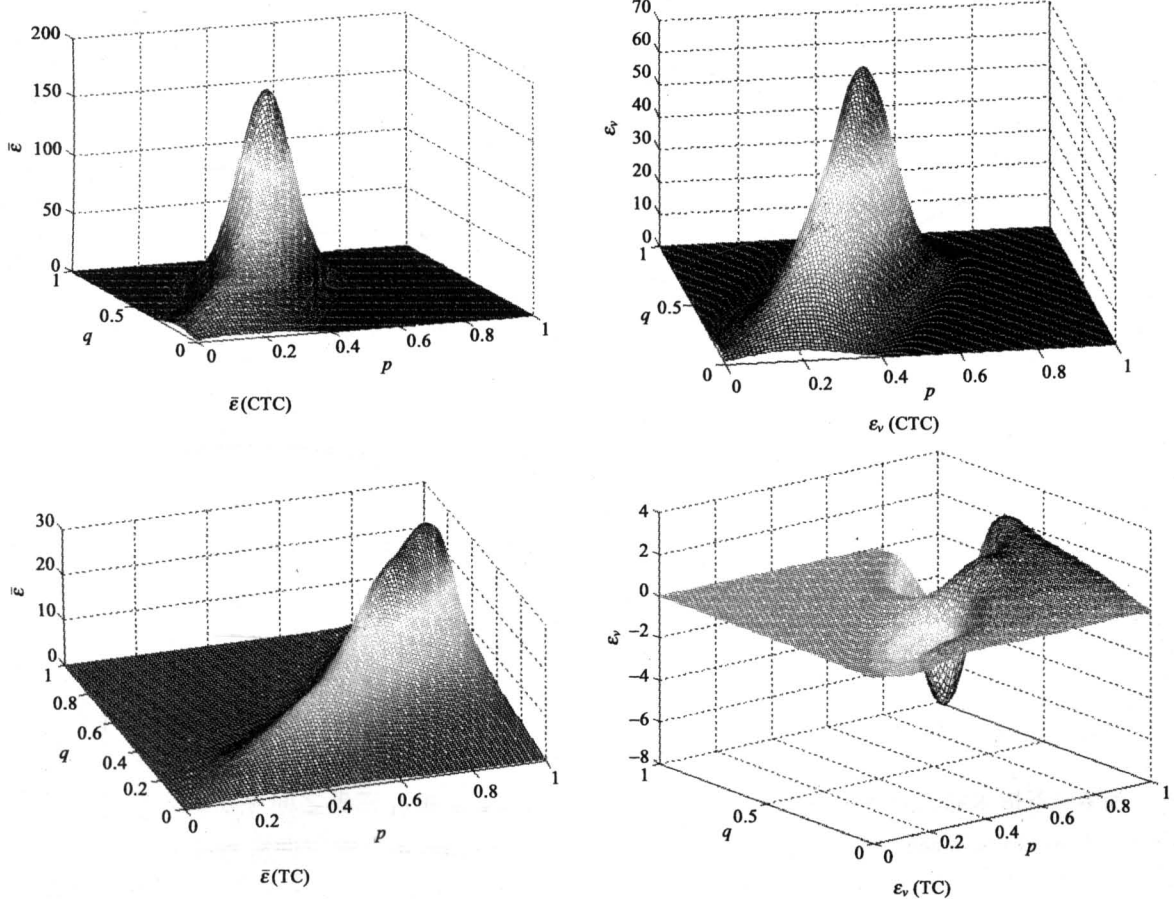


图 4 在应力路径 CTC 和 TC 下的应力应变关系曲面

Fig.4 Surface chart of stress-strain under conditions of stress path CTC and TC

3 空间临界状态线

Roscoe 等 (1958) 在对上部地层的重塑饱和粘土试验的基础上建立了“临界状态土力学”^[9]。他们所依据的试验结果主要是无论正常固结粘土还是超固结粘土，所有三轴压缩试验的应力路径均在空间 $e - p - q$ 中的一个临界状态线上结束。这里我们考虑其中两个典型的应力路径。首先是排水的常规三轴压缩试验 (CTC)，其中围压 σ_3 保持为常量。正常固结粘土和超固结粘土的应力应变响应曲

线如图 5 所显示。

从图 5 可以观察到，在具有相同围压的条件下，无论正常固结粘土或超固结粘土，虽然经历了不同的变形过程，但最终都进入了一共同的极限状态。在此状态下，体积和孔隙比均保持不变，应变继续发展，剪切抗力也趋于常值。Hvorslev (1937) 将这种条件定义为临界状态^[10]。在围压不变条件下，进入临界状态后，抗剪强度和孔隙比都分别达到一个常值，而与初始固结状态（无论正常固结粘土还是超固结粘土）无关。

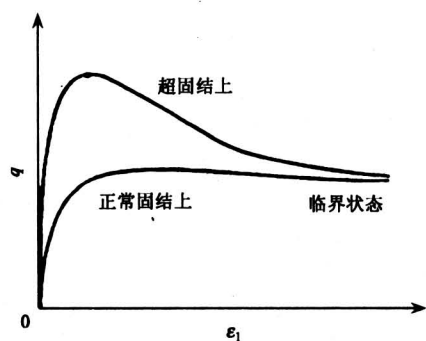


图 5 正常固结和超固结粘土的 CTC 试验中应力应变响应曲线

Fig.5 Response curve of stresses-strain in the CTC test on normally consolidated and overconsolidated clays

另一个典型应力路径是不排水的三轴压缩试验,如图 6 所示。图 6 中 A, B, C, D 点表示土

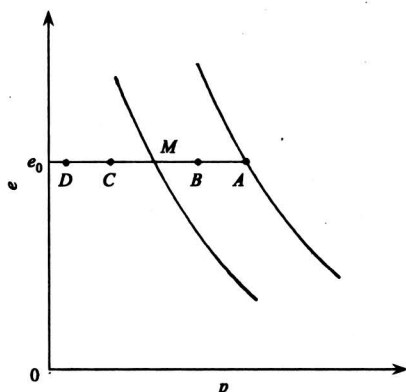


图 6 不排水的三轴压缩试验路径

Fig.6 Triaxial undrained compression test route

样的初始状态, A 点是正常固结土, B 点是轻超固结土, C 点和 D 点是重超固结土, 然而, 它们都具有相同的初始孔隙比 e_0 。试验结果表明, 无论超固结土还是正常固结土, 只要它们具有相同的初始空隙比, 尽管经历了不同的有效应力路径, 重超固结土沿有效应力 p 增加的路径, 而正常固结土和轻超固结土则沿着相反的减 p 路径^[11, 12]。然而它们却最终达到大致相同的破坏点 M。以上试验结果有一个共同点, 即无论排水或不排水三轴压缩试验, 土样最终都进入临界状态, 其中体积和孔隙比均为常值, 而围压或静水压力也保持不变。在这种条件下可以证明塑性体应变也保持为常值。当体积不变时有

$$d\epsilon_v = d\epsilon_v^e + d\epsilon_v^p = 0 \quad (1)$$

其中, $d\epsilon_v$ 是总体应变增量, $d\epsilon_v^e$ 和 $d\epsilon_v^p$ 分别表示弹性和塑性体应变增量。

按照虎克定律有

$$dp = K d\epsilon_v^e \quad (2)$$

其中, dp 是平均有效正应力增量, K 是弹性体积模量。在临界状态中静水压力 p 为常值, 故 $dp = 0$, 从而 $d\epsilon_v^e = 0$ 。

由式 (1) 可知,

$$d\epsilon_v^p = -d\epsilon_v^e \quad (3)$$

则有

$$d\epsilon_v^p = 0 \quad (4)$$

这表明在临界状态中, 弹性和塑性体应变都保持不变。这意味着土体进入了纯粹剪切变形状态。根据 $\epsilon_v^p - \epsilon^p$ 相互作用原理, 如果塑性体应变保持为常值, 则在临界状态中土体的基本特性, 如应力路径相关性、压硬性、剪胀性等均统统消失。又由上述的分析结论可知, 抗剪能力的升降仅取决于塑性体应变的变化。塑性和弹性体应变都保持为常值, 则抗剪能力必将不会发生改变, 从而抗剪强度 q_t 将保持为常值。它的值仅取决于当时的状态变量, 静水压力 p 和孔隙比 e , 而与以前所经历的应力历史无关。这样一来则有

$$q_t = f(p, e) \quad (5)$$

其中, q_t 为抗剪强度, p 和 e 分别为临界状态中的静水压力和孔隙比。方程 (5) 表明, 在临界状态中, p , e 和 q_t 三者之间存在确定的关系。它正是空间 $e-p-q$ 中的空间临界状态线。这样就在理论上证明了空间临界状态线的存在性和唯一性以及它与应力历史和应力路径无关。

如前所述, 在临界状态中, 围压 (或静水压力) 与孔隙比之间存在确定的一一对应关系。因此当一个临界孔隙比给定时, 则相应的临界围压即可确定下来。反之亦然。

在前面所述的排水和不排水三轴压缩试验中, 前者保持围压不变, 即 $p_1 = \text{const}$; 而后者保持孔隙比不变, 即 $e_2 = \text{const}$ 。在进入临界状态后, 与 p_1 对应的临界孔隙比 e_1 和与 e_2 对应的临界围压 p_2 都可分别确定下来。这样一来, 由方程 (5) 可以分别获得相应的抗剪强度值, q_{t1} 和 q_{t2} 。这个结果显示, 在排水三轴压缩试验中, 只要保持围压不变, 则无论正常固结土还是超固结土, 都具有相同

的抗剪强度。而在不排水试验中,只要初始孔隙比一样,则对正常固结土或超固结土,无论什么样的有效应力路径,都到达临界状态线上的同一点。

这里必须强调指出,土体进入临界状态表示土体的应力和应变状态发生了质的变化,进入了与以前状态完全不同的纯粹剪切变形过程。以上的论证也是对 $\epsilon_v^p - \bar{\epsilon}^p$ 相互作用原理的进一步确认。

4 结论

1) 在岩土塑性变形过程中贯穿着 $\epsilon_v^p - \bar{\epsilon}^p$ 相互作用。剪应变 $\bar{\epsilon}^p$ 通过剪胀和剪缩作用于体应变,体应变 ϵ_v^p 通过改变抗剪能力作用于 $\bar{\epsilon}^p$ 。抗剪能力的升降完全由塑性体应变 ϵ_v^p 直接控制。

2) 剪缩和剪胀是塑性剪应变对塑性体应变作用的两种表现方式。由于围压对剪胀有抑制作用,剪缩或剪胀的发生条件是由孔隙比和围压共同决定的。

3) 应力路径的相关性是塑性体应变与塑性剪应变之间相互作用的综合体现。所建立的每一个本构模型只能适合一种应力路径。利用数值建模方法所建立的不同应力路径下的本构模型,进一步证实了应力路径的影响是不可忽视的。

4) 临界状态是塑性和弹性体应变都保持不变的纯粹剪切变形过程。根据 $\epsilon_v^p - \bar{\epsilon}^p$ 相互作用原理,在理论上证明了空间临界状态线的存在性和唯一性以及它与应力历史是无关的。

参考文献

[1] Harr M E. Mechanics of Particulate Media—A

Probabilistic Approach [M]. New York: McGraw-Hill, 1977

[2] Noll W A. Rational mechanics[J]. Analysis, 1958, (2): 197

[3] 王靖涛. 岩土本构关系的特殊性和统一性[J]. 华中科技大学学报(城市科学版), 2004, (4): 5~8

[4] Das B M. Advanced soil Mechanics [M]. Washington, DC: Taylor & Francis, 1997

[5] Lee K L, Seed H B. Drained strength characteristics of sands[J]. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, 1967, 93(SM6): 117~141

[6] 王靖涛. 建立岩土本构模型的数值方法[J]. 华中科技大学学报(城市科学版), 2002, (1): 44~47

[7] 高红, 王靖涛. 砂土弹塑性本构关系的数值建模研究[J]. 华中科技大学学报(城市科学版), 2003, (2): 50~52

[8] Wang Jingtao, Ding Meiyang. Inverse problems in modeling the constitutive relations of rock and soil[A]. Proceedings of the Tenth Int. Conference on Computer Methods and Advances in Geomechanics [C], Tucson: A A Balkema Rotterdam/ Brookfield, 2001. 413~416

[9] Roscoe K H, Schofield M A, Wroth C P. On the yielding of soils[J]. Geotechnique, 1958, (8): 22~53

[10] Hvorslev M J. Über die Festigkeitseigenschaften gestörter bindiger Böden. Ingvidensk, Skr A, No. 45 1937 (English Translation No. 69-5, Water Ways Experiment Station, Vicksburg Miss, 1969)

[11] 陈惠发, 萨里普 A F. 土木工程材料的本构方程 [M]. 余天庆, 王勋文译, 刘再华校. 武汉: 华中科技大学出版社, 2001

[12] 黄文熙. 土的工程性质 [M]. 北京: 水利电力出版社, 1983

Demonstration of the Principle of Interaction between Plastic Volume Strain and Shear for Rock and Soil

Wang Jingtao^{1,2}

(1. Department of Architectural Engineering, Xinyang Normal University, Xinyang, Henan 464000, China; 2. School of Civil Engineering and Mechanics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China)

[Abstract] The paper proposed a principle of interaction between plastic volume strains of and shear for rock and soil. The main meanings of the principle were further explained. Especially, the manners of the interaction between plastic volume strain and shear strain, the direct effect of plastic volume strain on the resistance to

(cont. on p.34)

The Adaptive Robust Controller of the Centrifuge

Li Guo, Zhang Peichang, Hu Jianfei, Yu Datai

(*Information Engineering Institute, Beijing University of Science and Technology, Beijing 100083, China*)

[**Abstract**] This paper investigates the use of the adaptive robust controller for improving control performance and stability of the centrifuge. Based on its structural merit that the electric motor is connected to the centrifuge, the implementation of a control system is expected to achieve satisfactory control performance. An adaptive robust control algorithm of the centrifuge is presented in the paper, and the adaptive robust controller is designed according to the centrifuge model. The effectiveness of the algorithm is verified by the experimental results. It is clarified that the control performance and stability of the centrifuge is improved and the control system still maintains satisfactory control performance despite the change of environment conditions.

[**Key words**] centrifuge; adaptive control; robust control

(cont. from p.29)

shear, the conditions of generating contraction and expansion of volume, the fact that the dependence of stress path is a comprehensive performance form of the interaction between the plastic volume strain and shear and its verification, and the fact that the critical state is a pure shearing process, in which the plastic and elastic volume strains remain constant, were demonstrated. In addition, according to this principle, it was theoretically proved that the space critical state line exists and is unique and independent of the stress history.

[**Key words**] principle of interaction between plastic volume strain and shear strain for rock and soil; constitutive relation of rock and soil; pressure-sensitivity; dilatancy