

# 城市给水管网恒定流和瞬变流数学模型研究

汪守东, 沈永明, 姜恒志

(大连理工大学海岸和近海工程国家重点实验室, 辽宁大连 116023)

[摘要] 首先基于节点方程法,建立了给水管网恒定流数学模型,并采用经改进的牛顿迭代法实现了对模型的求解;其次由特征线法建立了给水管网瞬变流数学模型,可预测管网运行中出现的有害水击,并求得可能出现的最大(最小)水压及其相应发生的位置。实例研究表明,建立的模型是可靠的,且具有计算速度快、精度高等优点,可以用于城市给水管网的水力平衡数值模拟研究和为设计者防护水击所采取的措施提供理论依据。

[关键词] 给水管网;恒定流;瞬变流;水击;牛顿迭代法

[中图分类号] TU821.3 [文献标识码] A [文章编号] 1009-1742(2007)12-0026-05

给水管网水动力计算是城市给水管网设计、经济评价和运行管理的基础,其实质是通过求解管网水动力稳定方程组得到所有管段流量、水头损失、各节点水压、水泵扬程或水塔高度等参数。目前求解方法有环路流量法、管段流量法和节点水压法。环路流量法是管网水动力计算最早使用的一种方法,始于1936年Hardy Cross在环状管网水力计算中提出的哈代·克罗斯(Hardy Cross)法,未知数是环校正流量,数量为环的个数,它以能量方程——环路的水头损失平衡为准则,由于其迭代公式简单,未知数和方程数量较少,易于手工计算,在计算机未问世前,使其一度在管网水动力计算方法中占据统治地位<sup>[1]</sup>;管段流量法是联立连续性方程和能量方程求解,其未知数是管段数,由于求解过程比较复杂,目前应用很少;节点水压法的未知量是节点水压,由于方程形式简单,水压初值易得且收敛性较好,很适合计算机求解,目前管网的水力计算大都是使用此方法。目前应用较多的是在节点水压法的基础上,利用牛顿迭代法求解<sup>[2,3]</sup>,这是由于在使用牛顿法求解时所形成的雅可比(Jacobi)矩阵是一对称正定、带状的稀疏矩阵,可采用计算效率高的Cholesky法(又称平方根法)来求解相应的线性方程组。笔者

在节点水压法的基础上采用改进的牛顿迭代法求解方程组,该方法具有计算速度快、精度高等优点。水电站或给水管网系统中,通常用阀门来调节流量,阀门的突然关闭或开启,引起流速的急速变化,产生瞬变流,同时引起压强增加或降低。有压管道内瞬变流压强突然变化的现象称为水击<sup>[4]</sup>,研究水击过程即是研究瞬变流变化过程。采用特征线法求解给水管网瞬变流方程<sup>[5,6]</sup>,可预测管网运行中出现的有害水击。因此,给水管网模型不仅要含有恒定流模块,还应包括瞬变流模块,而目前多数相关模型只含有其中的一个模块。

给水管网恒定流和瞬变流计算分为如下两步:首先,根据管网恒定流模型计算出管网中各管道的流量、水头损失和节点水压;然后,关闭阀门,根据瞬变流模型求解管道中的瞬变流变化过程和水击压力变化过程及其最大值和最小值。

## 1 给水管网恒定流控制方程组及其数值计算

### 1.1 连续性方程

连续性方程又称节点方程,流入任意节点的流量等于流出该节点的流量。规定流入节点流量为

[收稿日期] 2007-03-14; 修回日期 2007-04-17

[基金项目] “九七三”国家重点基础研究发展计划资助项目(2005CB724202)

[作者简介] 汪守东(1979-),男,安徽舒城县人,大连理工大学博士研究生,主要从事环境水力学研究

负,流出节点流量为正,则

$$\sum_{j \in \Phi_i} \pm Q_{ij} + \beta_i q_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, M) \quad (1)$$

式中,  $Q_{ij}$  表示与节点  $i$  相连的  $j$  管段的流量;“+”表示流出节点,“-”表示流入节点;  $q_i$  表示节点  $i$  的耗水量或水源供水量;  $\Phi_i$  表示以节点  $i$  为起(终)点的所有管道的集合;  $\beta_i$  值为 +1, 表示流出节点  $i$ , 反之则然;  $M$  为管网的节点数, 不包括水塔节点。

### 1.2 能量守恒方程

能量守恒方程又称环路方程, 规定水流流向沿顺时针方向为正, 逆时针方向为负, 则每个环内所有管道水头损失的代数和为零, 即

$$\sum_{ij \in \Phi_L} h_{ij} = 0 \quad (2)$$

式中,  $L$  表示环的编号;  $\Phi_L$  表示闭合环  $L$  中的各管道的集合;  $h_{ij}$  表示节点  $i, j$  之间的压力差, 即管道的水头损失。

### 1.3 压降方程

压降方程表示管道流量与水头损失之间的关系

$$h_{ij} = S_{ij} Q_{ij}^n \quad (3)$$

式中  $Q_{ij}$  表示管道  $ij$  的流量;  $S_{ij}$  是与管材、管长、管径有关的摩阻系数;  $n$  为水力指数(通常取值为  $n = 1.85 \sim 2$ )。压降方程多种具体形式中最常用的形式是 Hazen-Williams 公式, 在低流速下, 尤其对于给水管网系统, 可以提供更精确的结果, 该公式为

式中,  $l, D$  分别为管长(m)、管径(m), 系数  $C$  与管材有关。

$$h_{ij} = 10.7 l_{ij} Q_{ij}^{1.852} / C^{1.852} D_{ij}^{4.87} \quad (4)$$

### 1.4 控制方程组的求解

设管段两端节点  $i, j$  的水压分别为  $E_i$  和  $E_j$ , 可以得到

$$h_{ij} = E_i - E_j \quad (5)$$

联立式(4)和式(5)得

$$Q_{ij} = R_{ij} (E_i - E_j)^{0.54} \quad (6)$$

其中  $R_{ij} = 0.27853CD_{ij}^{2.63}/l_{ij}^{0.54}$ 。

考虑到水流的方向性, 可将式(6)改写为

$$Q_{ij} = R_{ij} |E_i - E_j|^{0.54} \text{sign}(1.0, E_i - E_j) \quad (7)$$

式(7)描述了节点水压和管段流量的关系, 其中  $\text{sign}$  为符号函数, 将式(7)代入式(1)得

$$\sum R_{ij} |E_i - E_j|^{0.54} \text{sign}(1.0, E_i - E_j) + \beta_i q_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, M) \quad (8)$$

在已知节点流量的条件下, 式(8)是关于节点水压  $\mathbf{E} = (E_1 E_2 \dots E_M)^T$  的非线性方程组, 采用牛顿法求其数值解, 令

$$f_i = \sum R_{ij} |E_i - E_j|^{0.54} \text{sign}(1.0, E_i - E_j) + \beta_i q_i \quad (i = 1, 2, \dots, M) \quad (9)$$

式中  $f_i$  为节点  $i$  的流量闭合差 ( $\text{m}^3/\text{s}$ ), 由式(9)可求得

$$\frac{\partial f_i}{\partial E_i} = 0.54 \sum_{j \in \Phi_i} R_{ij} |E_i - E_j|^{-0.46} \quad (i = 1, 2, \dots, M),$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial E_j} = -0.54 \sum_{j \in \Phi_i} R_{ij} |E_i - E_j|^{-0.46} \quad (\text{节点 } i \text{ 与 } j \text{ 相邻}) \quad (10)$$

$\partial f_i / \partial E_i = 0$  (节点  $i$  与  $j$  不相邻)。

由式(10)可确定式(8)关于  $\mathbf{E}$  的雅可比矩阵

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial E_1} & \frac{\partial f_1}{\partial E_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial E_M} \\ \frac{\partial f_2}{\partial E_1} & \frac{\partial f_2}{\partial E_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial E_M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_M}{\partial E_1} & \frac{\partial f_M}{\partial E_2} & \dots & \frac{\partial f_M}{\partial E_M} \end{bmatrix} \quad (11)$$

于是, 用牛顿迭代法求解式(8)的步骤如下:

Step 1 给定初始值  $\mathbf{E}^{(0)} = (E_1^0 E_2^0 \dots E_M^0)^T$ , 由式(8)计算  $f_i^{(0)}$  ( $i = 1, 2, \dots, M$ )。若对于所有节点  $i$  均有  $|f_i^{(0)}| < \varepsilon$  ( $\varepsilon$  为节点流量允许闭合差, 可取  $\varepsilon = 0.001 \text{ m}^3/\text{s}$ ), 则  $\mathbf{E}^{(0)}$  为所求; 否则, 令  $k = 0$  ( $k$  为迭代次数), 进行下一步计算。

Step 2 由式(10)计算  $(\partial f_i / \partial E_j)^{(k)}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, M$ ), 然后按式(11)形成 Jacobi 矩阵  $\mathbf{J}^{(k)}$ 。

Step 3 用 Cholesky 法(又称平方根法)解下列线性方程组(也称牛顿方程组), 求出  $\Delta \mathbf{E}_i^{(k)}$  ( $i = 1, 2, \dots, M$ ):

$$\mathbf{J}^{(k)} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{E}_1^{(k)} \\ \Delta \mathbf{E}_2^{(k)} \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{E}_M^{(k)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} f_1^{(k)} \\ f_2^{(k)} \\ \vdots \\ f_M^{(k)} \end{bmatrix} \quad (12)$$

式中  $\Delta \mathbf{E}_i^{(k)}$  称为水头校正值。

Step 4 按下式求出  $E_i$  的新的近似值:  $E_i^{(k+1)} = E_i^{(k)} + \lambda \Delta \mathbf{E}_i^{(k)}$ ,  $\lambda$  为步长因子, 通常取  $\lambda = 0.5$ 。

Step 5 再由式(9)计算  $f_i^{(k+1)}$  ( $i = 1, 2, \dots, M$ ), 若对于所有节点  $i$  均有  $|f_i^{(k+1)}| < \varepsilon$ , 则  $E_i^{(k+1)}$  为所求的解; 否则, 令  $k = k + 1$ , 返回 Step 2, 重复上述计算过程, 直到  $|f_i| < \varepsilon$  为止。

各节点的水压求出以后, 可按照式(6)求出各管段的流量。

## 2 有压管道瞬变流控制方程组及其数值计算

### 2.1 有压管道瞬变流控制方程

当开启阀门时,将会在管道中引起一种特殊的瞬变流——水击,考虑水的压缩性与管壁弹性,则水击波的传播速度为

$$c = (\rho |K + \rho D | E e)^{-1/2} \quad (13)$$

式中  $c$  为水击波的传播速度; $\rho$  为水的密度; $K$  为水的弹性模量(取  $2 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ ); $E$  为管壁材料的弹性模量(如钢管,取  $2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ ); $D$  为管径; $e$  为管壁厚度。以水压头  $E$ ,流速  $v$  为未知函数,则可写出瞬变流运动方程和连续方程:

$$\partial v / \partial t + v \partial v / \partial x + g \partial E / \partial x = -g S_f \quad (14)$$

$$\partial E / \partial t + v \partial E / \partial x + (c^2 / g) \partial v / \partial x = 0 \quad (15)$$

式中  $S_f = f_m v |v| / 2gD$ ;  $f_m$  为管道沿程损失系数。

### 2.2 有压管道瞬变流控制方程的求解

因为瞬变流是短时间内的瞬变现象,且波速远大于流速,式(14)、式(15)可简化为线性方程形式:

$$\partial v / \partial t + g \partial E / \partial x = -g S_f \quad (16)$$

$$\partial E / \partial t + (c^2 / g) \partial v / \partial x = 0 \quad (17)$$

可用特征线法把上述2个方程沿特征线转化成常微分方程,再积分并整理得:

$$\text{沿正向波 } C^+ E_P = E_A - B(v_P - v_A) - R v_A |v_A| \quad (18)$$

$$\text{沿逆向波 } C^- E_P = E_B + B(v_P - v_B) + R v_B |v_B| \quad (19)$$

式中  $B = c/g$ ,  $R = f_m l / 2gnD$ ,  $l$  为管道长度,  $n$  为把管道沿实际水流方向分为的段数。在  $t = 0$  时刻,为稳定流,因此可以计算出此时每个节点的水头  $E$ 。通过已获得的初始条件,可计算出  $t = \Delta t$  时刻,管道各中间节点的  $E_i$  和  $v_i$ :

$$C^+ E_{P_i} = C_P - B v_{P_i} \quad i = 2, 3, \dots, n \quad (20)$$

$$C^- E_{P_i} = C_m + B v_{P_i} \quad i = 2, 3, \dots, n \quad (21)$$

因此,对于同一条管道任意中间节点时段末的水头和流速可按

$$E_{P_i} = (C_P + C_m) / 2,$$

$$v_{P_i} = (C_P - C_m) / 2B$$

求出,其中  $C_P = E_{i-1} + B v_{i-1} - R v_{i-1} |v_{i-1}|$ ,  $C_m = E_{i+1} - B v_{i+1} + R v_{i+1} |v_{i+1}|$ ,至于管道两端点,则必须加上边界条件才能求出。

## 3 算例及结果分析

按上述计算原理编制了计算机程序,并结合某一城镇的给水管网进行了计算。图1是某城镇管网布置简图,运用上述算法对该管网系统进行计算分

析。已知该管网包括2个水源,14个节点,19个管段,总用水量为256.2 L/s,由水泵和对置水塔联合供水,水泵供水量为221.6 L/s,水塔供水量为34.6 L/s,图1给出了所有管段的基本信息。1号管道沿实际水流方向的末端有一阀门,阀门关闭时间为  $T_s$ , 阀门关闭规律为  $\tau = (1 - t/T_s)^m$ , 线性关闭  $m = 1$ ,管道水平放置且管壁厚度为  $e = 0.01 \text{ m}$ ,把管道沿实际水流方向分为  $n = 4$  段,则有5个节点,由于1号管道上游与水源相连接,可以认为该管道的作用水头无变化。计算在阀门没有关闭前各管道的恒定流、水头损失和节点水压,以及在阀门关闭后1号管道中的水击压力,工况1取  $T_s = 6.0 \text{ s}$ ;工况2取  $T_s = 1.0 \text{ s}$ 。

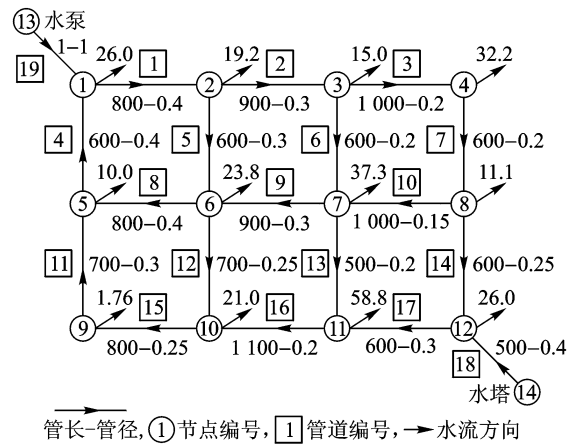


图1 某城镇供水管网简图<sup>[1]</sup>

Fig. 1 The sketch of water distribution pipeline network in a town<sup>[1]</sup>

图2至图4给出了管网中各管道两端点之间的水压差、管道流量和流速,从和文献[1]的比较结果可以看出,模拟结果均符合得很好。图3和图4中的部分流量和流速为负值,是由于假定的管道流速方向与实际方向相反造成的,图5为该管网系统中各节点的节点水头模拟结果。从上述的计算结果和分析可以看出,恒定流模型可以应用到管网水动力学的研究中,而且可以取得很好的效果。工况1:1号管道内产生的水击为间接水击,根据图6a显示,1号管道阀门处的压力会在较短的时间内上升,约在第6s时,阀门处的压力已经上升到67.53 m,和稳态时相比,上升了13.45 m。工况2:产生的水击为直接水击,根据图6b可知,阀门处的压力会在极短的时间内大幅度上升到147.38 m,几乎是突变,和稳态时相比,上升了93.3 m。可见,发生直接水击

时阀门处的最大水击压力远大于发生间接水击时的最大水击压力。因此,在工程中应尽量避免发生直接水击。

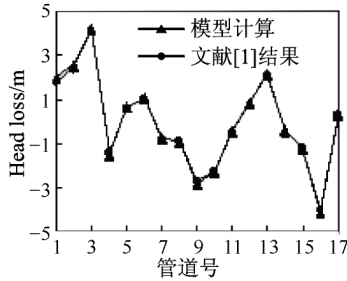


图2 模拟与文献[1]的管道水头损失比较  
Fig. 2 The comparison of head loss between simulated and ref. [1]

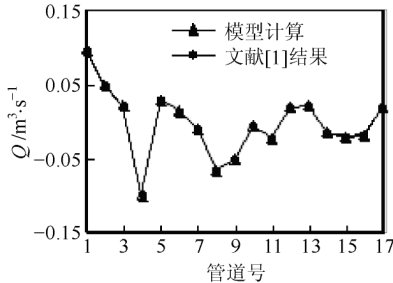


图3 模拟与文献[1]的管道水头损失比较  
Fig. 3 The comparison of flow between simulated and ref. [1]

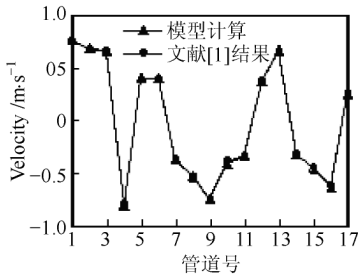


图4 模拟与文献[1]的管道水头损失比较  
Fig. 4 The comparison of velocity between simulated and ref. [1]

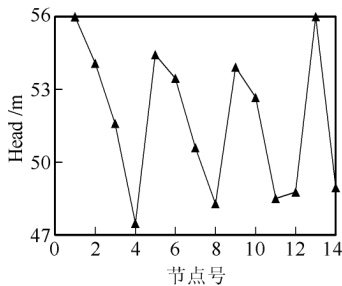


图5 节点水头计算结果  
Fig. 5 Node head of simulation

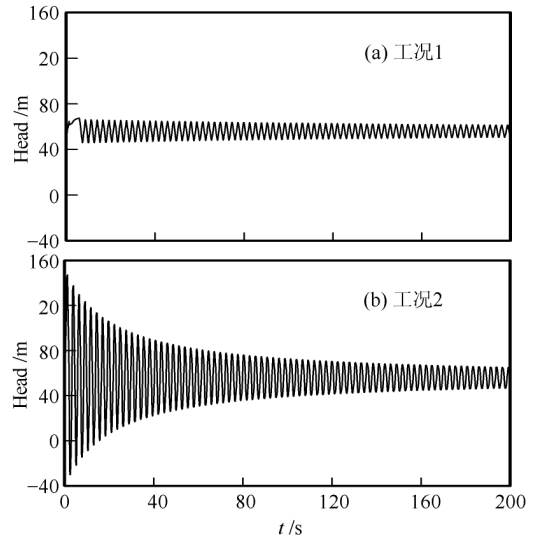


图6 1号管道阀门处水头变化过程  
Fig. 6 Head change process in the valve of No. 1 pipeline

从图7可以看到,在两种工况下,分别约在第6s和第1s时,阀门处的流速为0,说明阀门在此时已完全关闭。通过数值模拟发现,在两种工况下,1号管道中的最大和最小水击压力均发生在第5节点处,即阀门处,其最小水压分别为45.63m和-30.22m。图6、图7没有给予验证,但从曲线变化的趋势上看,计算结果应是合理的。由于实测资料的稀缺,因此模拟结果没有和实测值作比较。笔者和文献[1]所采用的是两种不同的方法,但结果却吻合得很好,所以在很大程度上说明模拟结果是可信的。

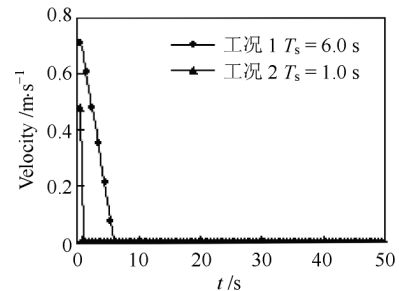


图7 1号管道阀门处瞬变流流速变化过程  
Fig. 7 Velocity change process in the valve of No. 1 pipeline

## 4 结论

通过对管网恒定流模型和瞬变流模型的求解,不仅获得了管网的节点流量和管道流量,而且还获得了由于阀门关闭引起的最大(最小)水击压力及

其相应发生的位置,通过对计算结果的分析可以获得如下结论:

- 1) 在工程中应尽量避免发生直接水击;
- 2) 操作阀门时应适当增加关阀的时间,一旦发生水击,应当立即调整阀门开度,改变其振荡周期,以缓和水击;
- 3) 建立的模型是可靠的,且具有计算速度快、精度高等优点,能够准确计算出管道流量、水头损失和节点水压以及最大(最小)水击压力及其发生的相应位置,可以用于城市给水管网的水力平衡数值模拟研究和为设计者防护水击所采取的措施提供理论依据。

#### 参考文献

- [1] 吴学伟. 给水管网水力计算程序的编制与应用[J]. 控制与测量, 2000, (4): 31~34
- [2] 程伟平, 包志仁. 管网恒定流水力计算的最优化方法[J]. 水利学报, 2000, (7): 86~90
- [3] 戴小鹏, 喻飞, 黄璜. 地理信息系统中管网水力建模[J]. 计算机工程与应用, 2005, (16): 203~206
- [4] 赵振兴, 何建京. 水力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 2005, 9: 228~234
- [5] 郑大琼, 赵晓利, 张国斌, 等. 城镇供水管网瞬变流计算[J]. 中国给水排水, 2006, 22(6): 42~45
- [6] 韩文亮, 柴宏恩. 固液两相流不稳定流方程及水击压力的计算[J]. 泥沙研究, 1998, (3): 68~73

## The Study on Steady Flow and Transient Flow Mathematical Models for City's Water Distribution Pipeline Network

Wang Shoudong, Shen Yongming, Jiang Hengzhi

(State Key Laboratory of Coastal and Offshore Engineering, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116023, China)

[Abstract] Firstly, based on node equation method, a water distribution pipeline network steady flow mathematical model is established and is solved by using the Newton iteration method. Secondly, the mathematic model for transient flow set up by characteristic method can be used to forecast the harmful water hammer occurring in operation of the system, and to find the possible occurrence of the maximum (minimum) hydraulic pressure and their corresponding happened place. Sample shows that they are reliable models which have excellent computing efficiency and high order. The results are that these models can be applied to hydraulic balance calculation for city's water distribution pipeline network and provide the theoretic basis for designer to adopt measures preventing from water hammer.

[Key words] water distribution pipeline network; steady flow; transient flow; water hammer; Newton's iteration method